



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

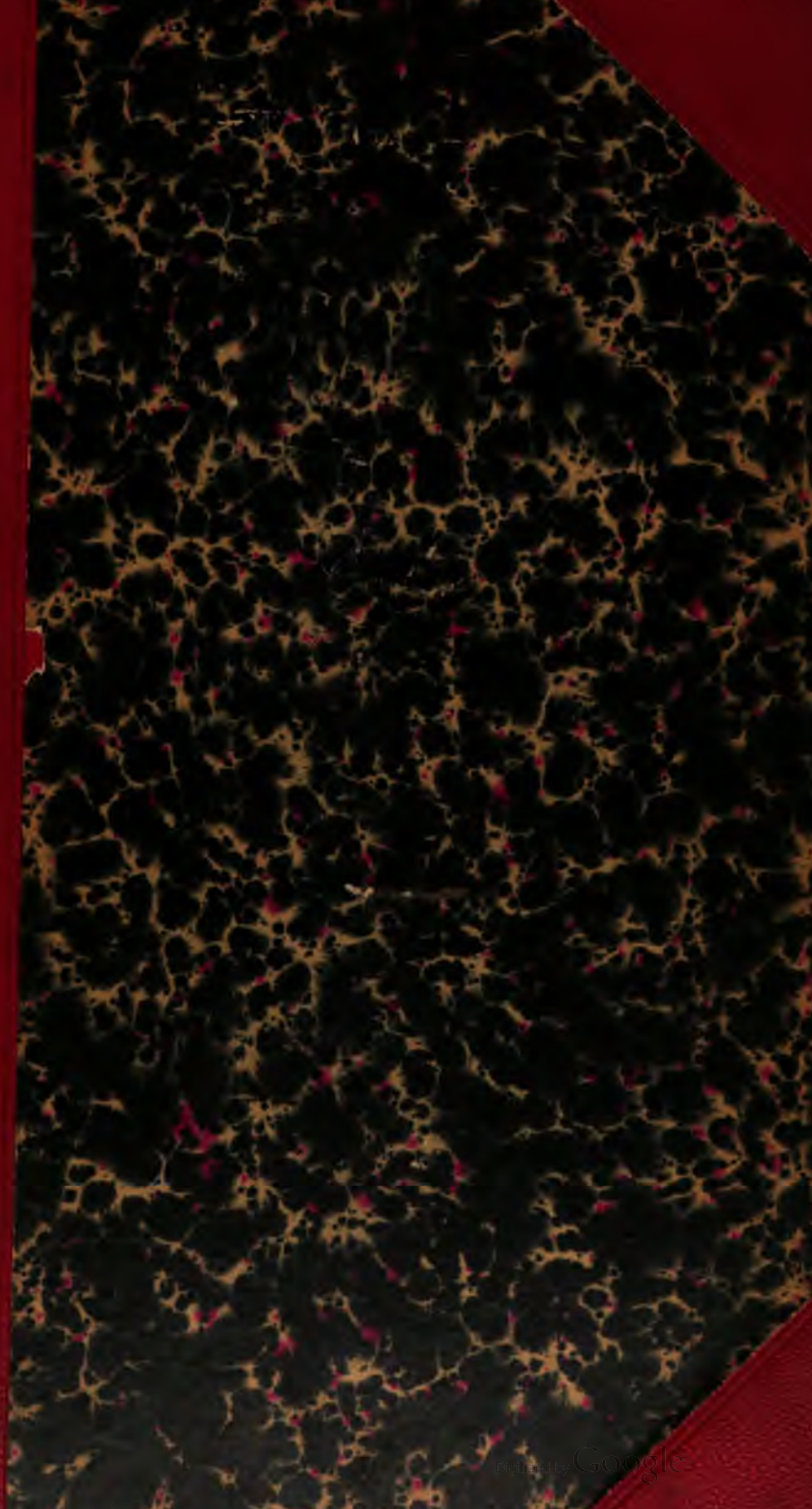
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



L Soc 4321.40

Bound
AUG 20 1903



Harvard College Library

FROM

The Academy



15. m d 58-59

h. h. 1821. 40.
(c. VIII. 29)

ÖFVERSIGT.
AF
KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS
FÖRHANDLINGAR.

FEMTIOÅTTONDE ÅRGÅNGEN.
1901.

STOCKHOLM,
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1901, 1902.

L Soc 4321.40

Bound
AUG 20 1903



Harvard College Library

FROM

The Academy

58.54

1. Dec 1901. 40.
(C. VII. 29)

ÖFVERSIGT.
AF
KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS
FÖRHANDLINGAR.

FEMTIOÅTTONDE ÅRGÅNGEN.
1901.

STOCKHOLM,
KUNGL. BOKTRYCKERIET, P. A. NORSTEDT & SÖNER
1901, 1902.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

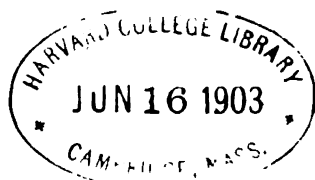
FEMTIOÅTTONDE ÅRGÅNGEN.

1901.



STOCKHOLM,
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1901, 1902.

1037-104
L Soc 4821.40



The Academy.

INNEHÅLL.

Afhandlingar ¹⁾ och föredrag.

	Sid.
ANDERSSON, Some new species of snakes from Camerun and S. America ...	228.
ARESCHOUG, Untersuchungen über den Blattbau der Mangrovenpflanzen	492.
*ARRHENIUS, Ueber die Wärmeabsorption durch Kohlensäure nnd ihren Einfluss auf die Temperatur der Erdoberfläche	25.
—, Den fysikaliska kemiens tillämpning på serumterapien	660.
—, Om vulkanismen	728.
AURIVILLIUS, On the Ethiopian genera of the Striphnopterygidae	296.
BENEDICKS, Sur les facteurs démagnétisants des cylindres	680.
—, Untersuchungen über den Polabstand magnetisierter Cylinder	680.
*BERGSTRAND, Sur la parallaxe d'une étoile dans le voisinage de 61 Cygne ..	429.
*BJERKNES, Cirkulation relativ zu der Erde	739.
*—, Bemerkung zu der vorhergehenden Abhandlung (von Sandström)	775.
BOHLIN, KARL, Fotografier af nebulosor	136.
—, Om konstruktion af astronomiska objektiv	185.
—, Nya stjernan i Perseus	295.
*—, Ueber den Lichtwechsel von U Cephei	370, 391.
*—, Sur l'extension d'une formule d'Euler	715, 779.
—, Beobachtungen und Photogramme des neuen Sterns, Nova Persei	728.
—, KNUT, Etude sur la flore algologique d'eau douce des Açores	185.
BORGÉ, Süßwasseralgen aus Südpatagonien	296.
*BOTHÉN, Ytterligare ett fynd af större Skrikörnen i Sverige	681.
BACKLUND, Ett bidrag till teorien för polens rörelse	370.
*CAVALLIN, Contributions to the theory of the secular perturbations of the planets	685.
CEDERBLOM, ref. SVENSSON's reseberättelse	185.
*CLEVE, A., Bidrag till kännedomen om ytterbium	573.
—, P. T., Plankton from the Indian Ocean	296.
DAHLGREN, Om en katalog öfver naturvetenskaplig litteratur	2.
DAHLSTEDT, Beiträge zur Kenntniss der Hieraciumflora Oesels	492.
DUNÉR, Om bestämning af parallaxen för en stjärna i Svanen	295.
DUSÉN, Beiträge zur Kenntniss der Laubmoosflora Ostgrönlands	3.
—, Zur Kenntniss der Gefässpflanzen Ostgrönlands	136.
*—, Zur Kenntniss der Gefässpflanzen des südlichen Patagoniens	229.
*EKBOM, Om Para-Nitrobenzolsulfonsyra	457.
*—, Bidrag till kännedomen om svafveldioxids inverkan på diazoföreningar ..	465.
—, Om O-aminobenzolsulfonsyreamid	680.
*EKHOLM, Sur la hauteur de l'atmosphère homogène	619.
*ERICSON-AURÉN och PALMÉR, Ueber die Auflösung von Metallen 1.	525.
ERIKSSON ref. JUEL's reseberättelse	492.
*FREDHOLM, Sur la methode de prolongement analytique de M. Mittag-Leffler ..	203.

¹⁾ De med en * betecknade äro intagna i Öfversigten.

*HANSSON, Anteckningar om Skandinavien's glattmaskar, iglar m. m.	729.
*HELLSTRÖM, Om grundämnenas uppkomst	351.
*HOLMGREN, Ueber Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen	91.
*—, Sur une classe d'équations aux dérivées partielles	437.
*JANSSON, Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees	207.
JOHNSON, Elektriska svängningar af mycket hög frekvens	680.
JUEL, <i>Taphridium</i> LAG. & JUEL, eine neue Gattung der Protomycetaceen	728.
*JÄDERHOLM, Beiträge zur Kenntniss der Laubmoosflora Novaja Semljas	515.
KAIJSER, Ueber eine Molluskenfauna von Grey Hook auf Spetsbergen	136.
*KLASON, Ueber ein neues Oxyd von Molybdän	5.
*—, Beiträge zur Kenntniss der Molybdensäure	13.
*—, Ueber Molybdänblau	21.
*— och KÖHLER, Öfver ammoniumparamolybdats inverkan på natriumbitartrats specifika vridning af polariseradt ljus	709.
*KOCH, Quelques théorèmes sur les fonctions entières	405.
*—, JOHN, Beiträge zur Kenntniss der Wärmeabsorption in Kohlensäure	475.
KULLIGREN, Studien über die Inversion	728.
LEMSTRÖM, Om vätskors förhållande i kapillarrör under inflytande af elektrisk luftström	370.
*LIDFORSS, Batologiska iakttagelser II	59.
LILLJEBORG, Bidrag till en öfversigt af de inom Sverige iakttagna arterna af släktet <i>Cyclops</i>	227.
LINDMAN, Die Blütheneinrichtungen einiger südamerikanischen Pflanzen. I.	680.
LOVEN, ref. af ULLBERG's reseberättelse	295.
LÖNNBERG, Studies on Ruminants. I. II.	3.
MALME, Ex herbario Regnelliano. P. 4	185.
—, <i>Asclepiadaceæ</i> paraguayenses	296.
—, Ex herbario Regnelliano. P. 5	492.
—, Beiträge zur Kenntniss der südamerikanischen Arten der Gattung <i>Pterocaulon</i>	492.
MALTE, Untersuchungen über eigenartige Inhaltskörper bei den Orchideen	728.
*MEBIUS, Auflösung der Gleichungen dritten, vierten und fünften Grades durch besondere Funktionen	105.
*MITTAG-LEFFLER, Sur le terme complémentaire de mon développement de la branche uniforme d'une fonction monogène	728, 785.
*MURBECK, Ueber einige amphicarpe nordwestafrikanische Pflanzen	549.
*MÖRNER och VESTERGEN, Till kändedom om fri oxalsyras förekomst inom växtriket	661.
—, H., Om svafvets bindningsätt i proteinämnen	728.
NORDENSKIÖLD, A. E., Radioaktiva mineral	295.
*—, Einige Bemerkungen zu der vorstehenden brieflichen Mittheilungen des Herrn Professors Clemens Winkler	505.
*—, IVAR, Beiträge zur Kenntniss der Molybdänsemipentoxyds	343.
OHLIN, Arctic Crustacea. 2	660.
*OSEN, Ueber einige irreduciblen Gruppen von Berührungstransformationen im Raume	307.
*PAHL, Nya undersökningar öfver pyrofosfat af natrium, kalcium och magnesium	161.
*PALMBER, Ueber die kapillarelektischen Erscheinungen	139.
*PETRINI, Ueber Functionen die ein algebraisches Additionstheorem besitzen	297.
*—, Sur l'ordre de convergence et divergence des séries à termes positifs	415.
*—, Continuité et discontinuité des dérivées du potentiel	633.
*PHRAGMÉN, Sur une loi de symétrie relative à certaines formules asymptotiques	189.
*—, Ueber eine direkte Methode, eine gegebene ganze rationale Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen in irreduktible Faktoren zu zerlegen	728, 795.
RETZIUS, Om den gamla germanska rastypen	369.
ROSÉN, Om pendeliakttagelser	295.
ROSENBERG, Ueber die Embryologie von <i>Zostera marina</i>	185.
*SANDSTRÖM, Ueber die Beziehung zwischen Temperatur und Luftbewegung in der Atmosphäre under stationära förhållanden	759.

SKOTTSBERG, Einige blüthenbiologische Beobachtungen im arktischen Theil von schwedisch Lappland 1900	3.
— och WESTERGREN, Zur Kenntniss der Vegetation der Insel Oesel. 1.	185.
—, Die Malpighiaceen des Regnellischen Herbars	660.
SKÖSTEDT, Beiträge zur Kenntniss der Insektenfauna von Kamerun	136.
SMITH, On the genus <i>Lycodes</i>	185.
STARBÄCK, Ascomyceten der ersten Regnellischen Expedition	296.
SÖDERBAUM, Berzelius' själfbiografiska anteckningar	660.
THÉKL, ref. EKMAN's reseberättelse	2.
—, On a singular case of hermaphroditism in the <i>Holothurids</i>	296.
TRÄGÅRDH, Zur Kenntniss der littoralen Arten der Gattung <i>Bdella</i>	728.
TULLGREN, Spiders collected in Florida	3.
TÖRNEBOHM, ref. HOLLENDER's reseberättelse	2.
—, Sveriges äldsta geologiska historia	136.
*WIGERT, Sur l'équation différentielle du calcul des variations	791.
*WIMAN, Ueber die durch Radicale auflösbare Gleichungen deren Grad eine Potenz von 2 ist	543.
*—, Ueber die Wurzeln der metacyklischen Gleichungen	669.
*WINKLER, Zur Zusammensetzung des Eisens von Ovikak in Grönland und der bituminösen Kohle aus der cambrischen Formation Westergötlands	495.
*ÄNGSTRÖM, Ueber die Abhängigkeit der Absorption der Gase, besonders der Kohlensäure, von der Dichte	371.
*—, Einige Bemerkungen zur Absorption der Erdstrahlung durch die atmosphärische Kohlensäure	381.

Öfriga ärenden.

BESKOWSKA stipendiet: ANDERSSON	727.
DAHLANDER och HASSELBERG, Utlåtande om internationella jordmagnetiska observationer	491.
Donationer: G. Lindströms minnesfond	659.
EDLUNDSKA belöningen: WIDMAN	2.
FERNESKA belöningen: ZEIPER	186.
FLORMANSKA belöningen: CARLGREN	186.
HAHNSKA räntemedlen: GRANQUIST	2.
Inspektionsberättelser	227.
Ledamöter, afnåde: ARMSTRONG, 1; EHKENSVÄRD, AGARDH, ROSSANDER, LINDMAN, HERMITE, PETTENKOFER, 135; FOCK, 185; LINDSTRÖM, HAZELIUS, 369; FORSSELL, NORDENSKIÖLD, 491; LACAZE-DUTHIERS, FICK, 659; ROWLAND, TIETGEN, 679;	
—, invalde: TIGERSTEDT, 2; CZERNY, 137; WARFWINGE, TETMAJER, 187; GILLJAM, BERG, PHRAGMÉN, ERIKSSON, DARBOUX, CREMONA, ROUX, 228; ARRHENIUS, 296; SALIN, 659; HOLM, TAMM 680; LORD AVEBURY, KOSSEL, 728.	
LETTERSTEDTSKA anslaget för undersökningar: HANBERG	136.
—, författarpriset: LILLJEBORG	136.
—, öfversättningspriset: GEETE	136.
LINDBOMSKA belöningen: ej utdelad	186.
PETTERSON och ALMQUIST, Utlåtande öfver en plan för hydrografiska undersökningar	135.
Porträtt: af G. Lindström	659.
Präses: ODHNER	228.
REGNELLS zoologiska gåfomedel: CARLGREN, GRÖNBERG, SKÖSTEDT	680.
Reseberättelse af BENGTSSON, ENGHOLM, WAHLGREN, EKSTAM, 1; SVENSSON, 2; ULBERG, 227; JUEL, KELLGREN, 492.	
Reseunderstöd: ANDERSSON, ARWIDSSON, BÜLOW, HESSELMAN, HOLMGREN, KURCK, OHLIN, SERNANDER, SKOTTSBERG, WAHLGREN, WALLENGREN	186, 187.
RETZIUS och DAHLGREN, Utlåtande öfver ett förslag till internationell utlåning af handskrifter	135, 492.

RETZIUS, Fru E., J. A. Wahlbergs medaljfond.....	227.
RETZIUS, vald till delegerad i intern. Akademiska Associationen.....	659.
Scheelefondens ränta: KÖHLER.....	136.
Skänker till Akademiens bibliotek: 3, 104, 129, 137, 181, 187, 306, 223, 228, 264, 290, 296, 306, 350, 366, 370, 390, 414, 428, 464, 474, 489, 493, 504, 542, 572, 632, 648, 660, 674, 684, 708, 720, 728, 738, 758, 778, 784, 811.	
, Berzelliiska museet.....	680.
, Riksmuseum.....	137.
, Zoologiska stationen Kristineberg.....	3, 492.
Uppmuntran för instrumentmakare: P. M. SÖRENSEN, G. SÖRENSEN.....	187.
Utnämningar: HOLM, 659; SJÖGREN, 679; AURIVILLIUS, 728.	
WALLMARKSKA belöningen: BERGSTRAND, GULLSTRAND.....	679.
WITTROCK och ERIKSSON, Utlåttande om M. Lindblads svampbok	727.
Årsberättelse, Sekreterarens	265.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 58.

1901.

N^o 1.

Onsdagen den 9 Januari.

INNEHÅLL.

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 1.
KLASON, Ueber ein neues Oxyd von Molybdän, Molybdänsemipentoxid . . .	> 5.
KLASON, Beiträge zur Kenntniss der Molybdänsäure	> 13.
KLASON, Ueber Molybdänblau	> 21.
ARRHENIUS, Ueber die Wärmeabsorption durch Kohlensäure und ihren Einfluss auf die Temperatur der Erdoberfläche	> 25.
LUDFORS, Batologiska iakttagelser. II.	> 59.
HOLMGREN, Ueber Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen .	> 91.
MEBIUS, Auflösung der Gleichungen dritten, vierten und fünften Grades durch besondere Funktionen	> 105.
Skänker till Kristinebergs zoologiska station och till Akademiens bibli- otek	sidd. 3, 104, 129.

Tillkännagafs, att Akademiens utländske ledamot Lord W. G. ARMSTRONG med döden afgått.

Berättelser om vetenskapliga resor, som med understöd af Akademien blifvit under sistlidet år inom landet utförda, hade afgifvits af Docenten S. BENGTSSON, som i södra och mellersta Sverige studerat insektgrupperna Ephemerider och Plecopterer; af Läroverksskollega W. A. ENGHOLM, som dels fortsatt föregående undersökningar af djurlifvet i och omkring sjön Tåkern i Östergötland och dels idkat studier vid Kristinebergs zoologiska station; af Filos. Kandidaten E. WAHLGREN, som i trakten af Torne träsk studerat släktena Podurider och Myriapoder samt andra evertebrater; af Filos. Licentiaten O. EKSTAM, som i trakten af Syltopparne idkat botaniska forskningar. Derjemte

hade vagnmakaren A. A. SVENSSON afgifvit berättelse om den resa, som han i egenskap af Byzantinsk stipendiat i utlandet utfört för studerande af vagnfabrikationen.

Herr THEËL redogjorde för innehållet dels af Kandidat S. EKMANS vid Akademiens nästlidne Decembersammankomst anmälda berättelse om hans resa till Torne Lappmark för studium af högfjällens Entomotraceer, och dels af Läroverkskollega ENGHOLMS ofvan nämnda reseberättelse angående dennes studier vid Kristinebergs zoologiska station.

Herr TÖRNEBOHM redogjorde för innehållet af Filos. Licentiaten A. HOLLENDERS äfvenledes vid Akademiens nästlidne Decembersammankomst anmälda berättelse om hans resor i Skåne för utredande af strandkonturens läge under olika skeden af den förhistoriska tiden.

Herr DAHLGREN lemnade meddelande om förhandlingarne inom den internationella komité, som under sistlidne December månad hade sammanträde i London för fortsatt behandling af frågan om utgifvande genom internationel samverkan af en fortlöpande katalog öfver naturvetenskaplig litteratur, hvilket komité-sammanträde Herr DAHLGREN bevisat såsom ombud för Sverige.

Den *Edlundska* belöningen för året tillerkändes Akademiens ledamot Professor O. WIDMAN för fyra af honom författade och i Bihanget till Akademiens Handlingar införda kemiska afhandlingar, nämligen: 1:o) »Om dextro-, lævo- och inaktiv usninsyra», 2:o) »Om dekarbo-usninsyra», 3:o) »Om usnonsyra», och 4:o) »Om usninsyrans konstitution».

Årsräntan af *Hahnska* donationen beslöt Akademien tilldela Fysiske Laboratorn vid Upsala universitet P. G. D. GRANQVIST såsom understöd för fortsatta undersökningar öfver katodstrålarne.

Till sin utländske ledamot kallade Akademien sin förutvarande inländske ledamot Professorn ROBERT TIGERSTEDT, hvilken, såsom numera Professor vid universitetet i Helsingfors, upphört att vara svensk undersäte.

På tillstyrkan af komiterade antogos följande inlemnade afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter:

i Akademiens Handlingar: »Studies on Rumiminants. I and II» af Docenten E. LÖNNBERG;

i Bihanget till Handlingarne: 1:o) »On the spiders collected in Florida by Dr. EINAR LÖNNBERG 1892—93» af Filos. Kandidat A. TULLGREN, 2:o) »Einige blütenbiologische Beobachtungen im arktischen Theil von Schwedisch Lappland 1900» af Filos. Kandidat C. SKOTTSBERG, 3:o) »Beiträge zur Kenntniss der Laubmoosflora Ostgrönlands, nebst Beschreibung einiger Bryaceen der Insel Jan Mayen» af Ingeniör P. DUSÉN; samt

i Öfversigten: de i innehållsförteckningen angifna 7 uppsatser.

Följande skänker anmälades:

Till Akademiens Zoologiska Station Kristineberg

har Konsul G. E. BROMS genom Professor THÉEL såsom gåfva öfverlemnat en summa af 40,000 kronor för att dermed bekosta uppförande vid stationen af ett tidsenligt vinterlaboratorium med dertill hörande reservoirer, rörledning m. m., hvarigenom stationens vetenskapliga verksamhet kunde oafbrutet fortgå äfven under vintertid.

Till Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *Svenska Akademien.*

Handlingar. D. 14 (1899). 8:o.

— *Statistiska centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. 3 häften. 4:o.

— *Generalstaben.*

Norrbottnens läns kartverk. 1 : 200,000. Bl. 44. 1900. Fol.

— *Karolinska mediko-kirurgiska institutet.*

Inbjudningsskrift. 1899. 4:o.

— *K. Kommittén för gradmätning på Spetsbergen.*

Rapporter öfver den svenska gradmätningsexpeditionens arbeten 1899—1900 & Tillägg. 8:o.

Rapport öfver den ryska gradmätningsexpeditionens arbeten 1899. 8:o.

Auxerre. *Société des sciences historiques et naturelles de l'Yonne.*

Bulletin. Vol. 53 (1899): 1—2. 8:o.

Belfast. *Natural history and philosophical society.*

Report and proceedings. 1899—1900. 8:o.

Bergen. *Museum.*

SARS, G. O., An account of the Crustacea of Norway. Vol. 3: P. 9—10.
1900. 8:o.

Berlin. *Deutsche geologische Gesellschaft.*

Zeitschrift. Bd 52 (1900): H. 3. 8:o.

— *Deutsche physikalische Gesellschaft.*

Verhandlungen. Jahrg. 2 (1900): Nr 16—17. 8:o.

— *Entomologischer Verein.*

Berliner entomologische Zeitschrift. Bd 45 (1900): H. 3—4. 8:o.

Bern. *Société Helvétique des sciences naturelles.*

Nouveaux Mémoires. Vol. 33: Livr. 2; 36: 1—2; 37. 1898—1900. 4:o.

Besançon. *Société d'émulation du Doubs.*

Mémoires. (7) Vol. 4 (1899). 8:o.

Bologna. *R. Accademia delle scienze.*

Memorie. (5) T. 7. 1897. 4:o.

Rendiconto. N. S. Vol. 2 (1897/98): Fasc. 1—4; 3 (1898/1899): 1—4.
8:o.

Bonn. *Naturhistorischer Verein.*

Verhandlungen. Jahrg. 57 (1900): H. 1. 8:o.

— *Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Sitzungsberichte. 1900: H. 1. 8:o.

Bordeaux. *Société Linnéenne.*

Actes. (6) T. 4. 1899. 8:o.

— *Société des sciences physiques et naturelles.*

Mémoires. (5) T. 1: Cah. 1—2; 2: 1—2; 3: 1—2; 4—5: 1. 1896—1899.
8:o.

Procès-verbaux des séances. 1894/1895—1898/1899. 8:o.

Boston. *American Academy of Arts and Sciences.*

Proceedings. Vol. 36 (1900/1901): 1—8. 8:o.

Braunschweig. *Verein für Naturwissenschaft.*

Jahresbericht. 8 (1891/92, 1892/93). 8:o.

Bruxelles. *Académie R. de Belgique.*

Bulletin. Cl. des lettres . . . 1900: 11. 8:o.

» Cl. des sciences . . . 1900: 11. 8:o.

— *Société Belge de géologie.*

Bulletin. T. 14 (1900): Fasc. 4. 8:o.

Budapest. *Ungarische geologische Anstalt.*

Zeitschrift. K. 30 (1900): Füz. 5—7. 8:o.

KOCH, A., Die Tertiärbildungen des Beckens der Siebenbürgischen
Landestheile. 2. 1900. 8:o.

Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*

Anales. T. 50 (1900): Entr. 4. 8:o.

Buitenzorg. *Jardin Botanique.*

Annales. (2) Vol. 2: P. 1. 1900. 8:o.

Verslag omtrent den staat. 1899. 8:o.

Mededeelingen. 43. 1899. 8:o.

(Forts. à sid. 104.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1901. N:o 1.
Stockholm.

Ueber ein neues Oxyd von Molybdän, Molybdän-semipentoxyd.

VON PETER KLASON.

(Mitgetheilt am 9 Januar 1901.)

Wir wissen schon seit geraumer Zeit, dass Jodwasserstoffsäure reducirend auf die salzsaure Lösung der Molybdänsäure einwirkt. Erst F. MAURO und L. DANESI ¹⁾ haben aber die dabei stattfindende Reaktion quantitativ nachgefolgt und dabei gefunden, dass auf 1 Mol. Molybdänsäure genau 1 At. Jod in Freiheit gesetzt wird. Die Reaktion ist von ihnen benutzt worden um Molybdänsäure quantitativ zu bestimmen, was ihnen auch gelungen ist, wie später FRIEDHEIM und EULER ²⁾ ausführlich bestätigen. Es ist auch dabei gezeigt worden, dass die reducirte salzsaure Lösung sich wie eine Lösung von Molybdänpentachlorid in Wasser verhält, d. h. sie giebt mit Ammoniak rostbraunes Bioxydhydrat, während die Lösung Molybdänsäure enthält. Dieses Verhalten zeigt nämlich nach DEBRAY die wässrige Lösung von Molybdänpentachlorid.

Man wird sich weiter erinnern, dass Molybdänpentachlorid, welcher zuerst von BERZELIUS dargestellt wurde, von ihm als Molybdäntetrachlorid aufgefasst wurde. BLOMSTRAND, welcher die Verbindung zuerst analysirte, bestätigt die Vermuthung von BERZELIUS. Es ist DEBRAY's Verdienst die wahre Sachlage der Dinge fest-

¹⁾ Zeitschrift anal. Chemie Bd. 20. 507.

²⁾ Ber. Ber. Chem. Ges. 1895 s. 2061.

gestellt zu haben, und er bestimmte sogar das Vol.-Gew. des Pentachlorides in Gasform. Für BERZELIUS und BLOMSTRAND war selbstverständlich der Niederschlag mit Ammoniak Bioxydhydrat, eine Angabe, welche DEBRAY ohne nähere Untersuchung bestätigt, weil die Lösung gleichzeitig »reichliche Mengen Molybdänsäure enthält«. Ich werde im Folgenden zeigen, dass die Untersuchung hier zum zweiten Male auf irrigen Pfad geführt wurde. Molybdänbioxydhydrat ist niemals dargestellt worden. Was man als solches aufgefasst hat ist das Hydrat von Molybdänsemipentoxyd in mehr oder weniger reinem Zustande. Dieses Hydrat kann sogar leicht in dem wasserfreien Form, Mo_2O_5 , übergeführt werden. Da nun Molybdänsäureanhydrid gewöhnlich Molybdäntrioxyd genannt wird, so lässt sich nicht Mo_2O_5 in Analogie mit Phosphorpentoxyd Molybdänpentoxyd benennen; ich möchte daher die Name Molybdänsemipentoxyd in Analogie mit z. B. Molybdänsesquioxyd vorschlagen. Zweckmässig kann auch der Complex MoO *Molybdänyl* und MoO_2 *Molybdon* genannt werden in Analogie mit den entsprechenden Schwefelverbindungen. Die Verbindung $\text{MoO} \cdot \text{Cl}_3$ — entsprechend Phosphoroxychlorid — wird demnach Molybdänylchlorid und $\text{MoO}_2 \cdot \text{Cl}_2$ Molybdonchlorid genannt.

Ammoniummolybdänylchlorid,



Man löst 200 g. Ammoniummolybdat in 600 cc. reiner rauch. Salzsäure. Hierzu wird auf jedes At. Molybdän 1 Mol. Jodammonium und 0,1 Mol. Salmiak (oder 1 Mol. Jodwasserstoff in conc. Lösung und 1,1 Mol. Salmiak) zugesetzt. Das Gemisch wird auf dem Sandbade mit vorgelegter gekühlter Vorlage destilliert, bis nur schwache Joddämpfe mit dem Destillat übergehen. In der Regel muss wiederholt conc. Salzsäure zugesetzt werden um diesen Punkt zu erreichen. Nach der Destillation wird der Inhalt der Retorte unter Kühlung mit Chlorwasserstoff vollständig gesättigt, wobei die Farbe der Lösung von braun ins grün umschlägt. Am Ende der Sättigung und in wenigen Stun-

den nachher krystallisiert in grossen Mengen ein prachtvoll grasgrün gefärbtes Salz in kleinen Oktaedern aus. Das Salz wird von der Mutterlauge abgesaugt und mit rauch. reiner Salzsäure gewaschen und dann gepresst. Es ist an der Luft vollständig haltbar und wird dabei weder oxydirt noch zerfliesst es. Aus der Mutterlauge kann durch Concentration und nachherige Sättigung mit Chlorwasserstoff neue Mengen des Salzes erhalten werden. Man kann in dieser Weise fast die ganze Menge Molybdänsäure in dieser Verbindung überführen. Will man das Salz umkrystallisieren, wird es in Wasser zu einer gesättigten Lösung gelöst und durch Einleitung von Chlorwasserstoff wieder zur Krystallisation gebracht.

Wie oben angegeben hat das Salz die Zusammensetzung $\text{MoOCl}_3 + 2\text{NH}_4\text{Cl}$.

	Mo	Cl ₃	N ₂	H ₆
Ber.	29,49	54,53	8,61	2,46
Gef.	29,14	54,21	8,52	2,54.

Molybdän kann hier wie in allen Molybdänylverbindungen auch titrimetrisch bestimmt werden, wobei man zweckmässig in der Weise verfährt, dass die Lösung in einem Kolben mit Schwefelsäure versetzt wird. Es wird nun Permanganat bis Blaufärbung zugesetzt, nachher etwas Jodkalium. Das in kleiner Menge ausgeschiedene Jod wird schliesslich mit unterschwefligsaurem Natron bestimmt. Bei Gegenwart von Molybdänsäure kann Chlor bekanntlich weder Gewicht noch maasanalytisch bestimmt werden. Wenn aber Molybdän als Molybdänylverbindung vorhanden ist kann das Chlor in beiderlei Weise bestimmt werden, wobei vorher zweckmässig bedeutende Mengen Schwefelsäure (nicht Salpetersäure die schon in der Kälte oxydirend wirkt) zu der Lösung gesetzt wird. Ganz allgemein kann Chlor in Verbindung mit Molybdän durch Verbrennung in mit nitrösen Dämpfen beladener Luft nach meiner Methode¹⁾ leicht bestimmt werden. Die Platingeweberollen werden dann zweckmässig durch Asbestrollen

¹⁾ Ber. Ber. 1887 s. 3065.

ersetzt. Wasserstoff ist durch gewöhnliche Elementaranalyse mit chromsauren Blei bestimmt.

Von dem Ammoniummolybdänylchlorid giebt es in der Litteratur einige schwache Lebenszeichen. Nach BERZELIUS vereinigt sich Molybdänpentachlorid mit Salmiak in wässriger Lösung. BLOMSTRAND erhielt wenn auch schwierig und in geringer Menge grüne Krystalle durch Sättigung von einer Salmiaklösung mit Molybdänpentachlorid. Er gab der Verbindung die Formel $2\text{NH}_4\text{Cl} + 3\text{MoCl}_5 + 6\text{H}_2\text{O}$, eine Zusammensetzung die jedenfalls sehr weit von der Wahrheit liegt.

Ammoniummolybdänylchlorid löst sich in Wasser unter gelinder Wärmeentwicklung. Das Salz wird dabei vollständig hydrolysiert, so dass die drei Chloratomen direkt mit Alkali titriert werden können. Die Farbe der Lösung ist derjenigen der Jodlösung ziemlich ähnlich. In hydrolysierten Zustande ist die Lösung leicht autoxydabel, wobei Molybdänblau gebildet wird. Eine conc. wässrige Lösung kann durch Zusatz von rauch. Salzsäure wieder grün gemacht werden und ist nun nicht mehr autoxydabel.

Ammoniummolybdänylchlorid wird auch von Alkohol zersetzt. Es bleibt der grösste Theils des Salmiaks zurück, während das übrige in Lösung geht. In Eisessig ist aber das Salz völlig unlöslich.

Molybdänsäure in salzsaurer Lösung wird auch durch Mercaptan glatt zu Semipentoxyd reducirt, wobei das Mercaptan in Disulfid übergeht. Durch Zink- und Natriumamalgam geht aber die Reduktion weiter bis zu Sesquioxyd, doch bleibt noch etwas Semipentoxyd unangegriffen.

Molybdänylhydrat, $\text{MoO}(\text{OH})_2$.

Wie schon erwähnt fand DEBRAY, dass wenn man eine wässrige Lösung von Molybdänpentachlorid mit Ammoniak fällt, die Lösung viel Molybdänsäure enthält. Dieses ist vollständig richtig. Ganz anders aber liegt die Sache, wenn nur die berechnete Menge Ammoniak zugesetzt wird. Man löst Ammoniummolybdänylchlorid in reichliche Mengen Wasser. Hierzu wird in der Kälte und unter kräftiger Umrührung eine ver-

dünnte Lösung von 3 Mol. Ammoniak auf je 1 At. Molybdän zugesetzt. Es fällt dabei alles Molybdän als Molybdänylhydrat aus. Diese Verbindung ähnelt gefällttem Eisenoxydhydrat, hat nur eine etwas hellere Farbe. Das Hydrat ist bei Anwesenheit von Salmiak in Wasser vollständig unlöslich. In reinem Wasser löst sich etwa 2 g. pr Liter. Nimmt man aber wie es DEBRAY machte Alkali im Überschuss und kocht einige Zeit, so wird das Molybdänylhydrat in gleichen Molekülen Molybdänsäure und das wirkliche bisher unbekannte Molybdänbioxydhydrat zersetzt, worüber ich im bälde hoffe berichten zu können. Man kann auch das Molybdänylhydrat durch essigsauren Natron fällen. Dabei darf die Lösung nicht zu stark erwärmt werden, in welchem Falle etwas Molybdänsäure dabei gebildet wird. Weinsäure und ähnliche Säuren verhindern die Fällung des Molybdänylhydrates. Das Hydrat wird auf einem Filtrum genommen. Nach dem Abtropfen wird es ein Paar Mahl. mit Wasser gewaschen, dann stark gepresst und in Vacuum getrocknet, zuletzt über Phosphorsäureanhydrid. Es hat nun obenstehende Zusammensetzung $\text{MoO}(\text{OH})_2$ und ist somit ein vollständiges Analogon von Orthophosphorsäure. In absoluter Reinheit kann es kaum dargestellt werden. Theils enthält es etwas Salmiak, theils wird es während des Trockens spurenweise zu Molybdänsäure oxydirt. Die titrimetrische Bestimmung und die Regeneration von Ammoniummolybdänylchlorid aus dem Hydrat zeigen aber in unzweifelhafter Weise, dass Molybdänylhydrat wirklich vorliegt.

Molybdänylhydrat löst sich nicht in den kaustischen Alkalien, etwas in Ammoniak, viel mehr aber in den Alkalikarbonaten und in kohlensauren Ammon.

Analyse von Molybdänylhydrat:

a = durch Ammoniak gefällt,

b = durch essigsaurem Natron gefällt.

	Ber.	Gef. in <i>a</i> .	Gef. in <i>b</i> .
Mo	58,38	58,12	60,58
H ₂ O	16,56	17,09	15,50
Oxydirende Sauerstoff	4,90	4,08	4,81

Das durch essigsames Natron gefällte Hydrat hat sich somit weniger oxydirt als das durch Ammoniak gefällte.

Molybdänylhydrat ist das einzigste Pentoxydhydrat, welches keine saure Eigenschaften besitzt.

Molybdänsemipentoxyd, Mo_2O_5 .

Wenn man Molybdänylhydrat vorsichtig in Kohlensäurestrom erhitzt, verliert es sein Wasser und geht in das Anhydrid Molybdänsemipentoxyd über, dessen Nichtexistenz GUICHARD ¹⁾ sogar beweisen haben will. Molybdänsemipentoxyd, ist ein violett-schwarzes Pulver, welches sich in Schwefelsäure und Salzsäure löst aber schwieriger je höher die Temperatur bei der Darstellung war. Das Oxyd hält kleine Mengen sowohl von Molybdänsäure, welche durch Alkalien ausgezogen werden kann, wie von Bioxyd, entstanden durch Reduktion durch den kleinen Mengen von Salmiak, welche das Hydrat enthält.

Analyse:

a) Oxyd erhalten aus dem Hydrat (durch Fällung mit Acetat dargestellt) und von Molybdensäure befreiet.

Ber. Mo = 70,56 %

Gef. » = 70,69 %

Der Oxyd was nicht genügend löslich in Schwefelsäure um eine titrimetrische Bestimmung zulassen.

b) Oxyd erhalten aus dem Hydrat (durch Fällung mit Ammoniak dargestellt) und von Molybdänsäure befreiet.

Ber. Oxydirender Sauerstoff = 5,84 %

Gef. » » = 5,36 %

Ein sehr kleiner Theil von dem Pulver, vermuthlich Molybdänbioxyd, wurde bei der Titrierung nicht gelöst.

Molybdänylchlorid, MoOCl_3 .

Das Ammoniummolybdänylchlorid kann als Doppelsalz von Molybdänylchlorid aufgefasst werden, oder wohl eher als das

¹⁾ C. r. d. l'Acad. sciences 129. 722.

Ammoniumsalz einer Chlorosäure: Wasserstoffmolybdänylchlorid, H_2MoOCl_3 . Es fragt sich nun: existirt Molybdänylchlorid als solches?

Unter den 5 bis 6 beschriebenen Molybdänacichloriden ist es namentlich eines von welchem man vermuthen könnte, dass es eben das genannte Molybdänylchlorid wäre. BLOMSTRAND ¹⁾ hat durch Einwirkung von Chlor auf ein Gemenge von Molybdänbioxyd und Kohle unter anderem ein grünes Acichlorid dargestellt. In kleinen Mengen Wasser löst sich diese Verbindung mit grüner Farbe, aus welcher Lösung Ammoniak ein rostgelbes Hydrat fällt. Er giebt dieser Verbindung die sehr complicirte Formel $2 Mo_3Cl_{16} + Mo_3O_8$. Da die Verbindung eben so leichtflüchtig ist wie Molybdänpentachlorid ist selbstverständlich eine so complicirte Formel gänzlich ausgeschlossen. Die Analysen lassen sich leidlich der Formel $MoOCl_4$ anpassen. Bei Wiederholung der Versuche von BLOMSTRAND in LOTHAR MEYER'S Laboratorium hat PÜTTBACH das Chlorid wiedergefunden und bestätigt die Formel $MoOCl_4$. Sowohl gegen die Arbeiten von BLOMSTRAND wie von PÜTTBACH kann man die Anmerkung machen, dass sie gänzlich unterlassen haben die Oxydationsstufe ihrer Chloride durch Permanganat zu bestimmen. Aber eine solche Bestimmung ist als Controlle geradezu unerlässlich.

Ich habe nun die Versuche von BLOMSTRAND und PÜTTBACH wiederholt und habe auch das grüne Chlorid erhalten, habe aber auch gefunden, dass es schwierig ist eben dieses Chlorid mit den Merkmalen der Reinheit darzustellen. Da nun Molybdänylchlorid wahrscheinlich aus Molybdänpentachlorid in derselben Weise dargestellt werden kann wie Phosphoroxychlorid aus Phosphorpentachlorid, habe ich vorläufig unterlassen die Versuchen weiter auszudehnen und dies um so eher als in indirekter Weise die Sache sicher erledigt werden kann. Das erhaltene mischfarbige Chlorid habe ich in conc. Salzsäure gelöst, etwa die berechnete Menge Salmiak zugesetzt, das ganze in einem Fraktionierkolben concentrirt und das rückständige mit

¹⁾ J. pr. Chem. 71. 460.

Chlorwasserstoff gesättigt. Es wurde in dieser Weise fast das ganze in das grasgrüne Ammoniummolybdänylchlorid übergeführt. Hierdurch ist gezeigt, dass das grüne Chlorid nicht, wie PÜTTBACH angiebt, die Formel MoOCl_4 , sondern MoOCl_3 hat.

Die Untersuchung wird fortgesetzt.

Beiträge zur Kenntniss der Molybdänsäure.

Von PETER KLASON.

(Mitgetheilt am 9 Januar 1901.)

Die molybdänsauren Salze haben bekanntlich eine so verwickelte Zusammensetzung, dass es nicht möglich ist ein Gesetz dafür herauszufinden, da die Säure darin in fast jeder Zahl zwischen 1 bis 12 vorkommt.

Gewöhnliches Ammoniummolybdat.

Ich habe zunächst dieses Salz etwas näher untersucht. Die anfangs von SVANBERG und STRUVE angenommene Formel war $4\text{NH}_3 \cdot 5\text{MoO}_3 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$. Die nun allgemein angenommene $6\text{NH}_3 \cdot 7\text{MoO}_2 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$, rührt von DELAFONTAINE her. Es giebt auch analoge Kali- und Natronsalze. Könnte man nun Klarheit in der Auffassung des Ammoniumsalzes erhalten, wäre wahrscheinlich auch ein wichtiger Ausgangspunkt gewonnen für die Deutung auch anderer molybdänsaure Salze.

Anfangs muss hervorgehoben werden, dass DELAFONTAINE's Formel durch nichts begründet ist, denn die Formel $5\text{NH}_3 \cdot 6\text{MoO}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ giebt fast dieselbe procentische Zusammensetzung wie DELAFONTAINE's.

$6\text{NH}_3 \cdot 7\text{MoO}_3 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$	Ber. $\text{NH}_3 = 8,25 \%$	$\text{MoO}_3 = 81,55 \%$
$5\text{NH}_3 \cdot 6\text{MoO}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$	Ber. $\text{NH}_3 = 8,04 \%$	$\text{MoO}_3 = 81,74 \%$
von mir gefunden	$\text{NH}_3 = 8,05 \%$	$\text{MoO}_3 = 81,54 \%$

Da bei genügender Menge Substans die Ammoniakbestimmung mit Sicherheit auf $\frac{1}{10}$ % genau ausfällt, habe ich für obige Controllanalyse das reine Salz aus dem käuflichen in folgender Weise dargestellt. Es wird durch Verwendung von überschüssigem Salz eine gesättigte Lösung dargestellt und diese bei 20—25° zur Krystallisation gebracht. Das Salz krystallisirt dann in schönen wasserhellen Krystallen. Als Mittel von drei Ammoniakbestimmungen, welche in den Grenzen von 0,06 % variirten, wurde wie oben angegeben 8,05 % NH_3 erhalten. Von analytischem Standpunkte ist somit die letzte Formel eben so befriedigend wie DELAFONTAINE's und ist schon deswegen als einfacherer vorzuziehen.

Das Salz verliert nichts an Gewicht über Phosphorsäureanhydrid. Ein Th. Salz löst sich bei gewöhnlicher Temperatur in 2,4 Th. Wasser.

Mol.-Gew.-bestimmungen des Salzes in wässriger Lösung.

	Substans g.	Lös.-Mittel g.	Siedepunkts- resp. Gefr. punkts änder.	Scheinb. Mol.-Gew.	N:r.
Sied.p. Methode	4,4281	18,9	0,35	348	1
nach	4,5445	18,9	0°,33	379	2
LANDSBERGER.	5,4519	16,9	0°,42	399	3
Gefriermethode	3,5846	23,22	0°,625	452	4
	4,1041	23,91	0°,665	472	5.

Die wässrige Lösung des Salzes reagirt sauer. Das aeqv. elektrische Leitungsvermögen wurde bei der Lösung N:o 5 bestimmt. Nimmt man an, dass ein Aeq. = $\frac{1}{2}\text{NH}_4\text{HMoO}_4$, findet man das specifische Leitungsvermögen = 21 bei gewöhnlicher Temperatur und in reciprokem Ohm als Einheit ausgedrückt. Der Grenzwert für das aeqv. Leitungsvermögen bei wachsender Verdünnung dürfte auf etwa 250 geschätzt werden können, unter Voraussetzung, dass das Salz in die Ionen NH_4^+ , H^+ und MoO_4^- gespalten ist. In diesem Falle wird der Dissociationsgrad in obengenannter Lösung $\alpha = \frac{21}{250} = 0,084$.

Der Koëfficient i , welcher das Verhältniss zwischen der wahren Gefrierpunktsänderung und derjenigen, welche man erhalten würde, wenn keine Dissociation eingetreten wäre, wird somit, da n oder der Anzahl Ionen im Mol. = 3

$$i = 1 + (n - 1)\alpha = 1 + 2 \cdot 0,084 = 1,17.$$

Wird der Mittelwerth der bei der Gefriermethode erhaltenen Zahlen genommen, so ist das Mol.-Gew. $1,17 \times 462 = 541$. Das Mol.-Gew. von $6\text{NH}_3 \cdot 7\text{MoO}_3 \cdot 7\text{H}_2\text{O} = 1236 = 2 \times 618 = 3 \times 412$. Das Mol.-Gew. von $5\text{NH}_3 \cdot 6\text{MoO}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O} = 1057 = 2 \times 528,5$.

Das Salz hat daher offenbar die halbe Mol.-Gew. von $5\text{NH}_3 \cdot 6\text{MoO}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ oder mit anderen Worten es ist ein Doppelsalz von Tri- und Diammoniumtrimolybdat $(\text{NH}_4)_3\text{H}_3 \cdot \text{Mo}_3\text{O}_{12} + (\text{NH}_4)_2\text{H}_4 \cdot \text{Mo}_3\text{O}_{12}$, welches bei der Auflösung in seine Componenten zerfällt.

Die angeführte Berechnung des Dissociationsgrades ist zwar nicht exakt und daher das berechnete Mol.-Gew. es auch nicht. Es ist aber offenbar keine andere Möglichkeit vor Handen als die oben entwickelte.

Diese Auffassung des Salzes ist nicht nur in völliger Übereinstimmung mit den analytischen und kryoskopischen Verhältnissen, sondern die chemischen Eigenschaften des Salzes gerade nötigen dazu.

Unter Voraussetzung, dass die neue Formel die richtige wäre, darf man erwarten, dass durch Zusatz von genau berechneten Mengen Salzsäure folgende Salze erhalten werden können: Diammoniumtrimolybdat, $(\text{NH}_4)_2\text{H}_4 \cdot \text{Mo}_3\text{O}_{12}$ und Monammoniumtrimolybdat, $\text{NH}_4\text{H}_6 \cdot \text{Mo}_3\text{O}_{12}$. Dieses ist auch in der That der Fall. Auch darf man annehmen, dass durch geeigneten Zusatz von Ammoniak Triammoniumtrimolybdat $(\text{NH}_4)_3\text{H}_3 \cdot \text{Mo}_3\text{O}_{12}$ erhalten werden kann, was auch der Wirklichkeit entspricht.

Triammoniumtrimolybdat, $(\text{NH}_4)_3\text{H}_3 \cdot \text{Mo}_3\text{O}_{12} + 4\text{H}_2\text{O}$.

Dieses Salz ist von RAMMELSBERG¹⁾ dargestellt; ihm wird aber die Formel $3(\text{NH}_4)_2\text{O} + 7\text{MoO}_3 + 12\text{H}_2\text{O}$ zugetheilt.

¹⁾ Pogg. Annal. 127. 298.

Vergleichen wir hier die berechneten und gefundenen Mengen :

$3(\text{NH}_4)_2\text{O} \cdot 7\text{MoO}_3 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$	ber. NH_3	= 7,39 %	MoO_3	= 73,04 %
$(\text{NH}_4)_3\text{H}_3 \cdot \text{Mo}_3\text{O}_{12} + 4\text{H}_2\text{O}$	»	= 8,37 »	»	= 70,93 »
von RAMMELSBURG gefunden	»	= 8,01 »	»	= 71,28 »

Wie man sieht, stehen die von RAMMELSBURG gefundenen Zahlen in schönster Übereinstimmung mit der Formel $(\text{NH}_4)_3\text{H}_3 \cdot \text{Mo}_3\text{O}_{12} + 4\text{H}_2\text{O}$ sind aber mit seiner eigenen unvereinbar.

Diammoniumtrimolybdat, $(\text{NH}_4)_2\text{H}_4 \cdot \text{Mo}_3\text{O}_{12} + \text{H}_2\text{O}$.

Ich erinnere daran, dass es ein charakteristisches Kaliumsalz $\text{K}_2\text{H}_4 \cdot \text{Mo}_3\text{O}_{12} + \text{H}_2\text{O}$ gibt, welches direkt aus der Lösung desjenigen Kalisalzes erhalten werden kann, welches dem gewöhnlichen Ammoniumsalz entspricht. Es ist auch von BERLIN ²⁾ Diammoniumtrimolybdat direkt aus der Lösung des gewöhnlichen Ammoniumsalzes erhalten worden. Setzt man zu dem gewöhnlichen Ammoniumsalz in nicht zu verdünnter Lösung die genau berechnete Menge *n*-Salzsäure, wobei die Lösung erst im Eisschrank gekühlt wird, so krystallisirt obengenanntes Salz in 24 St. grösstentheils als körnige Krystallkrusten und zwar geht die ganze Menge Molybdänsäure in dieses Salz über. Es ist in kaltem Wasser sehr schwerlöslich, leicht löslich in heissem, krystallisirt aber nur langsam wieder aus und dann mehr unrein. Es ist zwar nicht völlig analysenrein. Das es aber das völlige Analogon des Kaliumtrimolybdates ist kann keinem Zweifel unterliegen.

Analyse:

Ber.	NH_3	= 6,32 %	MoO_3	= 80,30 %
Gef.	»	= 6,10 »	»	= 82,01 »

Ueber Phosphorsäureanhydrid verliert das Salz schnell ein Mol. Wasser, darnach langsam etwa $\frac{1}{2}$ Mol.

¹⁾ J. pr. Chem. 49. 445.

Monammoniumtrimolybdat, $\text{NH}_4\text{H}_3 \cdot \text{Mo}_3\text{O}_{12}$.

Eine verdünnte Lösung des gewöhnlichen Ammoniumsalzes wird bei 0° unter kräftigem Umrühren mit der berechneten Menge *n*-Salzsäure in dünnem Strahl versetzt. Es fällt unmittelbar ein Magma von feinen Nadeln aus. In kaltem Wasser fast unlöslich wird es leicht von heissem Wasser aufgenommen, wird aber dabei theilweise zersetzt.

Analyse:

Ber. $\text{NH}_3 = 3,38 \%$, $\text{MoO}_3 = 85,88 \%$

Gef. > = 2,92 > > = 85,76 >

Ueber Phosphorsäureanhydrid verliert das Salz schnell 1 Mol., darnach langsam den grössten Theil eines zweiten Mol. Wasser.

BERLIN (loc. cit) hat ein Salz dargestellt, welches theilweise aus diesem Salz bestehen kann. Auf Grund unvollständiger Analyse (nur Molybdänbestimmung) ist dem Salz die Formel $2\text{NH}_3 + 4\text{MoO}_3 + 3\text{H}_2\text{O}$ zugetheilt worden.

Die käufl. Molybdänsäure ist *Monammoniumanhydrotrimolybdat*, $\text{NH}_3 \cdot 3\text{MoO}_3 \cdot \frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$. Sie hat wenigstens fast genau die Zusammensetzung einer solchen Verbindung. Wahrscheinlich wird sie erhalten durch Uebersättigung des Ammoniumsalzes mit Salpetersäure, Abdampfen bis zur Trockniss und Auslaugen.

Analyse:

Ber. $\text{NH}_3 = 3,70 \%$, $\text{MoO}_3 = 94,30 \%$, $\text{H}_2\text{O} = 1,96 \%$

Gef. > = 3,58 > > = 94,10 > > = 2,33 >

**Doppelsalz zwischen Di- und Monammoniumtrimolybdat,
 $3\text{NH}_3 \cdot 6\text{MoO}_3 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$.**

Da das gewöhnliche Ammoniumsalz sich als Doppelsalz zwischen Tri- und Diammoniumtrimolybdat erwies, lag es nahe auch ein Doppelsalz zwischen Di- und Monammoniumtrimolybdat, zu erwarten. Die im Eisachrank gekühlte Lösung des gewöhn-

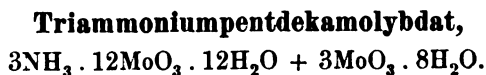
lichen Ammoniumsalzes wurde mit genau der berechnete Menge *n*-Salzsäure versetzt. Es trat kein Niederschlag auf, nur eine Trübung, die nach Verlauf von etwa 12 St. abfiltrirt wurde. Es fing nun eine wochenlange Krystallisation von wasserklaren wohl ausgebildeten mehrflächigen Krystallindividuen an, und es wurde nur diese Verbindung erhalten. Man erhält es auch durch Mischung von Lösungen gleicher Molekülen Di- und Monoammoniumtrimolybdate, wobei es allmählich auskrystallisirt. Das Salz ist in kaltem Wasser sehr schwerlöslich, in warmem viel leichter, wird aber dabei theilweise zersetzt. Eine Molekulargewichtsbestimmung konnte deswegen nicht ausgeführt werden. Eine solche ist doch nothwendig, da das einfachere Salz $\text{NH}_4\text{H}_2\text{MoO}_4$ dieselbe procentische Zusammensetzung hat. Durch einen Zufall lässt sich doch das Mol.-Gew. aus der Analyse herausfinden. Das Salz hat nämlich genau ein Mol. Wasser weniger als das Doppelsalz haben sollte und hat demnach 5 Mol. anstatt 6 Mol. Wasser.

Analyse:

Ber.	NH_3	= 5,07 %	MoO_3	= 85,95 %
Gef.		= 4,98		= 86,51

Verliert über Phosphorsäureanhydrid langsam fast 2 Mol. Wasser.

Ein *Dimolybdat*, $2\text{NH}_3 \cdot 2\text{MoO}_3 \cdot \text{H}_2\text{O}$, haben SVANBERG und STRUVE durch Verdunsten der Mutterlange des gewöhnlichen Ammoniumsalzes als weisses Krystallpulver erhalten. Wie ich aber gefunden habe, kann in dieser Weise keine Verbindung mit constanter Zusammensetzung erhalten werden. Die Formel ist ohne dessen analytisch nicht genügend begründet, da wohl eine Molybdän- aber keine Ammoniakbestimmung vorliegt.



Die bekannte Phosphormolybdänsäure hält nicht wie DEBRAY angegeben hat 20, auch nicht nach RAMMELSBURG 22 sondern

wie HUNDESHAGEN ¹⁾ ausführlich darthut 24 Mol. Molybdänsäure auf 1 Mol. Phosphorsäureanhydrid. Es liess sich nun erwarten, dass das gelbe Ammoniumphosphomolybdat einfach ein Condensationsprodukt wäre zwischen 1 Mol. Phosphorsäure und 1 Mol. Triammoniumdodekamolybdat. Vielleicht konnte dieses letzte Salz für sich dargestellt werden. Um dieses zu prüfen wurden zwei Lösungen von dem gewöhnlichen Ammoniumsalz dargestellt. Die eine Lösung wurde mit etwas mehr als der berechneten Menge *n*-Salzsäure, die andere mit doppelt so viel von derselben Säure versetzt. Es wurde in beiden Fällen ein weisser Niederschlag von sehr kleinen mikroskopischen sechseckigen Prismen erhalten. Lufttrocken hatte der Substanz in beiden Fällen genau dieselbe Zusammensetzung. Die Analyse und namentlich die Eigenschaften dieses Salzes zeigt, dass hier eine molekuläre Verbindung zwischen 1 Mol. Triammoniumdodekamolybdat und 1 Mol. Trimolybdänsäure vorliegt.

Analyse:

Ber. $\text{NH}_3 = 1,98 \%$, $\text{MoO}_3 = 84,01 \%$

Gef. $\text{ } = 2,03 \text{ } \text{ } = 83,71 \%$

Das Salz löst sich ziemlich leicht in siedendem Wasser und krystallisirt, aber sehr langsam, wieder unverändert aus, wenn die Lösung bei gewöhnlicher Temperatur verdunstet wird. Die Lösung muss aber in der Weise vorsich gehen, dass das Salz zum fast siedenden Wasser gesetzt wird, wo es beim Schütteln sich momentan löst. Erwärmt man aber allmählig das Wasser mit dem Salz, so geht es in ein gänzlich unlösliches Anhydrid über: $3\text{NH}_3 \cdot 15\text{MoO}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$.

Analyse:

Ber. $\text{NH}_3 = 2,19 \%$, $\text{MoO}_3 = 93,14 \%$

Gef. $\text{ } = 2,08 \text{ } \text{ } = 92,66 \%$

Dasselbe unlösliche Salz entsteht, wenn das lösliche Salz über Phosphorsäureanhydrid bei gewöhnlicher Temperatur getrocknet wird.

¹⁾ Zeitschrift anal. Chemie 1889 s. 141.

Triammoniumdodekamolybdat, $3\text{NH}_3 \cdot 12\text{MoO}_3 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$.

Dieses Salz wird erhalten, wenn eine heisse Lösung des vorigen Salzes mit etwas Salmiaklösung versetzt wird. Beim Abkühlen der Lösung krystallisirt dieses Salz in schönen, glänzenden, besenförmig angeordneten Prismen.

Analysen:

Ber. $\text{NH}_3 = 2,56 \%$, $\text{MoO}_3 = 86,61 \%$

Gef. $\text{ } = 2,63 \text{ } \text{ } = 86,22 \text{ } \text{ }$

In diesem Salz haben wir die Muttersubstanz des Ammoniumphosphormolybdates und verdient es deswegen eine besondere und genaue Untersuchung. Die proc. Zusammensetzung unterscheidet sich nur wenig von derjenigen des Monoammoniumtrimolybdates. Das Salz ist aber gänzlich davon verschieden. Das Monammoniumtrimolybdat condensirt sich nicht mit Phosphorsäure zum gelben Molybdat, wird auch nicht im Lösung durch Salmiak schwerlöslich gemacht.

Es scheint aus der Untersuchung als wahrscheinlich hervorzugehen, dass die sauren Molybdate wie die Molybdänsäure selbst entweder Trimolybdate oder einfache Multipula davon sind. Merkwürdig ist es, dass wir in dem Molybdänchlorur, Mo_3Cl_9 , auch drei Atome Molybdän vorfinden.

G. A. WIDSTRÖM hat die kryoskopischen und elektrischen Versuchen ausgeführt, wofür ich ihm hier danke. Die Untersuchung wird fortgesetzt.

Ueber Molybdänblau.

Von PETER KLASON.

(Mitgeteilt am 9 Januar 1901.)

Indem ich über die ältere Litteratur des Molybdänblaus auf GMELIN-KRAUT's Handbuch verweise, möchte ich hier nur erwähnen, dass Molybdänblau nach BERZELIUS als molybdänsaures Molybdänbioxyd aufzufassen ist, welches in wasserfreier Form nach die Formel $\text{MoO}_2 \cdot 4\text{MoO}_3$ zusammengesetzt ist; auf nassem Wege dargestellt kommen noch dazu $6\text{H}_2\text{O}$. RAMMELSBERG giebt später die Formel $\text{MoO}_2 \cdot \text{MoO}_3 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$. Oftmals, zuletzt bei MARLETTI ¹⁾, auch bei ROGERS und MITCHELL, ²⁾ findet man die Formel $\text{Mo}_3\text{O}_9 + 5\text{H}_2\text{O}$. In neuester Zeit hat GUICHARD ³⁾ das blaue Oxyd ausführlich untersucht. Er bestätigt die Formel von BERZELIUS. Aus verschiedenen Gründen kann man aber sagen, dass man den Kern des Pudels nicht gefunden. Erstens enthält das Blau kein Bioxyd sondern Semipentoxyd, zweitens ist es kein Molybdat eines Molybdänoxydes sondern gehört den s. g. complexen Säuren resp. Salzen an und drittens giebt es mehrere Arten von Molybdänblau.

Dass Molybdänblau Molybdänsemipentoxyd enthält, findet man leicht und rein syntetisch, indem Lösungen von Ammoniummolybdänylechlorid und molybdänsaurem Ammoniak vermischt

¹⁾ Z. unorg. Ch. 19. 391.

²⁾ Chem. Centr. Bl. 1900. II. 366.

³⁾ C. r. d. l'Acad. des sciences.

werden, wobei grosse Niederschläge von Molybdänblau entstehen. Diese Niederschläge sind Ammoniumsalze von den Phosphormolybdänsäuren analoge Molybdänomolybdänsäuren. Ich werde aber hier auf diese Verbindungen nicht näher eingehen.

Das von mir untersuchte Molybdänblau habe ich ausschliesslich durch Autoxydation einer verdünnten Lösung des Ammoniummolybdänylchlorides dargestellt. Man wird sich erinnern, dass dieses Salz nicht an sich autoxydabel ist, eine Eigenschaft die ihm erst im hydrolysirten Zustande zukommt. Man kann durch Autoxydation wenigstens zwei ganz verschiedene Verbindungen erhalten, eine in Wasser löslich, die andere unlöslich. Es scheint, dass dabei in erster Hand die wasserlösliche Verbindung entsteht, welcher allmählig durch weitere Oxydation in die unlösliche übergeht.

Unlösliches Molybdänblau, $\text{Mo}_2\text{O}_3 + 24\text{MoO}_3 + 24\text{H}_2\text{O}$.

Diese Verbindung wurde als der fast ausschliessliche Produkt erhalten, wenn 150 g. Ammoniummolybdänylchlorid in etwa 2,5 l. Wasser gelöst den ganzen Sommer der Luft ausgesetzt wurde.

Analyse:

Ber.	Mo = 60,00 %	Oxyd.	Sauerstoff = 0,39 %	H ₂ O = 10,39 %
Gef.	» = 60,11 »	»	= 0,37 »	» = 9,59 »

Zur Analyse wurde die Verbindung über Phosphorpentoxyd getrocknet. Wie ich später gefunden habe, wäre es besser gewesen, wenn die Verbindung lufttrocken analysirt worden wäre. Bruchtheile von Mol. Wasser können nämlich in den molybdänsauren Salzen über Phosphorpentoxyd fortgehen, während sie an der Luft im allgemeinen nicht verwittern. Es ist demnach wahrscheinlich, dass die Verbindung mehr Wasser hat als die Formel angiebt.

Es ist offenbar, dass wir in dem unlöslichen Molybdänblau eine analoge Verbindung zur Phosphormolybdänsäure haben.

Nach den ausführlichen Untersuchungen von HUNDESHAGEN ¹⁾ kann kein Zweifel mehr vorliegen. Sie hält auf 1 Mol. P_2O_3 24 Mol. MoO_3 . Dieses stimmt auch mit meinen Untersuchungen. Da, wie ich gezeigt habe, Molybdänsäure in die sauren Salzen wahrscheinlich in Multipula von 3 eingeht, hat man nur zwischen 21 und 24 Mol. Molybdänsäure zu wählen.

Da das Molybdänblau in schwefelsaurer Lösung mit $\frac{1}{100}$ n. Permanganat sehr scharf titriert werden kann, sollte bei 21 Mol. Molybdänsäure 0,43 % oxydirender Sauerstoff erhalten werden. Da nun 0,37 % erhalten wurden oder etwa 15 % weniger, kann dieser Differenz schwierig auf einen Fehler beruhen.

Wasserlösliches Molybdänblau, $Mo_2O_3 + 18MoO_3 + 21H_2O$.

Diese Verbindung wurde erhalten, als Ammoniummolybdänylchlorid in einer grossen Menge Wasser eine kürzere Zeit der Luft ausgesetzt wurde. Das Blau wurde in Wasser gelöst und dadurch von etwas unlöslichem Blau getrennt und mit Salmiak gefällt. In Wasser ist es leichtlöslich mit sehr tiefer Farbe, in salmiakhaltigem Wasser ist es aber absolut unlöslich. Auch dieser Farbstoff wurde vor der Analyse über Phosphorpentoxyd getrocknet. Der wahre Wassergehalt ist daher wahrscheinlich etwas höher.

Analyse:

Ber.	Mo = 59,27 %	oxyd. Sauerstoff = 0,49 %	H_2O = 11,66 %
Gef.	» = 58,97 »	» = 0,47 »	» = 12,58 »

Dass Phosphorsäure und Arsensäure mit Molybdänsäure complexe Säuren bilden ist schon längst bekannt. Namentlich durch die Untersuchungen von GIBBS ²⁾ wissen wir, dass auch Antimon- und Vanadinsäure derselben Regel folgen. Die vor-

¹⁾ Zeitschrift anal. Chemie 1889 s. 141.

²⁾ Ber. Ber. Chem. Ges. 1883 s. 779.

liegende Untersuchung zeigt, dass ein Säurecharakter des Pentoxydes für solche Verbindungen nicht nothwendig ist, und dass in Folge dessen in den Salzen der positive Complex ausschliesslich an der Molybdänsäure haften muss.

Stockholm, Tekniska Högskolan, Dec. 1900.

Ueber die Wärmeabsorption durch Kohlensäure und ihren Einfluss auf die Temperatur der Erdoberfläche.

VON SVANTE ARRHENIUS.

(Mitgeteilt d. 9 Januar 1901 durch R. RUBENSON.)

Einleitung. In einer Abhandlung vom Jahre 1896 habe ich versucht den Einfluss zu berechnen, welchen eine Änderung im Kohlensäuregehalt der Luft auf die Temperatur der Erdoberfläche ausüben würde.¹⁾ Ich ging dabei von Anschauungen aus, die schon von FOURIER²⁾ und POUILLET³⁾ und besonders von TYNDALL⁴⁾ hervorgehoben worden waren. Ausserdem benutzte ich aber ein neues Princip, welches darauf beruht, dass die Strahlung der Gase und speziell der Kohlensäure, rapid mit der Temperatur steigt. Je niedrigere Temperatur also die strahlenden Kohlensäureschichten besitzen, desto kräftiger ist ihr Wärmeschutz für die Erde.

Seit dem Erscheinen der genannten Abhandlung sind unsere Kenntnisse von mehreren in die Berechnung eingehenden Faktoren bedeutend erweitert worden, so dass eine Revision der früheren Rechnungen wohl wünschenswert erscheint. Teils sind

¹⁾ ARRHENIUS: Phil. Mag. (5), 41, 237. April 1896. Bihang till K. V. A:s Handlingar. Bd. 22. Afd. 1. N:o 1. 1896.

²⁾ FOURIER: Mém. de l'Ac. Roy. des Sc. de l'Inst. de France. T. 7. 1827.

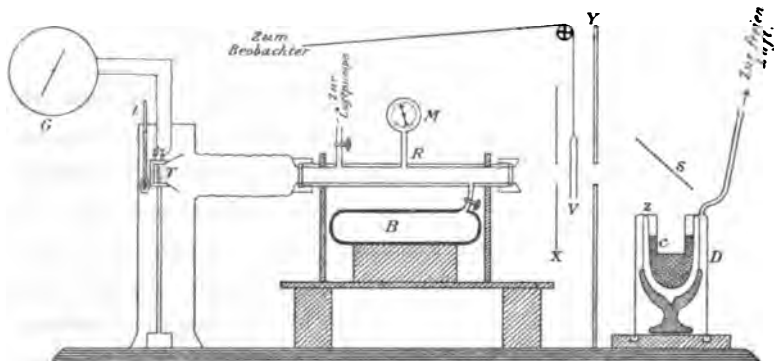
³⁾ POUILLET: Comptes Rendus. T. 7. p. 41. 1838.

⁴⁾ TYNDALL: Heat as a mode of motion. 2. éd. p. 405 (Lond. 1865). Contributions to molecular physics 117, 137. London 1872.

neue Daten und Bearbeitungen betreffs der Abnahme der Lufttemperatur in vertikaler Richtung erscheinen, ¹⁾ teils wurde das Gebiet betreffs der Strahlung der warmen Körper in der Zwischenzeit vollkommen umgearbeitet. ²⁾ Aber auch die Daten betreffs der Absorption der Kohlensäure (und des Wasserdampfes), welche ich aus Ziffern von LANGLEY berechnet hatte, wurden durch neuere Arbeiten ³⁾ als recht mangelhaft erwiesen, so dass ein Bedürfniss entstand durch neue Versuche diese Daten zu ersetzen.

Versuchsanordnung. Ich entschloss mich also die betreffenden Daten zu beschaffen. Zwei Versuchsreihen von TYNDALL ⁴⁾ betreffs der Wärmeabsorption der Kohlensäure liegen wohl vor, die-

Fig. 1.



selben ebenso wie spätere vereinzelte Versuche behandeln aber nur Fälle, in welchen die durchstrahlte Kohlensäuremenge bedeutend geringer als diejenige der Atmosphäre war. Die Kohlensäuremenge in der Atmosphäre entspricht sehr nahe einer Gasäule von 76 cm Druck und 250 cm Länge bei 15° C. Es wäre demnach erwünscht bei diesen Versuchen Kohlensäuremassen von

¹⁾ WILH. v. BEZOLD: Theor. Betr. üb. d. Ergebnisse d. wiss. Luftfahrten. S. 18. Braunschweig 1900.

²⁾ WIEN: Wied. Ann. 58. 662. 1896; PLANCK: Ber. d. d. phys. Ges. II. 19. Okt. 1900.

³⁾ RUBENS und ASCHKINASS: Wied. Ann. 64, 584, 1898; KURLBAUM: Wied. Ann. 61, 417, 1897.

⁴⁾ TYNDALL: Contributions to mol. physics. p. 37.

dieser Grössenordnung oder noch etwas grössere den Wärmestrahlen in den Weg zu stellen. Da genügend empfindliche Instrumente zu solchen Messungen mir nicht in Stockholm zugänglich waren, so habe ich die betreffenden Versuche im Institut von Hrn. Prof. H. RUBENS in Charlottenburg ausgeführt, welcher mit seinen reichen Erfahrungen und seinen grossen instrumentellen Hilfsmitteln mich in der vorkommendsten Weise unterstützte, wofür ich ihm hier meinen verbindlichsten Dank sage.

Nach Vorschlag von Prof. RUBENS wurde folgende Versuchsanordnung getroffen (Fig. 1). Die Kohlensäure wurde in einem starken eisernen Rohr *R* von 50 mm. äusserem, 33 mm. innerem Durchmesser eingeschlossen. Die innere Rohrwand war stark oxydiert, so dass sie keine Wärmestrahlen (merklich) reflektierte. Auf die Enden des Rohres können starke Kappen von Eisen geschraubt werden, welche eine Bohrung von 32 mm besitzen. Durch diese Kappen und zwischengelegte gefettete Lederringe wurden Messingsringe, die in der Mitte Steinsalzplatten von 10 mm. Dicke und 30 mm Durchmesser eingekittet hielten, gegen die gut geschliffenen Rohrenden gepresst. Die Steinsalzplatten waren zum besseren Aushalten des häufig hohen Druckes im Rohr schwach konisch geschliffen. Das Rohr war mit drei schwächeren Seitenröhren verbunden, wovon das eine zu einem bis 20 Atm. anzeigenden Manometer *M*, das zweite zu einer mit Hahn versehenen Kohlensäurebombe *B* und das dritte zu einer Luftpumpe und einem bis zu 80 cm anzeigenden Quecksilbermanometer führte. Alle diese Röhrenleitungen konnten durch Hähne abgesperrt werden. Die grösste Schwierigkeit war die Röhre einigermassen gasdicht zu bekommen, welches jedoch zuletzt durch sorgfältige Auswahl der Hähne und der Packungen gelang. Als Wärme- bzw. Kälte-Quelle diente ein LESLIE'scher Würfel von 12,4 cm Seite, der mit siedendem Wasser gefüllt und mit Rückflüsskühler versehen war, oder ein DEWAR'sches Gefäss *D* von 8,2 cm innerem Durchmesser und 10 cm Tiefe, welches mit fester Kohlensäure und Äthyläther bis etwa zur Hälfte gefüllt wurde. In dieses Gefäss wurde ein »schwarzer Körper« von folgender Art

eingesetzt. Ein Cylinder aus dünnem Schablonenblech von 7 cm Höhe und 5,2 cm Durchmesser war unten mit einem Boden aus gleichem Blech versehen und oben an einem Ring z aus Messingblech von 11 cm äusserem und 5,2 cm innerem Durchmesser angelöthet. An dem äusseren Rande dieses Ringes war ein anderer Blechcylinder von 17 cm Höhe angelöthet, welcher unten in einer Quecksilberrinne auf einem Holzklotz stand. Der innere Cylinder, c , dessen Innenseite sorgfältig geschwärzt war, wurde in die Kohlensäure-Äther-Mischung hineingestellt, wodurch eine nahezu schwarze Kältequelle von -80° C. im Boden und den Innenseiten des inneren Cylinders entstand. Die ziemlich grossen Mengen von gasförmiger Kohlensäure, welche aus der Kältemischung entwichen, wurden durch ein am Ringe z angelöthetes Röhrenstück in eine Leitung geführt, deren anderes Ende in die Aussenluft mündete. Bei den Versuchen setzte sich eine dicke Schicht von Reif am Ring z ab, dadurch wurde der eigentliche strahlende Körper so gut wie vollständig gegen Wasserkondensation geschützt. Offenbar blieb in dem inneren Cylinder eine kalte Luftsäule so gut wie feststehend und Wasserdampf, welcher dahin aus der Umgebung zu diffundieren strebte, wurde beinahe vollkommen bei der Passage in der Nähe des Ringes z niedergeschlagen.

Der Mittelpunkt des Bodens des Cylinders wurde unter einen 14,5 cm höher gelegenen Spiegel aus Silber gestellt, der 45° gegen dem Horizont geneigt und so aufgestellt war, dass ein Beobachter, welcher, sein Auge bei T haltend, längs der Achse der Röhre R schaute, den Mittelpunkt des Bodens von c in dieser Achse fallen sah. Das Stück der Röhrenachse zwischen der Steinsalzplatte und dem Silberspiegel betrug 12 cm. In der Entfernung von 5 cm. von der Steinsalzplatte befand sich ein beweglicher Doppelschirm V , und weitere 1,5 bzw. 3 cm. davon zwei Blenden X , Y , welche periferische vom Ringe z ausgehende Strahlen abhalten sollten.

Vor der anderen Steinsalzplatte stand in einer Entfernung von 26,3 cm. eine RUBENS'sche Thermosäule, T , welche durch

Hüllen aus Holz und Papier gegen Luftströmungen geschützt wurde. Von dieser Säule leiteten Drähte zu einem DU BOIS-RUBENS'schen Panzergalvanometer G , das mit einem 127 cm entfernten Fernrohr und Skala abgelesen wurde. Neben T hang ein Thermometer, t .

Bei der Verwendung des LESLIE'schen Würfels als Wärmequelle wurde derselbe 17 cm vor der Steinsalzplatte aufgestellt, nachdem der Silberspiegel entfernt war.

Die Empfindlichkeit des Galvanometers war eine solche, dass bei Anbringung von 10^{-6} Volt in der Thermosäule ein Ausschlag von 60 Skalenteilen verursacht wurde.

Der bewegliche Doppelschirm konnte von dem Beobachter des Galvanometers gehoben oder gesenkt werden. Wurde dann beispielsweise das Rohr einmal mit Luft gefüllt, und der Ausschlag bei Heben des Schirmes V gleich a annotiert, nachher der entsprechende Ausschlag b , wenn das Rohr mit Kohlensäure, und zuletzt der Ausschlag a_1 , wenn er wiederum mit Luft gefüllt war, so war die Absorption A (in Prozent):

$$A = 100 \frac{a + a_1 - 2b}{a + a_1}.$$

Es wurden keine anderen Beobachtungsreihen mitgenommen, als solche wo die Werte a und a_1 sehr nahe (innerhalb etwa drei Proz.) untereinander übereinstimmten. Die Ausschläge a waren zufolge von Erschütterungen und magnetischen Störungen recht variabel, so dass im allgemeinen bei jeder Beobachtung sieben bis acht Einzelbeobachtungen zu einem Mittelwert zusammengenommen werden mussten. Die durch Kombination von mehreren Mittelwerten erhaltenen Werte der Absorption scheinen nach den unten ausgeführten Berechnungen um weniger als ein Prozent von dem wirklichen Wert abzuweichen.

Die beobachteten Werte. Wie oben angedeutet, war es erwünscht die Kohlensäuremengen so gross zu nehmen, dass sie einer durchstrahlten Länge von 250 cm bei Atmosphärendruck entsprechen würden, was einem Druck von 5 Atmosphären in der Versuchsrohre R gleich kommt.

Ich ging auch zu Drucken die bei den Versuchen mit dem LESLIE'schen Würfel 6 ($l = 300$ cm), bei denjenigen mit dem DEWAR'schen Gefäß 7,1 ($l = 355$ cm) Atmosphären erreichten. Zuerst wurde die Absorption einer 50 cm langen Kohlensäure-säule beobachtet, und dann die Absorption bei grösseren Kohlen-säuremengen mit derjenigen bei 50 cm Länge verglichen. Da-nach wurden diese letzteren Werte mit Hülfe des erstgenannten in Prozent umgerechnet.

Die so erhaltenen direkt beobachteten Werte der Absorption in Prozent von der durch das luftgefüllte Rohr durchgelassenen Wärmemenge sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Strahlung vom LESLIE'schen Würfel.		Strahlung vom DEWAR'schen Gefäß.	
Länge (l) der Kohlensäuresäule reduziert zu Atm.-Druck.	Absorption in Prozent A.	Länge (l) der Kohlensäuresäule red. zu Atm.-Druck.	Absorption in Prozent A.
50 cm.	10,4	50 cm.	15,0
140 „	14,3	130 „	19,4
155 „	15,0	220 „	22,3
170 „	15,8	260 „	23,9
200 „	15,9	355 „	26,8.
275 „	18,1		
300 „	18,3		

Die Zimmertemperatur (der Thermosäule) war 15° C.

Bei der Betrachtung dieser Ziffern fällt es auf, dass die Ab-sorption in dem letzterwähnten Fall in einem nahezu konstanten Verhältniss (etwa 1,4) grösser sind als in dem zuerst genannten. Interpoliert man aus den ersten Ziffern Werte der Absorption für l -Werte, die der zweiten Tabelle entsprechen, so erhält man folgende Ziffern.

l	A_2	A_1	$A_2 : A_1$	$\log \left(1 - \frac{A_2}{100} \right)$	$\log \left(1 - \frac{A_1}{100} \right)$	Quotient
50	15,0	10,4	1,44	— 0,0706	— 0,0477	1,48
130	19,4	13,9	1,40	— 0,0937	— 0,0650	1,44
220	22,3	16,4	1,36	— 0,1096	— 0,0778	1,41
260	23,9	17,6	1,36	— 0,1186	— 0,0841	1,41
(355	26,8	18,8	1,43	— 0,1355	— 0,0904	1,50).

Da bei der Berechnung der Absorptionswerte es aus theoretischen Gründen richtiger erscheint die Logarithmen $\log \left(1 - \frac{A}{100}\right)$ zu betrachten, so habe ich auch die betreffenden Werte dieser Grösse berechnet. Der eingeklammerte Wert bei $l = 355$ beruht auf einer mässigen Extrapolation, er ist angeführt um zu zeigen, dass der zuletzt tabellierte Quotient keine merkliche Tendenz zum Sinken zeigt, was man vielleicht aus den vorhingehenden Ziffern zu schliessen geneigt wäre. Da eine Einheit in der letzten Stelle des Quotienten ungefähr einem Zehntelprozent im Wert von A entspricht, so ist es ohne weiteres aus der obigen Tabelle ersichtlich, dass der Quotient innerhalb der Versuchsfehler (vgl. unten) als konstant und gleich dem Mittelwert 1,44 gesetzt werden darf. Diese Regel wird später für die Berechnungen von Nutzen sein.

Die Beobachtungen von Tyndall. Bei den von mir angestellten Versuchen wurden nie geringere Kohlensäuremengen als einer Länge von 50 cm. entsprechend, untersucht. In der That sind die Absorptionsverhältnisse bei geringeren Kohlensäuremengen für das unten behandelte Problem von geringer Bedeutung. Jedoch ist die Kenntniss der Absorption auf diesem Gebiete von theoretischem Interesse und wird mit Vorteil in Betracht zu ziehen sein, wenn es wie unten gilt, eine empirische Formel zur Berechnung der Absorptionsverhältnisse zu konstruieren. Zu diesem Zweck habe ich die Beobachtungen von TYNDALL benutzt, bei welchen eine 100-gradige Wärmequelle durch eine zwischen Stein-salzplatten eingeschlossene Kohlensäuremasse von 2,03 bis 60,9 cm Länge zu einer Thermosäule von Zimmertemperatur strahlte.¹⁾ Diese Versuche von TYNDALL entsprechen folglich sehr genau den von mir mit dem LESLIE'schen Würfel ausgeführten.

Die von TYNDALL angegebenen Werte sind:

l	A	$\log \left(1 - \frac{A}{100}\right)$
2,03 cm	1,4	— 0,0061
4,06 „	2,1	— 0,0092

¹⁾ TYNDALL, l. c.

l	A	$\log \left(1 - \frac{A}{100} \right)$
6,09 cm	3,0	— 0,0132
8,12 »	4,0	— 0,0177
10,15 »	5,1	— 0,0227
12,18 »	6,1	— 0,0273
14,2 »	6,7	— 0,0301
20,3 »	6,9	— 0,0311
40,6 »	10,0	— 0,0458
60,9 »	11,8	— 0,0545 .

Die TYNDALL'schen Werte stimmen mit den meinigen sehr gut überein, indem aus jenen für $l = 50$ ein Wert von $A = 10,9$ herauskommt, während von mir $A = 10,4$ beobachtet wurde, was innerhalb der Versuchsfehler dem TYNDALL'schen Wert gleichkommt.

Empirische Formel zur Berechnung der Absorption. Da im Folgenden Extrapolationen aus den bekannten Daten bisweilen nötig sind, so erscheint es in höchstem Grade wünschenswert die beobachteten Werte durch eine möglichst einfache empirische Formel zusammenzufassen, welche dieselben mit genügender Genauigkeit wiedergibt. Eine Formel dieser Art, welche die Erfahrung innerhalb des Beobachtungsgebietes so genau deckt, wird ohne nennenswertem Bedenken zur Berechnung von Absorptionswerten, welche die beobachteten um die Hälfte übersteigen, verwendbar sein.

Diese Formel soll ausdrücken, dass für genügend geringe l -Werte die Absorption, wie TYNDALL's Ziffern andeuten, der Kohlensäuremenge proportional ist. Weiter soll für $l = \infty$ $A = 100$ werden, denn bei genügender emittierenden Menge eines Gases wird das Emissionsspektrum desselben kontinuierlich, und infolgedessen muss eine unendlich dicke Schicht eines Gases einem absolut schwarzen Körper entsprechen. Dieses Verhalten zeigen die folgenden Formeln:

$$\log a = -D \{(1 + Bl)^c - 1\}$$

worin $a = 1 - \frac{A}{100}$ gesetzt ist. D , B und c sind aus den Beobachtungen zu bestimmende Konstanten. Durch Probieren von verschiedenen Werten findet man, dass c nahezu gleich 0,25 und B nahezu gleich 1 gesetzt werden muss, woraus folgt $D = 0,0028$ bzw. $D = 0,0040$ je nachdem die Versuche mit einem strahlenden Körper von 100° C. oder mit einer Kältequelle von -80° C. angestellt sind. Ich stelle in folgender kleinen Tabelle, worin die TYNDALL'schen Werte mit T , die mit der Kältequelle gemachten mit K bezeichnet sind, solche, A_{ber} , die nach der Formel

$$\log a = \frac{-0,0028}{-0,0040} \{(1 + l)^{1/4} - 1\}$$

berechnet sind, mit den direkt beobachteten, A_{obs} , zusammen.

l	$\log a$	A_{ber}	A_{obs}	Δ	l	$\log a$	A_{ber}	A_{obs}	Δ
$T\ 2,03$	$-0,0088$	2,0	1,4	+ 0,6	$T\ 60,7$	$-0,0503$	10,9	11,8	- 0,9
$T\ 4,06$	$-0,0140$	3,2	2,0	+ 1,2	$K\ 130$	$-0,0958$	19,7	19,4	+ 0,3
$T\ 6,09$	$-0,0176$	4,0	3,0	+ 1,0	140	$-0,0681$	14,5	14,8	+ 0,2
$T\ 8,12$	$-0,0206$	4,6	4,0	+ 0,6	155	$-0,0707$	15,0	15,0	$\pm 0,0$
$T\ 10,15$	$-0,0232$	5,2	5,1	+ 0,1	170	$-0,0780$	15,5	15,8	- 0,3
$T\ 12,18$	$-0,0253$	5,7	6,1	- 0,4	200	$-0,0771$	16,3	15,9	+ 0,4
$T\ 14,2$	$-0,0273$	6,1	6,7	- 0,6	$K\ 220$	$-0,1141$	23,1	22,3	+ 0,8
$T\ 20,3$	$-0,0320$	7,1	6,9	+ 0,2	$K\ 260$	$-0,1208$	24,3	23,9	+ 0,4
$T\ 40,6$	$-0,0430$	9,4	10,0	- 0,6	275	$-0,0858$	17,9	18,1	- 0,2
50,0	$-0,0466$	10,2	10,4	- 0,2	300	$-0,0888$	18,4	18,3	+ 0,1
$K\ 50,0$	$-0,0669$	14,3	15,0	- 0,7	$K\ 355$	$-0,1338$	26,5	26,8	- 0,3

Wie aus diesen Ziffern ersichtlich, giebt die betreffende Formel die Beobachtungen so gut wie vollkommen wieder, sobald l zwischen den Werten 8 und 355 cm liegt. Die Abweichungen bei niedrigeren l -Werten haben wahrscheinlich sehr geringe reelle Bedeutung und haben für das unten behandelte Problem nichts zu sagen. Wir können demnach die genannte Formel ohne Bedenken zur Interpolation zwischen den A -Werten 4 und 20, bzw. 6 und 27, für Strahlung von einer 100 -gradigen Wärmequelle gegen eine 15 -gradige, bzw. für die Strahlung einer 15 -gradigen Wärmequelle gegen eine -80 -gradige benutzen. Und wenn man zu A -Werten, die gleich 30 bzw. 40 kommen, mit

der betreffenden Formel extrapoliert, so dürfte man nicht Fehler von mehr als etwa ± 1 Prozent zu befürchten haben.

In Betracht der grossen Uebereinstimmung der Formel mit der Erfahrung ist es wohl berechtigt die Vermutung auszusprechen, dass, wie die Formel verlangt, die zu erwartende Proportionalität zwischen durchstrahlter Kohlensäuremenge und Absorption sich nicht so weit erstreckt (bis $l = 14$ cm), wie TYNDALL vermutete, sondern erst unter $l = 1$ cm eintritt. Weiter sieht man aus der Formel, dass in einem sehr grossen Intervall die Absorption ($\log a$) nahezu proportional der vierten Wurzel aus der durchstrahlten Kohlensäurelänge variiert. Dies erinnert sehr an einem Befund von GOUY,¹⁾ welcher später von mir konstatiert wurde.²⁾ Wenn die Salzmenge in einer (chlornatrium-)salzhaltigen Flamme zunimmt, so wächst ihre Lichtstärke anfangs proportional der Salzmenge, um später langsamer zuzunehmen. Danach kommt ein sehr grosses Intervall, welches bei den Versuchen nicht überschritten wurde, wo die Lichtstärke proportional der Quadratwurzel aus dem Salzgehalt wächst. Es ist sehr wohl möglich, dass eine physikalische Bedeutung hinter diesen Formeln liegt, und dass der Unterschied darauf beruht, dass beim Chlornatrium das Licht wahrscheinlicherweise von den Natriumatomen ausgeht und ein Linienspektrum giebt, während bei der Kohlensäure die Wärme von den Molekeln absorbiert wird und einem Bandenspektrum von Gruppen von dicht gedrängten Linien entspricht.

Jedenfalls zeigen die obenstehenden Daten unzweideutig, dass auch bei so grossen Kohlensäuremengen, wie die in der Atmosphäre befindlichen und noch grösseren, die Wärmeabsorption der Kohlensäure stetig und ganz merklich zunimmt, wenn die Kohlensäuremenge wächst.

Berechnung der Absorption für bestimmte Längen. Mit Hülfe der obenstehenden Formel habe ich zum Gebrauch im Folgenden und zur Uebersicht eine Tabelle berechnet, welche angiebt, wie

¹⁾ GOUY: Ann. d. ch. et d. phys. 5 Sér. 18. 93. 1879.

²⁾ ARRHENIUS: Bihang till K. V. A:s Handlingar. Bd. 16. Afd. 1. N:o 9. 1891. s. 8.

viele Centimeter (l) Kohlensäure von Atmosphärendruck nötig sind um einen bestimmten Prozentsatz (A) der auffallenden Wärme in den beiden von mir untersuchten Fällen zu absorbieren. Die zuerst stehenden Ziffern beziehen sich auf die Strahlung niederer Temperatur.

A	l_1	l_2	A	l_1	l_2
1	0,6	0,9	21	165	475
2	1,3	2,0	22	194	560
3	2,1	3,7	23	226	650
4	3,3	6,1	24	260	765
5	5,0	9,7	25	300	900
6	6,9	14,0	26	345	1040
7	9,3	19,5	27	395	1200
8	12,3	27	28	450	1380
9	16,2	37	29	510	1600
10	20,7	49	30	580	1840
11	25,9	63	31	660	(2100)
12	32,3	80	32	750	(2390)
13	40,6	100	33	850	(2610)
14	49	125	34	960	(2960)
15	60	155	35	1080	(3350)
16	72	190	36	1210	(3780)
17	86	230	37	1360	(4240)
18	102	280	38	1530	(4740)
19	120	335	39	1720	(5290)
20	142	400	40	1920	(5860).

Die Einklammerung soll bedeuten, dass die betreffenden Werte wegen der ziemlich weitgehenden Extrapolation mit grösserer Unsicherheit als die anderen Ziffern behaftet sind.

Die Wirkung der atmosphärischen Kohlensäure. Ein Teil der von der Erde ausstrahlenden Wärme wird von der Kohlensäure in der Luft absorbiert und danach von dieser Kohlensäure

wieder in den Weltraum hinausgestrahlt. Wenn nun die Temperatur der Kohlensäure dieselbe wie diejenige der Erdoberfläche wäre, so würde offenbar keine Veränderung durch die Anwesenheit der Kohlensäure entstehen. Die Kohlensäure könnte ohne weiteres durch einen festen Körper von demselben Diatermanitätsverhalten ersetzt werden. Es verhält sich dann die Erde, welche in Bezug auf unsichtbarer Wärmestrahlung ohne merklichen Fehler als ein absolut schwarzer Körper betrachtet werden kann, als ob sie mit einer für gewisse Wellenlängen schwarzen für andere Wellenlängen partiell oder vollkommen durchlässigen Farbe von derselben Temperatur überzogen wäre. Die Erde würde nach aussen genau so gefärbt aussehen und genau so viel Wärme ausstrahlen, wie wenn die Farbe, d. h. die Kohlensäure, nicht da wäre.

Ganz anders liegen die Verhältnisse, wenn die Kohlensäure eine andere Temperatur besitzt, wie die strahlende Erde. Die Strahlung eines schwarzen Körpers in Bezug auf eine bestimmte Wellenlänge nimmt nämlich, wie das Gesetz von WIEN ¹⁾ oder richtiger sein korrigiertes Gesetz zeigt, kolossal bei sinkender Temperatur ab. Die Kohlensäure besitzt drei Emissionsmaxima bei 2,6 μ , 4,5 μ und 14,5 μ . Die Strahlung, E , der Kohlensäure in Bezug auf eine dieser drei Strahlengattungen wird demselben Gesetz unterworfen sein, wie diejenige eines absolut schwarzen Körpers d. h. sie wird ausgedrückt durch die Formel:

$$E = C \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{K}{\lambda T}} - 1}$$

worin C eine Konstante, K eine andere Konstante ($2890 \cdot 4,956$), λ die betreffende Wellenlänge und T die absolute Temperatur bedeuten. Je kleiner λ , desto schneller ändert sich E mit der Temperatur. Nun ist das Hauptmaximum der Kohlensäure-emission bei 14,5 μ gelegen; rechnen wir also mit $\lambda = 14,5$, so erhalten wir eine annähernd richtige aber etwas zu langsame Veränderung von E mit T .

¹⁾ WIEN = l. c., PLANCK: l. c.

Aus später zu ersiehenden Gründen habe ich der Einfachheit halber $T = 257,6$ zu Einheit genommen. Die obenstehende Funktion E variiert mit T in folgender Weise:

$T: 257,6$	$E: E_0$	$T: 257,6$	$E: E_0$
0,1	$20 \cdot 10^{-34}$	0,7	$190 \cdot 10^{-3}$
0,2	$20 \cdot 10^{-9}$	0,75	$274 \cdot 10^{-3}$
0,3	$12,5 \cdot 10^{-5}$	0,8	$378 \cdot 10^{-3}$
0,35	$8 \cdot 10^{-4}$	0,85	$497 \cdot 10^{-3}$
0,4	$31 \cdot 10^{-4}$	0,9	$648 \cdot 10^{-3}$
0,45	$89 \cdot 10^{-4}$	0,95	$814 \cdot 10^{-3}$
0,5	$21 \cdot 10^{-3}$	1,0	$1000 \cdot 10^{-3}$
0,55	$43 \cdot 10^{-3}$	1,05	$1207 \cdot 10^{-3}$
0,6	$76 \cdot 10^{-3}$	1,10	$1431 \cdot 10^{-3}$
0,65	$124 \cdot 10^{-3}$	1,15	$1680 \cdot 10^{-3}$

Bei niedrigen T -Werten steigt E ganz rapid mit T um später relativ langsam mit T zuzunehmen. Jedoch ist auch dann die Zunahme immerhin sehr stark, indem einem Zuwachs von 10 Prozent im T -Wert eine Zunahme von 43 Procent im E -Wert entspricht, d. h. auch dann wächst E nahezu proportional der vierten Potenz der absoluten Temperatur.

Wenn nun die ausstrahlende Schicht der Kohlensäure in der Mitte der Atmosphäre läge, d. h. da wo der Luftdruck 380 mm. Quecksilber und die Temperatur $257,6^\circ$ absolut beträgt, so würde die Strahlung der Kohlensäureschicht auf dieser Höhe sich zu derjenigen, welche sie in unmittelbaren Nähe der Erdkruste ($T = 288$) besäße, verhalten wie $1 : 1,52 = 0,658$. Mit anderen Worten die Strahlung der Erde, welche durch die Kohlensäure absorbiert wird, sollte um etwa 34 Prozent vermindert werden, wodurch die Erde eine höhere Temperatur annehmen könnte.

Wie die Verhältnisse unter solchen Umständen sich entwickeln, ersieht man am besten an der Sonne. Dieser Glühkörper ist durch eine selektiv absorbierende und emittierende Atmosphäre umgeben, welche teilweise nicht unbedeutend kühler ist, als die eigentliche strahlende Schicht der Sonne, die Photosphäre.

Wäre die Temperatur der selektiv absorbierenden Atmosphäre oder der sogenannten umkehrenden Schicht ebenso hoch wie diejenige der Photosphäre, würden keine dunklen Linien im Sonnenspektrum vorkommen. Weil aber diese absorbierende und wiederum emittierende Schicht viel kälter als die Photosphäre ist, so vermindert sie die Sonnenstrahlung sehr stark, man schätzt sie auf etwa die Hälfte des Betrages, welcher ohne absorbierende Atmosphäre vorkommen würde. Diese Abschwächung ist um so effektiver, je dickere Schichten der Sonnenatmosphäre die Sonnenstrahlen durchwandern müssen, d. h. je näher der strahlende Teil am Sonnenrand liegt. Die Lichtstrahlung in der Nähe des Sonnenrandes ist etwa nur ein Drittel so gross wie in der Mitte der Sonnenscheibe.

Für ein Auge, welches für langwellige Strahlen empfindlich wäre und sich ausserhalb der Erde, z. B. auf dem Monde, befände, würde die Erde ein ähnliches Schauspiel zeigen. Die Erde würde viel heller strahlen, wenn man plötzlich auf eine kurze Zeit die absorbierenden Gase, Wasserdampf und Kohlensäure aus ihrer Atmosphäre entfernen könnte. Und die Erde würde ebenso wie die Sonne in der Mitte ihrer Scheibe viel heller erscheinen wie an den Rändern. Könnte man plötzlich die Kohlensäuremenge der Erdatmosphäre vergrössern, so würde die Erde plötzlich an Strahlung einbüssen, und demzufolge, wenn nicht die Einstrahlung von der Sonne gleichzeitig merklich abnähme, ihre Eigenwärme erhöhen, bis wieder Gleichgewicht stattfände. Wenn die Ausstrahlung um den Bruchteil α abgenommen hätte, und die Temperatur anfangs T später T_1 gewesen wäre, würde dies nach dem STEFAN-BOLTZMANN'schen Gesetz eintreten, sobald:

$$T^4 = T_1^4 (1 - \alpha).$$

Verteilung der Temperatur mit der Höhe. Wir müssen uns nach dem Gesagten eine Vorstellung bilden über die Temperaturen der strahlenden Kohlensäureschichten. Die Emission ist nun gerade die umgekehrte Erscheinung der Absorption. Wenn wir also aus der Atmosphäre eine Säule ausschneiden würden, die

senkrecht auf der 288° (abs.) warmen Erdoberfläche stände und ausserhalb der Atmosphäre von einer 288° (abs.) warmen Bodenfläche und sonst von absolut spiegelnden vertikalen Wänden begrenzt wäre, so würde Temperaturgleichgewicht nur auf die Weise bestehen können, dass die oberste Schicht der Atmosphäre ebenso viel Wärme zur äusseren Bodenfläche ausstrahlte, wie sie von da empfängt. Ähnliches gilt für die nächstfolgende Schicht u. s. w. Nehmen wir weiter an, die Absorption wäre dieselbe wie bei den Versuchen über Strahlung von einem 15 -gradigen Körper gegen einen 80 -gradigen, so würde die ganze Atmosphäre einer 288 (abs.) warmen Kohlensäuresäule von 250 cm. Länge entsprechen und demnach $23,7$ Prozent von der Einstrahlung der oberen oder unteren Bodenfläche absorbieren. In demselben Verhältniss würde die Emission vorsichgehen, so dass die oberste Schicht bis zur Länge $l = 0,6$ cm d. h. bis zu einen Druck von $0,00024$ Atm. das erste Prozent absorbieren und emittieren, die zweite Schicht zwischen $l = 0,6$ und $l = 1,3$, entsprechend einem Druck von $0,00024$ bis $0,00052$ Atm., würde das zweite Prozent absorbieren und emittieren u. s. w. Die letzten $0,7$ Prozent würden den Längen 226 cm bis 250 cm, d. h. Drucken von $0,904$ bis $1,0$ Atmosphären entsprechen.

Denken wir uns jetzt den oberen Boden dieser Säule entfernt, so strahlt die Atmosphäre gegen den Weltraum, dessen Temperatur gleich 0° (abs.) gesetzt werden kann. Infolgedessen muss die Temperatur der aller äussersten Schicht der Atmosphäre gegen 0° (abs.) sinken, und es entsteht eine Wärmeverteilung der Art, dass die Temperatur kontinuierlich von unten (288° abs.) nach oben (0° abs.) sinkt. Dadurch wird die Absorption nicht (nennenswert), dagegen die Emission in höchstem Grade beeinträchtigt. Die oberste Schicht zwischen $l = 0,6$ und $l = 1,3$ wird ebensogut wie früher als Schirm gegen die Erdstrahlung dienen, dagegen nicht mehr 1 Prozent der Erdwärme nach der Aussenwelt verlieren, sondern $E_i : E_a$ mal weniger, worin E_i und E_a die den Temperaturen der betreffenden Schicht und der Erdoberfläche entsprechenden Emissionsvermögen bedeuten.

Wenn wir also wüssten, wie die Temperatur mit dem Luftdrucke und dem damit proportionalen Partialdrucke der Kohlen-säure sich ändert, so wäre es leicht die Verminderung der Wärmeemission zufolge der nach oben abnehmenden Temperatur zu berechnen. In jüngster Zeit ist die Behauptung verteidigt worden, dass in höheren Luftschichten (worin sehr wenig Wasserdampf vorhanden ist) die Temperaturverteilung eine sogenannte adiabatische sein sollte. Danach sollte die Temperatur für je 100 Meter mit nahezu einem Grad (0,99) sinken. Man hat zwar immer einen geringeren Temperaturfall beobachtet; aus theoretischen Gründen ist man aber geneigt anzunehmen, dass in wasserfreier Luft die Temperaturverteilung adiabatisch sei. ¹⁾ Dabei wird zwar stillschweigend die (unrichtige) Voraussetzung gemacht, dass die Wärmeabsorption der höheren Luftschichten zu vernachlässigen ist. Bei dieser adiabatischen Wärmeverteilung ist die Temperatur mit dem Druck durch folgende Relation verknüpft:

$$T_1 : T_0 = (p_1 : p_0)^{\frac{k-1}{k}}$$

worin T_1 und p_1 die Temperatur und den Druck an einer Stelle, T_0 und p_0 die entsprechenden Grössen an einer anderen Stelle, in der Luft bedeuten, und k das Verhältniss c_p/c_v der spezifischen Wärmen der Luft darstellt. Nehmen wir für k den Wert von LUMMER und PRINGSHEIM $k = 1,4025$ an, ²⁾ so wird der Exponent im letzten Ausdrucke gleich 0,287.

Mit Hülfe der obenstehenden Gleichung habe ich die Temperatur von Schichten berechnet. deren Luftdruck geringer als 380 mm. Quecksilber ist. Für Luftschichten von höherem Luftdruck ist durch die in der letzten Zeit zahlreich vorgenommenen Messungen bei Ballonfahrten die Abhängigkeit der Temperatur von dem Luftdruck genügend bekannt. Folgender Auszug aus der so berechneten Tabelle möge zur Orientierung dienen.

¹⁾ W. v. BEZOLD: l. c. S. 20.

²⁾ LUMMER und PRINGSHEIM: Wied. Ann. 64, 580, 1898.

$p : 760$	$T : 257,6$	$p =$	$T =$	$p : 760$	$T : 257,6$	$p =$	$T =$
0,005	0,265	3,8	68,3	0,3	0,864	228	222,5
0,01	0,323	7,6	83,2	0,4	0,988	304	241,6
0,025	0,421	19	108,5	0,5	1,000	380	257,6
0,05	0,516	38	132,9	0,6	1,046	456	269,4
0,1	0,629	76	162,0	0,7	1,061	532	273,1
0,15	0,708	114	182,3	0,8	1,083	608	278,9
0,2	0,768	152	197,8	0,9	1,101	684	283,7
0,25	0,819	190	206,1	1,0	1,118	760	288,0

Mit Hülfe einer ähnlichen (ausführlicheren) Tabelle lässt sich leicht die Temperatur t in einer beliebigen Luftschicht und daraus die Emission E_i berechnen. Durch Summation erhält man danach die totale Emission für alle die strahlenden Kohlen-säureschichten. Wenn nun die Absorption dieser Schichten beispielsweise 23,7 Prozent der Erdstrahlung erreicht, so findet man, dass die totale Emission nur 6,6 Prozent beträgt. Es findet also eine Ersparniss von etwa 17 Prozent statt, einer Temperatur-erhöhung von etwa 13° C. entsprechend.

Nun geht, wie oben gesagt, die Temperaturänderung mit der Höhe nicht so schnell vor sich, wie die adiabatische Verteilung verlangt. HANN¹⁾ nimmt einen etwa 0,6 mal geringeren Wärmefall an, die Berechnungen von v. BEZOLD geben die entsprechende Ziffer 0,8.²⁾ Um den (geringen) Einfluss von diesem Umstand zu beleuchten, habe ich Tabellen berechnet für den Fall, dass bei Luftdrucken unter 380 mm. der Wärmefall nach dem adiabatischen Schema, halb so schnell oder drittel so schnell verläuft. Dabei ist es vorausgesetzt, dass unter der Luftsäule eine warme (strahlende) Fläche liegt, die absolut schwarz ist und dass die Kohlen säuremenge in der Luftsäule 0,5, 1, 2, 4 bzw. 8 mal so gross ist wie in einer ähnlichen vertikalen Luft-säule der jetzigen Atmosphäre. Ferner habe ich mit zwei Werten der Absorption gerechnet, welche den beiden oben gefundenen Werten (A_1 und A_2) gleich kommen.

¹⁾ HANN: Oesterr. met. Ztschr. 9, 337, 1874.

²⁾ W. v. BEZOLD: l. c. S. 19.

Wärmeersparnis in Prozent, höhere Absorption.

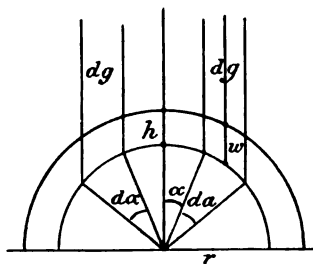
Kohlensäure- menge.	Totale Absorption.	Ersparnis in Prozent.		
		adiab.	0,5 adiab.	0,33 adiab.
0,5	19,2	13,4	11,6	10,4
1	23,7	17,1	15,1	13,7
2	28,8	21,5	19,2	17,5
4	34,3	26,3	23,7	21,6
8	40,4	31,6	29,0	26,2

Niedrigere Absorption.

0,5	14,0	9,7	8,6	7,8
1	17,4	12,5	11,1	10,1
2	21,3	15,8	14,1	12,8
4	25,8	19,4	17,4	15,9
8	30,6	23,1	20,9	19,1

Der mittlere Weg der Erdstrahlen durch die Atmosphäre.
 In dem Vorhergehenden haben wir nur die Strahlung senkrecht zur Oberfläche betrachtet. Weil aber ein Teil der Strahlen schräg hinausgeht, so haben sie im Mittel einen längeren Weg und eine grössere Kohlensäuremenge zu passieren, als wenn sie in senkrechter Richtung gingen. Um dies zu berechnen, denken wir uns wieder ein Auge in sehr grosser (unendlicher) Entfernung von der Erde, welche dann als eine Kreisscheibe erscheint, die in der Mitte heller strahlt wie am Rand. Betrachten wir die Strahlen, die von einer Zone der Erde nach dem Auge ausgehen, welche Zone zwischen den Polabständen α und $\alpha + d\alpha$ (vgl. Fig. 2) liegt, wobei als Pol der dem Auge nächste Punkt

Fig. 2.



angenommen wird. Wenn die Länge der zwischen dem Pol und dem Auge gelegenen Kohlensäuresäule (auf Atmosphärendruck bei 15° C. reduciert) gleich h ist, so ist der Weg (w), welchen die Strahlen von der genannten Zone durchlaufen, sehr nahe:

$$w = \frac{h}{\cos \alpha}.$$

Da die Zone selbst die Grösse (dg)

$$dg = d\pi(r \sin \alpha)^2 = 2\pi r^2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha$$

besitzt, so wird der mittlere Weg:

$$\frac{\int w dg}{\int dg} = \frac{2\pi r^2 h \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha}{\pi r^2 \int_0^{\pi/2} d(\sin^2 \alpha)} = 2h.$$

Der Weg, welchen die Wärmestrahlen im Mittel durch die Atmosphäre und damit durch die Kohlensäure durchlaufen, ist doppelt so gross, wie wenn sie in senkrechter Richtung hinausstrahlten. Die Absorption muss also grösser sein, als wenn der Strahl die einfache Kohlensäuremenge zu passieren hätte. Aber sie wird geringer sein, als wenn sie die doppelte Menge passierte. Dies beruht darauf, dass die Absorption viel langsamer zunimmt als proportional der absorbierenden Kohlensäuremenge. Es ist leicht zu berechnen, dass wenn beispielsweise gleiche Wärmemengen durch Kohlensäuremengen passieren, die kontinuierlich im Verhältniss 1 bis 3 zunehmen, so ist die mittlere Absorption nur so gross, wie wenn die Wärmemenge durch eine Kohlensäureschicht von der Länge 1,91 (anstatt 2) passierte. Dies sobald die mittlere Absorption einen gewissen Wert (etwa 7 Prozent) überschreitet, welcher Fall einzig von praktischem Belang ist. Noch grösser ist der Unterschied von der Zahl 2, wenn die Verteilung dieselbe ist wie diejenige der Erdstrahlen. Man kann den Mittelwert in ähnlicher Weise wie oben mit Hülfe der Tabelle über den Zusammenhang zwischen Absorption und durchlaufener Kohlensäuremenge berechnen. Die so erhaltene

Formel ist nicht ohne Weiteres integrabel, sondern man muss die Integration durch eine Annäherungsrechnung ausführen. Man findet, sobald man von mittleren Absorptionen (unter etwa 7 Procent) absieht, immer nahezu dieselbe Zahl, wechselnd zwischen 1,73 und 1,755 für den geringeren Absorptionsgrad, zwischen 1,70 und 1,73 für den höheren.

Berechnung der Verminderung der Ausstrahlung eines schwarzen Körpers durch eine gegebene Kohlensäureatmosphäre. Jetzt ist es leicht aus den auf S. 42 gegebenen Daten die Wärmersparnis zu berechnen, welche von Atmosphären, die 0,25, 0,5, 1, 2 oder 4 mal so viel Kohlensäure (über jeden Quadratmeter) wie die Erdatmosphäre enthalten, herrühren, wenn sie einen gegen das Weltall strahlenden schwarzen Körper umgeben. Die Tabelle ist genau so eingerichtet wie diejenige auf S. 42.

Ersparnis in Prozent, Höhere Absorption.

CO ₂ Menge.	Absorption.	adiab.	$\frac{1}{2}$ adiab.	$\frac{1}{3}$ adiab.
0,25	18,3	12,5	10,9	9,5
0,5	22,7	16,0	14,1	12,6
1	27,7	20,1	18,0	16,3
2	33,1	24,9	22,1	20,2
4	39,0	30,0	27,4	25,8

Niedrigere Absorption.

0,25	13,3	9,0	8,0	7,3
0,5	16,6	11,8	10,4	9,5
1	20,4	14,9	13,3	12,0
2	24,7	18,5	16,6	15,1
4	29,5	22,1	19,9	18,2

Diese Werte können in einer dem folgenden besser entsprechenden leichtfasslichen Form geschrieben werden, wenn man die Temperaturveränderungen tabelliert, welche entstehen würden, falls man die Kohlensäuremenge in der Atmosphäre des schwarzen Körpers von dem Wert 1 auf einen anderen Wert brächte. Dabei wird es zum Vergleich mit den auf der Erde obwaltenden Verhältnissen angenommen, dass die Ausgangstemperatur gleich

der mittleren Temperatur der Erdoberfläche d. h. 288° (abs.) sei.
Wir erhalten so folgende Tabelle.

Höhere Absorption.

0	— 15,8	— 13,8	— 12,5
0,25	— 6,5	— 5,8	— 5,6
0,5	— 3,5	— 3,1	— 3,0
1	0	0	0
2	+ 4,5	+ 3,8	+ 3,5
4	+ 11,4	+ 9,1	+ 8,7

Niedrigere Absorption.

0	— 11,6	— 10,1	— 9,1
0,25	— 4,8	— 4,2	— 3,8
0,5	— 2,6	— 2,4	— 2,0
1	0	0	0
2	+ 3,1	+ 2,8	+ 2,6
4	+ 6,5	+ 5,8	+ 5,3

Verwendung der gefundenen Resultate auf terrestrische Verhältnisse. Die oben gegebenen Ziffern können direkt auf die Verhältnisse der Erde verwendet werden. Die Erde kann der Hauptsache nach als ein in Bezug auf dunkle Wärme nahezu vollkommen schwarzer Körper angesehen werden. Dies gilt wohl in erster Linie betreffs der festen Erdkruste, auch wo sie schneebedeckt ist und demzufolge in Bezug auf sichtbare Strahlen nicht im entferntesten als schwarzer Körper behandelt werden darf. Aber auch die Meeresoberfläche kann als ein nahezu schwarzer Körper, dessen Emissionsvermögen nach ZENKER 0,925 derjenigen eines absolut schwarzen Körpers beträgt, behandelt werden. Dies um so mehr, als das Wasser beinahe dasselbe Reflexionsvermögen für alle Strahlengattungen besitzt, so dass die Einstrahlung von der Sonne nahezu ebenso stark abgeschwächt wird wie die Ausstrahlung von der Erde.

Es erübrigt nur noch zu zeigen, dass die Zunahme der Kohlensäure die Absorption der Sonnenstrahlen nicht stärker beeinflusst, als dass sie in diesem Fall aus der Rechnung gelassen

werden kann. Man hat früher häufig die Absorption der Sonnenstrahlung durch Kohlensäure überschätzt. So glaubten **LECHER** und **PERNTER** ¹⁾ aus ihren Versuchen schliessen zu dürfen, dass 13 Prozent der Sonnenstrahlung durch eine 105 cm. dicke Schicht von Kohlensäure ausgelöscht werden. Noch viel weiter ging **ÄNGSTRÖM**, welcher, einen grossen Wert der Sonnenkonstante brauchend, die sonst unbegründete Hypothese aufstellte, dass die atmosphärische Kohlensäure nicht weniger als etwa 60 Prozent der Sonnenstrahlung absorbieren sollte. ²⁾

Um eine Vorstellung von der Absorption der Kohlensäure für Sonnenlicht zu erhalten, ist der sicherste Weg die Energieverteilung im Sonnenspektrum zu betrachten. Die Energiemengen, welche in der Nähe der Absorptionsbänder der Kohlensäure in diesem Spektrum fallen, sind so gering, dass es daraus ersichtlich wird, dass man für den fraglichen Fall die entsprechende Absorption vollkommen vernachlässigen kann. Um dies zu zeigen, habe ich unter Annahme, dass die Sonnenstrahlung ebenso zusammengesetzt ist, wie die Strahlung eines 6000° (abs.) warmen Körpers, die Energieverteilung im Sonnenspektrum nach der oben angeführten Formel:

$$E = C \cdot \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{K}{\lambda T}} - 1}$$

berechnet. Wenn man $C = 10^8$ setzt (es kommt ja hier nur auf relative Werte an, sonst ist $C = 7,8 \cdot 10^6$ cal pr cm.² sek. etwa, falls λ in μ gezählt wird) so findet man folgende Werte von E , welche unter den zugehörigen λ -Werten geschrieben sind:

$\lambda =$	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$E =$	0,0041	2,0	71,7	142	248	270	245	202	162	128	101
$\lambda =$	1,2	1,5	2,0	3,0	4,0	4,5	5,0	7,0	10,0		
$E =$	63,4	33,6	13,6	3,38	1,19	0,77	0,52	0,146	0,037		
$\lambda =$	15,0	20,0	25,0	30,0 μ .							
$E =$	0,0076	0,0025	0,001	0,0005							

¹⁾ **LECHER**: Wied. Ann. 12, 466, 1881.

²⁾ **ÄNGSTRÖM**: Bihang till K. V. A:s Handl. 15, Afd. 1, N:o 9 und 10, Wied. Ann. 39, 309, 1890.

Summiert man diese Werte, erhält man für die ganze Energiemenge 203,2. Man sieht hieraus, dass die Absorption in der Nähe von $\lambda = 14,5 \mu$ absolut vernachlässigt werden kann, auch wenn das Absorptionsband über 2μ sich ausdehnen würde. Einen grösseren Einfluss hat das Band bei $4,5 \mu$. Wenn dasselbe sich über 2μ erstreckt, so ist die absorbierte Energiemenge 0,8 Prozent der totalen Sonnenenergie. Etwa denselben Einfluss dürfte das Band bei $\lambda = 2,6 \mu$ ausüben, seine maximale Breite wird zu $0,5 \mu$ geschätzt. Die Totalwirkung kann demnach nicht zu höher als 2 Prozent geschätzt werden. Wenn diese Ziffern dem jetzigen Kohlensäuregehalt der Atmosphäre entsprechen, so wird nach der oben gegebenen Regelmässigkeit eine Zunahme der Kohlensäuremenge im Verhältniss 1 zu 5 nötig sein, damit die Absorption um 1 Prozent steigen würde. Diese Veränderlichkeit ist so gering, dass wir in der ersten Annäherung sie vernachlässigen können, was bei der Unsicherheit der Daten sehr erwünscht erscheint.¹⁾

Wenn in der Erdatmosphäre ausser der Kohlensäure nur für dunkle Wärme durchlässige Gase, Sauerstoff, Stickstoff und Argon, sich befänden, könnte man ohne Weiteres die oben gegebenen Daten auf die Erde anwenden.

Um nun weiter zu entscheiden, welcher von den oben gegebenen Absorptionsverhältnissen der Wirklichkeit in Bezug auf die Absorption der Atmosphäre näher kommt, wollen wir zuerst die Zusammensetzung der Wärmestrahlung von Wärmequellen, deren Temperaturen gleich -80° , $+15^\circ$ und $+100^\circ$ C. betragen, untersuchen. Wir finden, wie oben für $T = 6000^\circ$, folgende Werte:

	$\lambda = 2$	4	6	8	10	12	14
$T = 193; E \cdot 10^7 =$		0,083	5,35	28,1	59,0	80,5	92,1
$T = 288; E \cdot 10^7 =$		38,1	318	605	692	643	546
$T = 373; E \cdot 10^7 = 1,4$		649	2112	2506	2155	1694	1277

¹⁾ ÅNGSTRÖM findet (Ann. d. Phys. 3, 722, 1900) in Gegensatz zu LECHER, dass Kohlensäure ($l = 40$ cm.) keine merkliche Absorption auf Sonnenlicht, 3252 m über dem Meere, ausübt.

$\lambda =$	16	18	20	22	24	26	30
$T = 193; E \cdot 10^7 =$	92,4	86,4	77,7	68,4	59,3	51,1	37,6
$T = 288; E \cdot 10^7 =$	442	354	282	225	180	145	96,6
$T = 373; E \cdot 10^7 =$	948	707	534	409	316	248	158
$\lambda =$	35	40	45	50	70	100	200 μ .
$T = 193; E \cdot 10^7 =$	25,6	18,0	12,8	9,4	3,14	0,91	0,0703
$T = 288; E \cdot 10^7 =$	60,4	39,3	26,0	17,1	5,73	1,55	0,111
$T = 373; E \cdot 10^7 =$	95,1	60,2	40,0	27,6	8,12	2,14	0,147

Die totalen Wärmemengen, welche durch Summation von obenstehenden Ziffern erhalten werden, sind $2,172 \cdot 10^{-4}$, $10,59 \cdot 10^{-4}$ und $29,74 \cdot 10^{-4}$, welche innerhalb 2 Prozent mit den aus dem Wert für 6000° nach STEFAN-BOLTZMANN'S Gesetz berechneten Werten übereinstimmen.

Die Differenz zwischen der zweiten und der ersten Wärmemenge, ebenso wie zwischen der dritten und der zweiten geben relative Werte für die Strahlung einer 15-gradigen Wärmequelle gegen eine — 80-gradige bzw. einer 100-gradigen gegen eine 15-gradige. Diese Werte sind 8,42 bzw. 19,15. Die bei den obenstehenden Versuchen in Frage kommenden Wärmestrahlungen müssten aber durch zwei Steinsalzplatten von je 1 cm. Dicke hindurchgehen. Dadurch wurden die Strahlungen geschwächt, und man kann nach den Daten von RUBENS und TROWBRIDGE ¹⁾ über die Absorption von Steinsalz berechnen, dass die durchgelassenen Mengen sich in den zwei Fällen verhalten wie 5,35 zu 15,34. Die direkt beobachteten Zahlen ergaben ein Verhältniss wie 5,35 zu 14,25. Die all zu niedrige Zahl im zweiten Fall scheint anzudeuten, dass die Wand des LESLIE'schen Würfels nicht genug gut Wärme leitete, um auf der Aussenseite merklich dieselbe Temperatur, wie auf der Innenseite zu halten, ein Umstand welcher im Uebrigen keinen nennenswerten Einfluss auf die gezogenen Schlüsse ausübt.

Die letzten Daten geben an, dass der durch die benutzten Steinsalzplatten absorbierte Teil der Gesamtstrahlung in den beiden Fällen 35,7 bzw. 19,9 Prozent beträgt. Es hat ein gewisses Interesse damit den durch Steinsalz absorbierten Teil

¹⁾ RUBENS und TROWBRIDGE: Wied. Ann. 60, 724, 1897.

von Strahlungen der Wellenlängen 4,5 und 14,5 zu vergleichen. Dieser beträgt 0 bzw. 20,7 Prozent. Wenn nun die durch die Steinsalzplatten verursachte Auslöschung in Bezug auf die ganze Wärmestrahlung genau gleich derjenigen bezüglich der von der Kohlensäure absorbierten Strahlengattungen wäre, so würden die beobachteten Werte der Absorption der Kohlensäure ohne Weiteres auf die Strahlung durch Kohlensäure ohne Zwischenschaltung von Steinsalzplatten anwendbar sein. Dies trifft nun für die Strahlung der höheren Wärmequelle sehr nahe zu. Die Absorption der Strahlung von der Wellenlänge 14,5 μ ist etwas grösser als die mittlere Absorption. Dafür ist dagegen die Absorption der Strahlengattung 4,5 μ bzw. 2,6 μ um so geringer. Die Kohlensäureabsorption ist aber an dieser Stelle viel geringer als an jener (diejenige bei $\lambda = 2,6 \mu$ kann in diesem Fall vernachlässigt werden), und dazu kommt noch, dass die Strahlungsintensität daselbst etwas geringer ist, wie an jener Stelle. Wenn man der Absorption bei 14,5 μ nur die doppelte Bedeutung derjenigen bei 4,5 μ zuschreibt, was ohne Zweifel eine Unterschätzung jener ausmacht, so würde die mittlere Absorption des Steinsalzes für Kohlensäurestrahlen 13,8 Prozent ausmachen.

Wollen wir uns jetzt eine Vorstellung machen von der Korrektur, welche wegen dieser Ungleichheit in der Absorption der Totalwärme und der für Kohlensäureabsorption charakteristischen Wärme an den oben gegebenen Daten anzubringen ist, können wir folgende Ueberlegung durchführen. Wenn die totale Wärme nicht von den Steinsalzplatten Absorption erlitt, so würde die Totalstrahlung (durch die Luft) 1:0,801 mal grösser sein als die beobachtete. In ähnlicher Weise würde die von der Kohlensäure absorbierte Strahlung eigentlich im Verhältnis 1:0,862 mal stärker sein, wie die thatsächlich beobachtete. Mit anderen Worten die Absorption ohne Steinsalzplatten würde zu der thatsächlich beobachteten im Verhältniss $(1:0,862):(1:0,801) = 0,93$ stehen. Da nun bei den oben gegebenen Ziffern auf S. 46 die beiden Absorptionen im Verhältniss 1,44:1 stehen, so kann man leicht durch Extrapolation schätzen, wie gross die Ein-

wirkung wäre, wenn die Absorption nur 93 Prozent der geringeren Absorption ausmache. Man ersieht leicht durch eine einfache Rechnung, dass für Kohlensäureschichten zwischen 0 und 2 die letztere Tabelle richtige Werte ergibt, wenn die daselbst angeführten Werte um 7 Prozent vermindert werden. Für die letzte Zeile, welche nicht so grosse Bedeutung besitzt, wäre die Korrektur etwas grösser.

Für den zweiten Fall (Strahlung von einem 15-gradigen Körper gegen einen — 80-gradigen) liegen die Verhältnisse ungefähr ähnlich. In diesem Fall kann man die Absorption bei $4,5 \mu$ (bzw. $2,6 \mu$) beinahe gänzlich gegen diejenige bei $14,5 \mu$ vernachlässigen, weil bei dieser niedrigen Temperatur die Strahlung bei $4,5 \mu$ nicht ein Zehntel von derjenigen bei $14,5 \mu$ ausmacht. Es ist also sehr hoch geschätzt, wenn wir den Einfluss des Bandes bei $4,5$ gleich ein Zehntel desjenigen bei $14,5$ setzen. Es wird mit diesem Wert gerechnet die Absorption 79 Procent der beobachteten und die thatsächlichen Werte für die Temperaturerhöhung fallen zwischen den beiden auf S. 46 tabellierten Werten und zwar etwas näher zu den niedrigeren Werten. Dieselbe würde durch folgende Tabelle, die wie die gerade genannten Tabellen angeordnet ist, dargestellt sein.

Einfluss einer Änderung der Kohlensäureatmosphäre auf die Temperatur eines schwarzen Körpers von 15°C .

Kohlensäuremenge.	adiab.	0,5 ad.	0,33 ad.
0	— 13,3	— 11,6	— 10,5
0,25	— 5,5	— 4,8	— 4,5
0,50	— 3,0	— 2,7	— 2,4
1,0	0	0	0
2,0	+ 3,6	+ 3,2	+ 3,0
4,0	+ 8,5	+ 7,1	+ 6,7

Nun kann man sich weiter die Frage stellen, welche Emissionsverhältnisse am meisten den thatsächlich obwaltenden entsprechen. Dies betrifft die Abnahme der Temperatur mit steigender Höhe. Wie oben gesagt, sind die Verhältnisse bis zu

etwa 5500 M. Höhe (halben Atmosphärendruck entsprechend) ziemlich genau bekannt. Für grössere Höhen hat man nicht eine genügende Zahl von Beobachtungen um die Frage sicher zu entscheiden. Während v. BEZOLD stark geneigt ist einen sehr nahe dem adiabatischen Verlauf sich anschliessenden Gang anzunehmen, zeigen die von ihm angeführten Ziffern nur eine etwa 0,8 mal so starke Veränderung mit der Höhe. Und dies gilt für die grössten tabellierten Höhen, in der Nähe von 5500 M. ist die entsprechende Zahl 0,70, so dass im Mittel ein Wert von 0,75 herauskommt. Im Vorbeigehen möge es erwähnt werden, dass die Abweichung des Temperaturfalles in höheren Luftschichten von dem adiabatischen Verlauf ein Anzeichen der Kohlensäureabsorption für Wärme abgibt. Sonst würde nämlich der Ausspruch von v. BEZOLD gelten: »In den grössten Höhen, wo Absorption und Emission verschwinden, und beinahe kein Wasserdampf mehr vorhanden ist, bildet adiabatisches Aufsteigen und Niedersinken trockener Luft die einzige Ursache der Temperaturänderung mit der Höhe.«¹⁾ Dagegen steht die ältere Berechnung von HANN, welche die Zahl 0,57 bis 0,58 ergibt. Dieser Zahl kommen auch viele Ballonbeobachtungen in neuerer Zeit näher wie der v. BEZOLD'schen.²⁾ Wie aus der letzt erwähnten Tabelle hervorgeht, hat es keinen sehr grossen Einfluss, mit welcher von diesen beiden Ziffern man rechnen mag, und es ist nur um eine bestimmte Zahl für die Rechnung zu Grunde zu legen, dass wir das Mittel 0,66 aus den beiden Ziffern von HANN und v. BEZOLD nehmen, und damit in der letzten Tabelle interpolieren. Dieser Mittelwert stimmt übrigens gut mit dem von GLAISHER bei schöner Witterung gefundenen (0,67). Dabei möge es im Auge gehalten werden, dass mit steigender Höhe die Temperaturveränderung sich immer mehr dem adiabatischen Verlauf nähert. Demzufolge, und da die Höhen über 10,000 M. eine nicht unbedeutende Rolle bei den oben ausgeführten Berechnungen spielen, ist es eher zu vermuten, dass die unten ge-

¹⁾ v. BEZOLD: l. c. S. 18.

²⁾ Vgl. z. B. ASSMANN: Met. Ztschr. 12, 334, 1895.

gebenen, wie vorhin gesagt berechneten, Ziffern quantitativ zu niedrig als zu hoch ausfallen. Sie sind folgende:

Kohlensäuremenge .	0	0,25	0,50	1,0	2,0	4,0
Temperaturänderung	— 12,2	— 5,0	— 2,8	0	+ 3,3	+ 7,6.

Bei dieser Berechnung wurden die Daten für Strahlung eines 15°-igen Körpers gegen einen bedeutend kälteren (— 80°) benutzt, welche wohl sehr nahe den thatsächlichen Verhältnissen entsprechen, da die mittlere Temperatur der Erdoberfläche + 15° C. beträgt.

Es würde demnach, wenn kein anderes absorbierendes Gas (Wasserdampf) in der Atmosphäre vorhanden wäre, die Kohlensäure der Erde einen Wärmeschutz bereiten, wodurch die Temperatur etwa 12 Grad C. höher ausfiele als ohne diesen Schutz. Zum Zustandekommen einer Eiszeit, einer Temperatursenkung von 4,5° entsprechend, sollte der Kohlensäuregehalt auf etwa 0,30 des jetzigen Betrages sinken. Zur Erhöhung der Temperatur um 8 bis 9 Grad über den jetzigen Betrag, was einem Rückkehr der Eiszeitklimas entsprechen würde, müsste der Kohlensäuregehalt auf etwa den fünffachen Betrag des jetzigen Wertes steigen. Eine Änderung von 1 Prozent im jetzigen Betrage des Kohlensäuregehaltes würde die Temperatur der Erde um 0,044 Grad verändern.

Einwände von Hrn. Ångström. In bestimmtem Gegensatz zu diesen Schlüssen stehen einige Behauptungen von Hrn. ÅNGSTRÖM, welcher neuerdings seine Ansichten in dieser Frage veröffentlicht hat.¹⁾ Da bei den mangelhaften experimentellen Daten, welche von Hrn. ÅNGSTRÖM zur Stütze seiner Ansichten angeführt sind, eine eingehende Diskussion ausgeschlossen erscheint, wollen wir die betreffende Stelle erwähnen und dazu nur einige kurze Kommentaren machen.

Nachdem Hr. ÅNGSTRÖM erwähnt hat, dass H. Cand. J. KOCH in dem von Hrn. ÅNGSTRÖM geleiteten Institut mit Versuchen über die Wärmeabsorption von Kohlensäure beschäftigt ist, fährt

¹⁾ K. ÅNGSTRÖM: Ann. d. Physik, Bd. 3, S. 724, 1900. Vgl. ARRHENIUS Ebenda, Bd. 4, 1901.

er folgendermassen fort. »Von den Resultaten dieser Untersuchung, über die Hr. KOCH selbst Bericht erstatten wird, soll nur hervorgehoben werden, dass von der Strahlung eines schwarzen Körpers von 100° ca 10 Proz. von einer Kohlensäureschicht von 30 cm Länge bei 780 mm. Druck absorbiert wird, und dass wenn der Druck auf $\frac{2}{3}$ reduciert wird, die Absorption sich nur unbedeutend — höchstens mit 0,4 Prozent der Gesamtstrahlung — ändert.» Im Vorbeigehen möge es erwähnt werden, dass TYNDALL's Versuche und die obenstehende Berechnung einen Wert der Absorption von etwa 8,6 Proz. für eine absorbierende Schicht von 30 cm. Länge (bei 780 mm. Druck) voraussehen lässt. Da nun vielleicht die von Hrn. KOCH benutzte noch nicht beschriebene Versuchsmethode nicht mit der von TYNDALL angewandten ganz ähnlich ist, so möge man wohl bis auf weiteres 8,6 Proz. mit den angegebenen »ca 10 Proz.« als genügend übereinstimmend ansehen. Dagegen verlangt die Rechnung und die Beobachtungsreihe von TYNDALL bei einer Abnahme im l -Wert von 10,2 auf 6,8 eine Änderung von etwa 1,2 bzw. 1,6 Proz. in der Absorption, während Hr. KOCH einen Wert von »höchstens 0,4 Proz.« gefunden haben soll. Wie diese Diskrepanz, — falls hier nicht ein Schreib- oder Druckfehler vorliegt — zu erklären ist, wird man vielleicht nach Erscheinen der Abhandlung von Hrn. KOCH erfahren.

Ausserdem berechnet Hr. ÅNGSTRÖM unter Annahme, dass das Absorptionsband bei $14,5 \mu$ 2 bis 3μ breit ist, eine Absorption der Kohlensäure von 10 bis höchstens 16 Proz. Es braucht wohl nicht hervorgehoben zu werden, dass diese Annahme höchst willkürlich ist; sie führt auch zu Resultaten, die mit den oben experimentell gefundenen nicht in Einklang zu bringen sind. Bei einer absorbierenden Schicht von 355 cm. Länge haben wir eine Absorption von 26,8 Prozent beobachtet, welche nach Einführung der Korrektion wegen der unvollkommenen Diathermanität des Steinsalzes auf 21 Proz. übergeht, während Hr. ÅNGSTRÖM einen damit unvereinbaren Maximalwert von 16 Proz. verlangt.

Zur Charakterisierung von Hrn. ÅNGSTRÖM's Ansichten führen wir folgende Zusammenfassung von ihm an. »Eine Schicht von 30 cm. Länge hat also die Absorption der Strahlung einer Wärmequelle von 100° beinahe vollständig bewirkt. Aus diesen Untersuchungen und Berechnungen geht klar hervor, erstens, dass höchstens ca 16 Proz. von der Erdstrahlung durch die atmosphärische Kohlensäure absorbiert werden und zweitens, dass die Gesamtaborption sehr wenig von den Veränderungen in dem atmosphärischen Kohlensäuregehalt abhängig ist, solange nämlich dieser nicht kleiner als 0,2 des jetzt vorhandenen ist.»

Einfluss des Wasserdampfes in der Atmosphäre. In dem Vorigen sind nur Verhältnisse in Betracht gezogen worden, wobei die Kohlensäure als das alleinige Absorptionsmittel in der Atmosphäre angesehen werden konnte. Ausser der Kohlensäure übt auch der Wasserdampf eine mächtige absorbierende Einwirkung auf die strahlende Wärme aus. Man hat dann ähnliche Betrachtungen anzustellen, wie betreffs der Einwirkung der Steinsalzplatten. Wenn der Wasserdampf keine gemeinsame Strahlen mit der Kohlensäure besässe, so würde jener nur die Gesamtstrahlung, nicht aber die Absorption der Kohlensäure, beeinträchtigen, so dass die Kohlensäurewirkung auf die durch den Wasserdampf durchgelassene Wärmemenge einen noch beträchtlicheren Einfluss als oben angenommen ausüben würde. Nun besitzt der Wasserdampf eine ganze Menge von Absorptionsbändern im Ultraroth, wovon ein bei $\lambda = 2,64$ sehr nahe an dem Kohlensäureband bei $2,6 \mu$ fällt. Dieses Band ist relativ unbedeutend, dagegen fällt das Band bei $\lambda = 4,5 \mu$ in's Gewicht, welches ziemlich entfernt von den nächsten Wasserdampfbändern $2,64 \mu$ bzw. $5,5 \mu$ liegt. Ebenso ist die Absorption des Wasserdampfes bei $\lambda = 14,5$ gegen diejenige der Kohlensäure unbedeutend. Wenn man ein solches Absorptionsband näher untersucht, findet man nach LANGLEY,¹⁾ dass es in mehrere Linien, deren Seiten unscharf sind, zerfällt (vgl. Fig. 3). Bei zunehmender Dicke der durchstrahlten Schicht verbreitern sich diese Linien, und dadurch wächst

¹⁾ LANGLEY: Rep. Brit. Ass. 1894, 465.

die Absorption. Ausserdem treten an der Seite der alten Linien neue auf, welche früher wenig hervortraten. Nun ist es nicht gerade wahrscheinlich, dass auch da, wo solche Liniensysteme des Wasserdampfes und der Kohlensäure teilweise koïncidieren, wie im Bande X, welches durch Fig. 3 dargestellt wird, gerade die Absorptionslinien aufeinander fallen würden. Und im Allgemeinen im ganzen Spektrum ist es nicht wahrscheinlicher, dass der Wasserdampf einen grösseren Teil von der für Kohlensäure eigentümlichen Strahlung absorbiert, als von der Totalstrahlung, sondern eher umgekehrt. Von einem Teil des Spektrums aber, nämlich für Wellenlängen über $16\ \mu$ wissen wir nach den Untersuchungen von RUBENS und ASCHKINASS,¹⁾ dass der Wasserdampf eine sehr grosse Absorption besitzt, und in dieser Beziehung sich

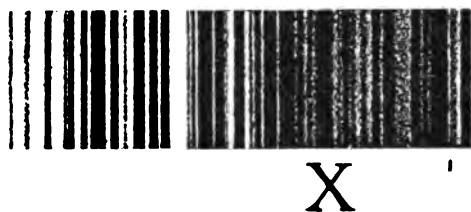


Fig. 3.

ungefär wie Steinsalz verhält, während keine merkliche Absorption der Kohlensäure auf diesem Gebiet sich bisher gezeigt hat. Es ist demnach natürlich die oben angeführten, für die Absorption durch Steinsalz nicht korrigierten, Ziffern bei der Berechnung der Absorption der Kohlensäure zu verwenden. Auf diese Weise erhält man folgende Zahlen:

Kohlensäuremenge	0	0,25	0,5	1,0	2,0	4,0
Temperaturänderung	— 14,5	— 6,0	— 3,2	0	+ 4,0	+ 9,9,

welche nach dem vorhin gesagten wahrscheinlicherweise eher zu gering als zu gross sind. Dabei ist in Betracht zu ziehen, dass der Wasserdampf sehr stark mit zunehmender Höhe abnimmt, was aus folgenden Daten über die Dampfmenge in Kilogram in

¹⁾ RUBENS und ASCHKINASS l. c. S. 598.

einer Säule von einem Quadratmeter Durchmesser, und 1000 Meter Höhe zwischen folgenden Höhen hervorgeht (v. BEZOLD, l. c.):

Höhe: 0 1000 2000 3000 4000 5000 6000 7000 8000

Dampf: 6,34 3,8 2,46 1,63 1,15 0,61 0,31 0,12.

Damit möge verglichen werden, dass bei den Versuchen von RUBENS und ASCHKINASS die entsprechende Wasserdampfmenge etwa 0,44 Kilogram betrug, also die totale Wasserdampfmenge über 7000 M. Höhe ohne Zweifel überstieg.

Da nun die Wirkung der Kohlensäure und des Wasserdampfes hauptsächlich auf die starke Abnahme der Strahlung in den höchsten Schichten beruht, so kommen diejenigen Spektralbezirke, für welche die Absorption des Wasserdampfes mässig ist, sehr wenig in Betracht, und nur die am stärksten absorbierten Strahlengattungen, wie z. B. die über $16\ \mu$ liegenden, können als der Kohlensäureabsorption und der Strahlung der Erde (einschliesslich der Luft) entzogen betrachtet werden. Dadurch wird die Unsicherheit in der obigen Berechnung, welche aus mangelnder Kenntniss der Wasserdampfabsorption herrührt, viel geringer, als man von vornherein vermuten könnte.

Wie ich in meiner früheren Abhandlung hervorgehoben habe, wird die Wirkung der Kohlensäure dadurch verstärkt, dass durch die Temperaturzunahme eine Erhöhung des Wasserdampfgehalts der Luft erfolgt, wodurch die Wärmeabsorption gesteigert wird. Dadurch kommt eine sekundäre Temperatursteigerung, welche bei niederen Temperaturen etwa ein Drittel, bei hohen ein Sechstel der Kohlensäurewirkung, nach meiner alten Berechnungsweise, ausmacht. Zieht man diesen Bruchteil von den alten Ziffern ab, so erhält man nach der alten Schätzung für eine Abnahme der Kohlensäuremenge der Atmosphäre zur Hälfte bzw. eine Zunahme derselben auf das dreifache des jetzigen Wertes eine Temperaturänderung von $-4,0$ bzw. $+7,0$ Grad Celsius. Die neue Berechnung ergibt für dieselben Fälle $-3,2$ bzw. $+7,1$ Grad Celsius. Die alte Berechnungsweise ergab also nahezu dieselben Zahlen wie die neue. Obwohl die nötigen Daten für eine genaue Berechnung des Einflusses von Wasserdampf auf die Absorption

der Erdstrahlung nicht vorliegen, glaube ich jedoch die genannte erhöhende Wirkung des Kohlensäureeffektes in 1896 nicht überschätzt zu haben. Es kommt ja übrigens hauptsächlich auf die Grössenordnung an, und in dieser Beziehung hat die Neuberechnung die alten Werte, wie man sieht, vollkommen bestätigt.

Nebenumstände, welche die Kohlensäurewirkung beeinflussen.
In erster Linie haben wir die Wolken zu betrachten. Die Hauptmasse derselben (Cumuli) befindet sich auf einer Höhe von im Mittel etwa 1900 Meter, einem Druck von etwa 0,8 des Druckes an der Meeresoberfläche entsprechend. Für die Wolken, welche beinahe wie schwarze Körper Wärme von langen Wellen ausstrahlen, gelten nahezu dieselben Bedingungen wie für die Erdoberfläche. Bei einer eventuellen Kohlensäurezunahme wird folglich ihre (mittlere) Temperatur nahezu denselben Veränderungen unterworfen sein, wie diejenige der Erdoberfläche. In dieser Beziehung kann man folglich die oben angeführte Berechnungsweise auch für das wolkenbedeckte Land gelten lassen.

Andere Verhältnisse treten ein, wenn wie EKHOLM¹⁾ wahrscheinlich gemacht hat, die Menge der Wolken, besonders in den Polargegenden und im Sommer, bei einer Zunahme des Kohlensäuregehaltes der Atmosphäre abnehmen würde. Da die Wolken für Sonnenstrahlung gar nicht als nahezu schwarze Körper angesehen werden können, sondern einen grossen Teil der einstrahlenden Sonnenwärme zurückhalten, so würde eine Abnahme der Wolkenmenge einer (relativ starken) Temperaturerhöhung entsprechen.

Ungefähr ebenso liegen die Verhältnisse für die schneebedeckten Erdteile. Nimmt die Temperatur zu, so verschwindet die Schneedecke, welche einen grossen Teil der Sonnenstrahlung zurückwirft. Dadurch erfolgt eine sekundäre Temperatursteigerung von einem ganz bedeutenden Betrag. Demzufolge wird eine Änderung des Kohlensäuregehaltes ihren Einfluss am aller stärksten da geltend machen, wo die Schneedecke auch zur Zeit starker Sonnenstrahlung (im Frühling und Sommer) liegen bleibt. Da-

¹⁾ EKHOLM: Quarterly Journ. of the R. Met. Soc. Vol. 27, Jan. 1901.

durch wird die Temperaturverschiedenheit zwischen polaren und äquatorialen Gegenden zufolge einer Kohlensäurezunahme teilweise ausgeglichen werden, wie dies thatsächlich während der Eozenzeit stattfand.

Auch andere Umstände tragen dazu bei. Die bei Kohlensäurezunahme erfolgende sekundäre Wirkung des Wasserdampfes ist ohne Zweifel um so kräftiger, je geringer der absolute Betrag des Wasserdampfes in der Luft ist, wie schon oben angedeutet wurde. Infolgedessen ist diese Sekundärwirkung auch bedeutend grösser in polaren als in äquatorialen Gegenden. Weiter wird bei steigender Wärmeabsorption der Luft auch die Erwärmung der höheren Luftschichten sowohl zufolge der Sonnen- wie zufolge der Erdstrahlung zunehmen. Dies gilt besonders für diejenigen Gegenden, wo die Strahlung am intensivsten ist, nämlich die äquatorialen. Dadurch werden in kohlensäurereichen Zeiten die Temperaturdifferenzen zwischen Pol und Aequator in den höheren Luftschichten, in Gegensatz zu denjenigen an der Erdoberfläche, verschärft gegen die jetzigen Verhältnisse erscheinen. Demzufolge werden gleichzeitig stärkere Luftströmungen in diesen Schichten entstehen, welche warme Luft zu den Polen vom Aequator führen und die Temperatur ausgleichen. Dagegen sollte man das umgekehrte für die von den unteren Luftströmen getriebenen Meeresströmungen vermuten. Abgesehen von diesem letzten Umstand scheinen alle anderen zu einer Ausgleichung der Temperatur auf der Erde bei Kohlensäurezunahme zu wirken.

Wie TYNDALL betreffs der Wirkung des Wasserdampfes mit grossem Nachdruck hervorgehoben hat, gleicht dieser durch seine Absorptionswirkung die Unterschiede in der Temperatur zwischen Tag und Nacht, zwischen Winter und Sommer bedeutend aus. Dasselbe gilt, wie ohne weiteres ersichtlich, auch für die Kohlensäure, wie ich schon früher betont habe.

Batologiska iakttagelser II.

Af BENGT LIDFORSS.

I en föregående uppsats,¹⁾ som hufvudsakligen behandlade Söderåsens *Rubus*flora, framhöll jag, att en närmare undersökning af Romeleåsen förmodligen skulle erbjuda åtskilligt af batologiskt intresse. Efter att under somrarne 1899 och 1900 i olika riktningar ha genomströfvat Romeletrakten, framlägger jag härmed de batologiska resultaten af de i denna trakt gjorda iakttagelserna och begagnar samtidigt tillfället att meddela några erfarenheter, som sedan min sista publikation ytterligare vunnits genom fortsatta kulturförsök i Lunds botaniska trädgård.

Vid undersökningen af Romeletrakstens flora ha anträffats flera för provinsen nya *Rubi corylifolii*, hvilka dock, på ett par undantag när, kunnat identifieras med redan förut beskrifna former. I sjelfva verket torde man utan öfverdrift kunna påstå, att det numera ej finnes synnerligen stor utsigt att i Skåne upptäcka för vetenskapen eller ens för den skandinaviska floran nya *Rubus*-former. Detta hindrar emellertid icke, att kändedom om de i Skåne anträffade *Rubus*-formernas *utbredning* i provinsen, särskildt hvad *Rubi corylifolii* beträffar, fortfarande är ganska bristfällig. Ännu ofullständigare är vår kunskap om *corylifoliernas* *utbredning* på kontinenten; vi veta visserligen, att en mängd af våra svenska *corylifolii* åter uppträda i Danmark,

¹⁾ Batologiska iakttagelser, K. Vet. Akad. Öfversigt 1899 N:o 1. p. 21—35.

och att åtskilliga äfven anträffats i Nordtyskland och i England, men hvarje försök att bestämdt angifva det utbredningsområde, som en art eller en form faktiskt besitter, strandar på våra bristande kunskaper härvidlag.

Hvad som här sagts om *Rubi corylifolii* gäller för öfrigt äfven om många andra grupper af de svartfruktiga *Rubi*, ja man torde utan öfverdrift kunna påstå, att det för närvarande ej finnes en enda svartfruktig *Rubus*-art, hvars utbredningsområde är fullkomligt eruieradt. Till en del beror detta på slägtets märkvärdiga polymorfism, som helt naturligt tvingat batologerna att i första hand koncentrera sin uppmärksamhet på särskiljandet och begränsandet af former och formkretsar, till en del äfven derpå, att batologerna i olika länder ej sällan försmått det inbördes samarbete, som skulle kunnat förebygga att en arts vetenskapliga namn allt efter språkdistriktet är underkastadt hardt när samma vexlingar som dess folkliga benämning.

Man torde emellertid på goda grunder kunna påstå, att den svenska *Rubus*-forskningen allt sedan offentliggörandet af F. ARESCHOUG's klassiska arbete *Some observation on the genus Rubus*¹⁾ glidit ur det stadium, då formbeskrifningen står främst på dagordningen. Hvad som nu är af största intresse, torde vara dels kultur- och korsningsförsök, dels fastslåendet af de beskrifna formernas utbredning inom och utom Skandinavien, eller med andra ord att på släktet *Rubus* tillämpa den särskildt af WETTSTEIN och MURBECK med så stor framgång använda morfologiskt-geografiska metoden.

Att här närmare ingå på denna forskningsmetods väsen och mål ligger ej inom planen för denna uppsats; jag hänvisar i detta hänseende till WETTSTEIN's utmärkta arbete »Grundzüge der geographisch-morphologischen Methode der Pflanzensystematik» (Jena 1898). Hvad WETTSTEIN här särskildt betonar: att när det gäller utforskandet af en arts affiniteter och fylogeni det enbart morfologiska betraktelsesättet är otillräckligt och måste kompletteras af en möjligast noggrann känne-

¹⁾ Lunds universitets årskrift, Tom. XXI.

dom om artens geografiska utbredning — detta gäller helt visst äfven för släktet *Rubus*.¹⁾

Men just på denna punkt äro, såsom jag redan framhållit, våra kunskaper ganska bristfälliga. Till och med för ett så in-
skränkt område som Skåne äro de i litteraturen förekommande uppgifterna om *Rubus*-formernas utbredning skäligen ofullständiga och på den grund äfven vilseledande. Då förf. på grund af mångåriga exkursioner i Skånes *Rubus*förande distrikt är i tillfälle att i icke oväsentlig mån komplettera de på denna punkt föreliggande uppgifterna, tillåter jag mig att i det följande meddela en jemförande översigt af *Rubus*-formernas utbredning i Skåne, i förhoppning att möjligen andra personer skola känna sig manade att på samma sätt undersöka andra delar af vårt land. En sådan batologisk kartläggning torde, hvad Sverige beträffar, ej höra till det omöjliga, och skulle helt visst kasta ljus öfver många för närvarande dunkla förhållanden.

På det stadium, som Skånes batologi för närvarande befinner sig, knyter sig hufvudintresset till *Rubi corylifolii*, och jag meddelar dertill att börja med en förteckning på de i Skåne hittills anmärkta corylifolierna för att sedermera ge en allmän översigt af *Rubus*-florans karaktär i de olika delarne af provinsen.

Med afseende på nomenklaturen har jag anslutit mig till den af ARESCHOUG införda, mindre af prioritetshänsyn än fast-
mera därför att ARESCHOUG's uppdelning och anordning af *R. corylifolii* tills datum torde vara den mest adekvata.

De former, som äro nya för provinsen utmärkas genom fetstil, nya lokaler med spärrad stil.

¹⁾ Af mycket stor betydelse vore derjemte att genom rationellt bedrifna korsningsförsök få en inblick i bastardbildningens betydelse för artbildningen inom släktet, olika arters benägenhet att hybridisera, afkommas egenskaper o. s. v. Författaren bedrifver sedan tre år tillbaka dylika försök, hvilka redan delvis utfallit positivt, och för hvilka kommer att redogöras vid ett annat tillfälle. — Att för närvarande, så länge snart sagdt hvarje spår af experimentella underlag fattas, uppställa vidtåfvande teorier om *Rubus*arternas hybrida härstamning, torde från vetenskaplig synpunkt vara skäligen omotiveradt.

I. Skånes *Rubi corylifolii*.

Rubus cæsius L. Af denna art, som är utbredd öfver hela Skåne med undantag af furubygden förekomma en mängd formerändringar, hvilka emellertid hittills föga uppmärksammas. NEUMAN ¹⁾ anför för Skåne några former, bland hvilka särskildt märkas *f. lobata* med djupt inskurna femtaliga turionblad (från Kullen) samt *f. ramosa*, hufvudsakligen utmärkt genom sina redan första året blommande turioner. Denna form, som från Danmark är känd under namnet *f. præcurrens* F. & G., förekommer synnerligen yppig och ovanligt rikt fruktificerande mellan Skabersjö och Ryd.

En ganska anmärkningsvärd form är *f. glandulosa* FOCKE: blomskaft och foderblad tätt beklädda med röda glandelhår; äfven turionerna rikligt beklädda med glandelhår och borst. — Hallandsås vid Karstorp. — Påminner habituellt icke obetydligt om svaga former af *Rubus Bellardii* W. & N., men kan ej gerna uppfattas som hybrid, då *Rubus Bellardii* fullkomligt saknas i vestra Sverige och formen dessutom är ytterst rikligt fruktbarande.

En *f. grandiflora* med nästan dubbelt så stora blommor som hufvudformen växer vid Tostarp på Söderåsen.

Rubus corylifolius F. ARESCH.

1. *R. *nemoralis* F. ARESCH. var *acuminatus* LINDBL. — Denna form är jemte *R. nemoralis* v. *permixtus* F. ARESCH. den i Skåne mest utbredda corylieformen och saknas endast i furubygden samt på det egentliga slättlandet. *R. acuminatus* förekommer flerstädes på Hallandsås, är vanlig på hela Kullahalfön från Helsingborg och Vegeholm till Mölle, uppträder, ehuru sparsamt på den annars coryfoliefattiga Söderåsen, är mycket spridd på Romeleåsen, hvarifrån den strålar ut i norr till Fogelsång och Reften, i söder till Charlottenlund och i öster öfver

¹⁾ Anteckningar angående Rubusfloran i nordvestra Skåne etc. Bot. Notiser 1885. Jfr. NEUMAN, Berättelse om en botanisk resa till Hallands Väderö etc. K. Vet. Ak. Öfversigt 8, p. 45—83.

Andrarum fram till Stenshufvud och Linderödsåsen, på hvars östra sida den är mycket ymnig; återfinnes i norr kring Kristianstad. Jemte *R. * Wahlbergii* ARESCH. är *R. acuminatus* den af Skånes *corylifolii*, som bäst synes kunna motstå köldens inverknings; så t. ex. finnes den, ehuru sparsamt, på nordsidan af Linderödsåsen, liksom äfven den synnerligen ymniga *Rubus*-vegetation, som mångenstädes uppträder på Romeleåsens nordsida, nästan uteslutande bildas af *R. acuminatus* jemte *R. Wahlbergii* och *R. suberectus* ANDERS. — Utom från Sverige är *R. acuminatus* känd från Danmark och Nordtyskland; sjelf har jag sett den så långt söderut som vid Plauen i sachsiska Vogtlandet, men om dess verkliga utbredningsareal vet man för närvarande så godt som intet.

2. *R. nemoralis* F. ARESCH. v. *acutus* LINDEB. — Mellan Bökeberg och Roslätt (i södra Skåne) anträffades sommaren 1899 en *Rubus*-form, som mycket nära öfverensstämmer med *R. acutus* LINDEB. sådan denna form utdelats af sin namngifvare i Herb. Rub. Scand. fasc. II n:o 47 (från Bohuslän), och som utan tvifvel bör hänföras till denna varietet. *R. acutus* påminner, såsom redan F. ARESCHOUG framhållit,¹⁾ ganska mycket om *R. cæsius*, och särskildt Bökebergsformen erinrar genom bladens serratur och de dagglå småfrukterna i så hög grad om denna art, att man med skäl kan ifrågasätta, huruvida icke denna *R. acutus* är en hybrid mellan *R. cæsius* och *R. nemoralis* var. *acuminatus*, om hvilken formen för öfrigt i mycket erinrar. Den rika fruktsättningen — småfrukterna äro hos Bökebergsformen både talrika och stora — utgör i och för sig icke något bevis mot den hybrida härkomsten, då andra otvifvelaktiga korsningsprodukter mellan *R. cæsius* och *R. corylifolius* föra väl utbildade frukter.

Kullaformen af *R. acutus*, hvilken LINDEBERG sjelf (1887) på ort och ställe förklarar vara en typisk *R. acutus* LINDEB., öfverensstämmer ej fullt med den i exsikkaterna utdelade formen, utan närmar sig något mera *R. acuminatus*. Det samma gäller,

¹⁾ Some observations p. 57.

hvad de blombärande grenarne beträffar, en form, som sommaren 1899 anträffades i södra Skåne mellan Ryd och Skabersjö, ungefär $\frac{1}{2}$ mil vester om Bökebergslokalen, och som äfven måste hänföras till *R. acutus* LINDEB. Från Kullaformen afviker denna *R. acutus* endast genom ännu bredare, djupt hjertlika uddblad (på turionbladen) samt genom ofantligt stora, koniska frukter af samma färg som hos *R. acuminatus* (ej daggbå). Kulturförsök, som företagits med denna form, ha utfallit på ett mycket egendomligt sätt, hvarom närmare på annat ställe i denna afhandling.

Till *R. nemoralis* F. ARESCH. var. *acutus* LINDEB. hänföres af ARESCHOU, ¹⁾ och utan tvifvel med full rätt, en form, som växer på södra sidan af Hallandsås, vid Karstorp, tillsammans med *R. cæsius* och *R. nemoralis* var. *permixtus* F. ARESCH. På grund af sin svagare beväpning kommer denna form *R. cæsius* närmare än andra former af *R. acutus*, och då den till sina karaktärer är fullkomligt intermediär mellan *R. cæsius* och *R. nemoralis* v. *permixtus*, torde den med stor sannolikhet böra uppfattas som hybrid mellan dessa båda arter. Detta bestyrkes ytterligare genom kulturförsök, som med formen i fråga företagits i Lunds botaniska trädgård. Genom sådd af frön från Karstorpslokalen har erhållits en form, som genom sina högt bågböjda turioner, bladens serratur och färg, blomställningens form o. s. v. så påtagligt erinrar om *R. permixtus*, att det genetiska sambandet dem emellan ej kan betviflas. Den i botaniska trädgården uppdagna formen afviker från den vildt växande äfven genom konstant tretaliga turionblad och nästan fullkomlig sterilitet; ej en enda småfrukt har observerats under de tio år den blommat i botaniska trädgården.

Utom i Skåne och i Bohuslän förekomma äfven på ostkusten, t. ex. i Östergötland *corylifolius*-former, som närmast äro att hänföra till *R. acutus* LINDEB., men som åtminstone delvis torde utgöras af hybrider mellan *R. cæsius* och former af *R.*

¹⁾ l. c. p. 56.

nemoralis. — Utanför Sverige äro *acutus*-liknande former iakttagna i Danmark; ¹⁾ med Kullaformen fullt öfverensstämmande *R. acutus* har förf. iakttagit flerstädes i mellersta Tyskland: Thüringen, Weida; Sachsen, Cossengrün.

3. *R. *nemoralis* F. ARESCH. v. *acutangulus* F. ARESCH. — En form, som påtagligen tillhör denna varietet, växer i närheten af Lindholmen. *R. acutangulus* är, som redan FRIDERICHSEN och GELERT påpekat, mycket nära beslägtad med *R. permixtus* F. ARESCH.

4. *R. *nemoralis* F. ARESCH. v. *permixtus* F. ARESCH. (Synonymik se K. FRIDERICHSEN, Bot. Centralblatt Bd LXXI, 1897). — I nordvestra Skåne är denna form icke synnerligen allmän. (Hallandsås: Karstorp, Kullaberg: Bökebolet, Björkeröd, Jonstorp.) Desto mera spridd är den deremot i trakten kring och söder om Romeleåsen, t. ex. vid Björnstorp, Sandby, Reften, Lingebjer, Kabelljung, mellan Räfstad och Sturup, kring Fjällfotasjön, Lindved, mellan Marieberg och Ahlstad, Gabelljung, flerstädes i Slimminge socken samt utmed södra kusten mångenstädes från Dybecks skogshus till Charlottenlund. I östra Skåne utom på den klassiska fyndorten (Stenshufvud) utmed Linderödsåsen flerstädes från Degeberga till Maltesholm.

R. nemoralis v. *permixtus* är en synnerligen väl markerad form, som, åtminstone i Skåne, visar föga tendens att variera, och bortsedt från den mycket närstående *R. acutangulus*, aldrig kan förblandas med andra former. *R. permixtus* eger en mycket vidsträckt utbredning; i Sverige förekommer den, utom i Skåne, med säkerhet i Blekinge (Karlskrona); i Danmark och Nordtyskland är den ganska spridd och i Böhmen utgör den på hela sydsidan af Erzgebirge mellan Eger och Bodenbach den vanligaste *corylifolius*-formen. Exemplar, som jag insamlat i dessa trakter, öfverensstämma till alla delar med den skånska formen.

¹⁾ K. FRIDERICHSEN & O. GELERT: Danmarks og Slesvigs Rubi, Bot. Tidskrift 16 Bind. 1—2 Hefte (1887) p. 121 och 125.

R. nemoralis F. ARESCH. var. *Lidforsii* GELERT. Genom beväpning och växtsätt ansluter sig denna form till föregående, men erinrar å andra sidan genom det i en lång spets utdragna uddbladet om *R. acuminatus*. *R. Lidforsii* skiljes dock lätt från båda genom den långa, smala, ända till spetsen bladiga blomställningen, de blombärande grenarnes ofta fem-taliga blad, den mjuka hårbeklädnaden på bladens undersida o. s. v. — På Romeleåsens södra utlöpare har denna form en ganska vidsträckt utbredning från Torup öfver Näsbyholm och Frankhult ända ned till Charlottenlund. Saknas i öfriga delar af provinsen, men uppträder åter på Bornholm och på Rügen.

5. *R. nemoralis* F. ARESCH. var. *Ruedensis* nov. var. — Turioner långa, krypande, rundadt femkantiga, klädda med täta, nästan raka, från sidorna starkt hoptryckta taggar blandade med sparsamma glandler och borst. Turionernas blad femtaliga, till färg och härighet öfverensstämmande med dem hos *R. permixtus* F. ARESCH., men med bredt hjertlikt uddblad. Blomgrenar håriga, längs öfre hälften beklädda med skaftade glandler; dess blad mycket ofta femtaliga. Blomställning vanligen enkel, klaselik, blomgrenar med talrika glandelhår. Blommor hvita med breda kronblad; ståndare längre än stiften med glatta knappar. Foderblad före och vid fruktmognaden tryckta intill den vanligen väl utvecklade frukten.

R. Ruedensis röjer på flera sätt en tydlig släktskap med *R. permixtus* F. ARESCH. från hvilken den dock är väl skild genom turionernas bredt hjertlika uddblad och täta taggbeklädnad samt rikedom på glandler. Dessa karaktärer erinra i sin ordning om den af K. FRIDERICHSEN närmare afhandlade *R. fasciculatus* P. J. MÜLL. var. *scabrosus* P. J. MÜLL.,¹⁾ som dock i. c. uppgifves ega en stor, bred blomställning med utspärrade grenar, och som sålunda sväriligen kan vara identisk med den skånska formen.

Förekommer i södra Skåne mellan Ryd och Skabersjö. Exemplar från andra trakter har författaren ej sett.

¹⁾ l. c. p. 20—21 i separattrycket.

6. *R. *acupilosus* nov. subsp.

Turioner långa krypande, rundade — trubbigt femkantiga, väpnade med täta, olikstora, bakåtriktade, ofta till halfva sin längd håriga taggar med hoptryckt ullhårig bas. Turionen för öfrigt beklädd med täta glandelhår samt något glesare ullhår, ej sällan blåaktig af ett tunnt vaxöfverdrag. Turionbladen femtaliga, kort skaftade, starkt veckade, hasselliknande med en i gulgrönt stötande färg. Småbladen mycket kort skaftade, täckande hvarandra. Uddbladet med svagt hjertlik bas, stundom nästan cirkelrundt, med ofta större bredd än längd, 4—5 gånger längre än sitt skaft. Turionernas och de blombärande grenarnes blad på öfversidan gleshåriga, på undersidan skimrande sammetsludna. Blombärande grenar glest ullhåriga, med starka taggar och tre-fingrade blad. Blomställning klaslik, stundom kvastlik, föryngrande sig nedifrån, med sparsamma glandler. Kronblad hvita, medelstora. Ståndare längre än stiften med glatta knappar. Frukten af vexlande beskaffenhet, än dåligt utvecklad, än temligen väl utbildad, bestående af glatta småfrukter.

Förekommer i mängd på Romeleåsens östra sida mellan Mauritsorp och Kogshult, samt vid Lindved (*f. subumbrosa*).

En synnerligen anmärkningsvärd form, som bland skånska *R. corylifolii* intar ungefär samma isolerade ställning som t. ex. *R. *hallandicus* GABR. Bland det rika Rubusmaterial, jag varit i tillfälle att se från Sverige och utlandet, har ej funnits någon form, med hvilken *R. acupilosus* skulle kunnat identifieras.

7. *R. *Balfourianus* BLOX. — I Skåne förekommer denna form endast i nordvestra delen, från Helsingborg, Allerum och Vegeholm öfver hela Kullahalfön, samt vid Barkåkra, Förslöf och Spannarp i Engelholmstrakten. De från andra områden bekanta varieteterna *roseus* F. & G., *serotinus* LINDEB. och *Lübeckii* LINDEB. saknas fullständigt i Skåne; deremot påträffas på Kullen mellan Kockenhus och Björkeröd former, som synas bilda en öfvergång mellan *R. Balfourianus* och *R. dumetorum* WHE., *var. tiliaceus* HGE. Den typiska (skånska) formen är

mycket spridd i Danmark, Tyskland och England, men gränserna för dess utbredning äro obekanta.

8. *R. *ruderalis* F. ARESCH. Utom på den klassiska lokalen vid Stenshufvud förekommer denna form i Skåne flerstädes på Linderödsåsens östra sida från Degeberga till Maltesholm; dessutom på Romeleåsens östra sida i närheten af Åkarp samt vid Näsbyholm. För öfrigt har *R. *ruderalis* en afgjordt östlig utbredning (Karlskrona, Kalmar, Borgholm enl. Some obs. p. 62). Utbredning utanför Skandinavien obekant.

En genom bladens skarpa serratur, den långbladiga blomställningen och de rent hvita blommorna lätt igenkänlig form.

9. *R. Wahlbergii* ARRH. — Liksom *R. nemoralis* v. *acuminatus* F. ARESCH. är *R. Wahlbergii* spridd öfver alla provinssens *Rubus*förande distrikt; sitt centrum i Skåne synes den dock ega på Romeleåsen på hvars nord-, vest- och sydsida den uppträder i ofantlig myckenhet. — *R. Wahlbergii*, som i Sverige går ända upp till Stockholm och i Norge till Kragerö och Arendal (Some obs. p. 63) synes äfven på kontinenten ega en vidsträckt utbredning; sjelf har författaren samlat fullt typiska exemplar i södra delen af Sachsen (Coschütz) och i norra Böhmen (Kleinkahn).

10. *R. maximus* F. ARESCH. var. *cordatus* F. ARESCH. (*R. rosantus* LINDEB. **eriocarpus* LINDEB.). — Romeletrakten vid Lindved; mellan Gillestugan och Linedal; Torup (skuggform). — En mycket egendomlig form, lätt igenkänlig på de violetta taggarne och de ofta 7-taliga, om *R. pruinosis* ARRH erinrande turionbladen. I Skandinavien förut känd från Bohuslän och Norge (Some obs. p. 71), men ej anträffad utanför skandinaviska halfön.

11. *R. maximus* F. ARESCH. v. *raduloides* F. ARESCH. — Helsingborg (Jfr Batol. iaktt. pag. 31).

12. *R. maximus* F. ARESCH. var. *Mortensenii* F. & G.

Turioner bågbojda, ej krypande, trubbkantiga eller nästan trinda, glatta, väpnade med glesa, rakt utstående, temligen svaga

taggar; bladen 3—5-fingrade, på båda sidor gröna; uddbladet rundadt, bredast på midten, med något hjertlik bas. Blomställning kort, med långa gråfiltade blomskaft, utan eller med kortskaftade glandler. Kronbladen stora, bredt äggrunda, blekröda. Små frukter, vanligen få.

Förekommer: hufvudsakligen i Romeletrakten, der den är ganska ymnig kring Yddingesjön såsom vid Holmeja, Yddinge, Bökeberg, Roslätt, Torup, Näsbyholm; på Linderödsåsen flerstädes mellan Degeberga och Maltesholm; på Kullahalfön mellan Södåkra och Glimminge.

*R. *Mortensenii*, som redan för omkring femton år sedan af FRIDERICHSEN och GELERT urskildes i Danmark, anses af sina namngifvare vara identisk med den i Bohuslän allmänt förekommande *R. maximus* v. *raduloides* F. ARESCH. (*R. rosanthus* LINDEB. var. *leio-carpus* LINDEB.). Ehuru dessa former utan tvifvel äro närbeslägtade, torde de dock böra hållas åtskilda, då hos bohusländska *R. raduloides* turionbladens uddblad är djupt hjertligt och bladen för öfrigt på undersidan klädda af en tät hårfilt. Med större skäl skulle man kunna föra *R. Mortensenii* till den af G. BRAUN från Harz beskrifna *R. dumetorum* WHE. c. *orthostachys* G. BRAUN, som synes ega en vidsträckt utbredning i norra och mellersta Tyskland.

13. *R. maximus* F. ARESCH. var. *egregiusculus* F. & G. — Turioner kantiga eller färade, blad temligen, små på undersidan ofta gråaktigt filtudna, med rombiskt uddblad; blomställning ofta förlängd, bladig. — Charlottenlund på hafsstranden (1889). Enligt F. & G. flerstädes i Danmark; på Rügen vid Sassnitz (förf. 1898).

14. *R. maximus* F. ARESCH. var. *stipularis* F. ARESCH. — Med säkerhet hittills endast känd från Pålshö och Höganäs. Nya lokaler: Hittarp, Allerums skogshus, båda i nordvestra Skåne. — Utbredning för öfrigt obekant.

15. *R. maximus* F. ARESCH. var. *rotundifolius* F. ARESCH. — Utom på den klassiska lokalen i närheten af Stenshufvud har jag anträffat denna form mellan Baskemölla och Wik

(på ostkusten) samt dessutom i mellersta Skåne vid Wollsjö. — En synnerligen vacker form, utmärkt genom sina nästan cirkelrunda småblad och de stora, hvitsippliknande blommorna. Blommar mycket tidigt, förliden sommar (1900) redan i mitten af juni. Frukter synnerligen väl utbildade, vid mognaden omslutna af fodret. — Ej anträffad utanför Skåne.

R. maximus F. ARESCH. var. *pruinus* ARRH. — Utom vid Kullaberg förekommer denna intressanta *Rubus*form fullt typisk i Romeletrakten vid Björnstorp. Björnstorpsformen är mycket kraftig med starkt håriga turioner och väl utvecklade, vid mognaden purpurskimrande frukter. *R. pruinus* som förmodligen är att uppfatta som en hybrid mellan *R. idoeus* och *R. Wahlbergii* resp. *R. acuminatus* (jfr ARESCHOU, Some obs. p. 80) är numera känd från de flesta *Rubus*förande provinser i Sverige (Skåne, Blekinge, Småland, Östergötland, Södermanland, Bohuslän); närbeslägtade, om icke fullt identiska former förekomma äfven i Danmark och Tyskland.

16. *R. maximus* F. ARESCH. var. *angiocarpus* F. ARESCH. — Södra Skåne: Kabelljung; Lingeby; Puggehusen $\frac{1}{2}$ mil norr om Lund (Fil. Stud. EDWIN MALMSTRÖM). De skånska formerna öfverensstämma fullkomligt med den bohuslänska. Detta synes deremot, såsom redan NEUMAN framhållit, icke varit fallet med den form från Danmark, som FRIDERICHSEN och GELERT i sitt exsickatverk utdelat (n:o 50) under benämningen *R. Wahlbergii* ARRH. v. *cyclophylla* (LINDEB.) = *R. Wahlbergii* f. *superinsularis* \times *cæsius*. Af H. HOFFMANN uppgifves *R. angiocarpus* (*R. cyclophyllus* LINDEB.) för Sachsen, men då denna bestämning förmodligen grundar sig på danska exemplar, torde den få anses något tvifvelaktig. Med full säkerhet torde man därför tillsvidare endast kunna uppge *R. angiocarpus* från Skåne och Bohuslän.

17. *R. *maximus* F. ARESCH. var. *silvestris* F. ARESCH. — En form som i allo synes öfverensstämma med *R. silvestris* från den klassiska lokalen (Kullen), förekommer i närheten af Skabersjö. Utbredning för öfrigt obekant.

18. *R. *imitabilis* K. FR. — På skandinaviska halfön hittills endast anträffad på Kullen. (Jfr batol. iakt. p. 32). För öfrigt i Danmark (F. & G.).

19. *R. *maritimus* F. ARESCH. var. *oratus* F. ARESCH. — Synes i Skåne vara inskränkt till de båda lokaler som uppgifvits i Some obs., Hallands Väderö och Torekov. På den förstnämnda lokalen har formen under de sista femton åren högst betydligt utvidgat sitt område. — Temligen spridd i Bohuslän, men utbredning för öfrigt obekant.

20. *R. *maritimus* F. ARESCH. v. *hallandicus* Gabriels. — Söderåsen (Jfr batol. iakt. p. 29). Utbredning för öfrigt: Halland, flerstädes; Bornholm; enligt NEUMAN ¹⁾ är den af FRIDERICHSEN från Sleswig och Fyen beskrifne *R. *hoplites* identisk med *R. *hallandicus*.

21. *R. *bahusiensis* SCHEUTZ. v. *nitens* LINDEB. — Ej sällsynt i Bohuslän och norra Halland; i Skåne hittills endast funnen på Hallandsås. Utanför Sverige på Jyllands vestkust (F. & G.) samt enligt H. HOFFMANN äfven i Sachsen; troligen flerstädes i Tyskland.

22. *R. *subvestitus* nov. subsp.

Turioner nedliggande från bågböjd bas, ofta violettbruna, rundadt femkantiga med temligen starka likformiga taggar och strödda glandler och hår. Blad femfingrade, långt skaftade, med smala stipler, mörkgröna, med hårig, svagt sammetsskimrande öfversida och filtluden undersida; uddbladet nästan cirkelrundt med kort spets, ofta med större bredd än längd; de nedre sidobladen kort, de öfre ovanligt långt skaftade. Blomgrenar kantiga, glest håriga med trefingrade blad. Blomställning enkel, klaslik, dess grenar filtludna med talrika glandler. Blommor temligen små, rödaktiga. Foderblad filtludna med gråhvita kanter. Ståndarsträngar glatta, längre än stiften. Frukter af ett fåtal glatta småfrukter.

Genom håriheten, turionernas färg, blomställningens form och sjelfva växtsättet erinrar *R. *subvestitus* i hög grad om

¹⁾ Om trenne Rubi från mellersta Halland, Bot. Not. 1888 p. 52—60.

svaga former af *R. vestitus* WH. & N. Å andra sidan påminna de blombärande grenarne icke obetydligt om *R. plicatus* WHE., och man kunde på grund häraf känna sig frestad att inordna denna form som varietet under *R. *bahusiensis* SCHEUTZ., derest icke den egendomliga hårigheten gäfvade den ett för *bahusiensis*-kretsen alltför främmande utseende.

*R. *subvestitus* är i Sverige endast funnen i södra Skåne vid Roslätt, der den förekommer på en inskränkt lokal i ett par temligen små buskar. Under sådana omständigheter skulle jag tvekat att öfverhufvud taget omnämna denna form, så vida jag ej haft säkerhet för att den eger en vidsträcktare utbredning. I Lunds botaniska institutions herbarium förvaras nemligen exemplar af en *Rubus*-form, som prof. ARESCHOUG insamlat vid Flensburg och som af honom betecknats såsom *R. corylifolius ad vestitum vergens*. Dessa exemplar öfverensstämma fullkomligt med den här som *R. *subvestitus* uppförda formen, som helt visst förekommer på andra orter.¹⁾

*R. *eluxatus* NEUM. — Sommaren 1889 anträffade förf. i klippskrefvor på södra sidan af Kullaberg en *Rubus*, som tycktes närma sig *R. eluxatus* NEUM. och som Rektor NEUMAN vid ett besök på ort och ställe förklarade för en form af denna art. På den ifrågavarande lokalen är växten numera utrotad (till följd af klippornas bortsprängning), men exemplar uppdragna ur frön från Kullaloken finnas sedan flera år tillbaka i Lunds botaniska trädgård. Ehuru den skånska formen i flera hänseenden afviker från den halländska, ansåg jag den ej böra uppföras under någon särskild benämning, då den endast anträffats i några numera förstörda buskar, och den anfördes därför i min föregående uppsats som en form af *R. eluxatus* NEUM. I fjol somras (1899) anträffades emellertid vid Bokskogen samt mellan Bokskogen och Torup en form som är fullkomligt identisk med den l. c. som *R. eluxatus* anförda Kullaformen. En närmare undersökning såväl af Torupsformen som af de numera

¹⁾ Deremot är *R. *subvestitus* icke identisk med de former som F. & G. i sina exsikkater utdelat som *R. cæsius* × *vestitus*.

mycket kraftiga buskarne i Lunds botaniska trädgård har ådaga-lagt, att olikheten mellan den halländska och den skånska formen är så pass stor, att den senare bör uppföras som särskild varietet, nemligen

23. *var. subnitidus nov. var.* Turioner runda eller femkantiga, bågböjda, tätt väpnade med raka starka taggar, och dessutom klädda med kortskaftade glandler och glesa borst. Bladen 3—5-taliga, tunna, glänsande glatta, med uddbladet afsmalnande mot basen och bredast mot spetsen. Blombärande grenar håriga, deras blad 3-taliga med ofta rombiskt uddblad. Blomställning enkel klaslik eller på kraftigare grenar pyramidformigt utdragen, bladig med långt utspärrade grenar. Kronblad temligen små, djupröda. Småfrukter glatta, till stor del fel-läende.

R. eluxatus v. subnitidus erinrar ganska mycket å ena sidan om *R. nitidus* WH. å andra sidan om *R. bahusiensis v. nitens* och torde kunna betraktas som ett led mellan *R. eluxatus* och *R. bahusiensis*. Utanför Skåne synes denna form ännu ej vara anmärkt.

24. *R. dumetorum* WH. *var. tiliaceus* LGE. och

25. , , *nudus* F. ARESCH. äro på skandinaviska halfön hittills endast funna i Kullatrakten. Åtminstone *R. tiliaceus* är med säkerhet känd från flera ställen i Danmark.

26. *R. *progenerans* LIDFORSS. — Hittills endast funnen vid Mölle.

* *

II. Rubushybrider.

De i Sverige förekommande *Rubus*arterna synas, med undantag af vissa *Rubi corylifolii*, icke ega någon benägenhet att hybridisera i vårt land.¹⁾ Vid Mölle fiskläge t. ex. växa i hvar-andras omedelbara närhet *R. insularis*, *R. polyanthemus*, *R. Lindebergii*, *R. Radula*, *R. Balfourianus*, *R. Wahlbergii*, *R. acuminatus* m. fl., men några intermediära former, som kunde tolkas som hybrider, ha ännu icke anträffats, oaktadt sådana former helt visst ifrigt efterspanats af de många *Rubus*intressenter, som besökt denna trakt.²⁾ På Söderåsen bildar *R. Lindebergii* dels samman med *R. scanicus*, dels med *R. vestitus* kilometerlånga snår, men några mellanformer stå icke att finna. Det samma gäller om icke-*corylifolii* i provinsens öfriga *Rubus*distrikt.

Deremot uppträda, utom den mycket spridda *R. cæsius* \times *ideus*, i Skåne flerstädes former, hvilka måste uppfattas som primära hybrider mellan *R. cæsius* och någon *corylifolius*form. Dessa former äro i regeln ganska karakteristiska: genom sitt växtsätt erinra de mycket om *R. cæsius*, så att ett ovant öga lätt nog skulle kunna taga dem för luxurierande former af denna art, men de skiljas lätt genom den starkare taggbeklädnaden, de merendels fem-taliga turionbladen samt blommornas form och färg. Mycket ofta äro dessa hybrider *forme præcurrentes* d. v. s. blomgrenarne frambryta från de under samma år bildade turionerna; de fruktificera stundom ganska rikligt.

I min föregående *Rubus*uppsats hafva anförts tvenne sådana hybrider, nemligen *R. cæsius* \times *Lidforsii* från Charlottenlund

¹⁾ Huruvida de i vårt land förekommande *Corylifolii*, såsom Focke, Friederichsen, Gelert o. a. hålla för sannolikt, äro racer, som differentierat sig ur genom korsning uppkomna former af *R. cæsius* och icke-*corylifolii*, är en fråga för sig, som för öfrigt knappast torde kunna afgöras annat än på experimentell väg.

²⁾ Den af Areschoug beskrifna *R. Lindebergii* v. *sericeus* som endast anträffats i ett par buskar torde måhända dock vara en hybrid mellan *R. Lindebergii* och *R. insularis* eller *R. Lindebergii* och *R. polyanthemus*.

och *R. cæsius* \times *acuminatus* från Kullen. Den senare hybriden har under förliden sommar (1900) anträffats äfven i södra Skåne, på en utlöpare af Romeleåsen vid Bjersgård, en ganska kraftig form, hvars härstamning i den angifna riktningen är om möjligt ännu tydligare än Kullaformens.

Till denna kategori af hybrider hör såsom jag förut sökt visa (pag. 64) *R. acutus* från Hallandsås, hvilken är att uppfatta som en *R. cæsius* \times *permixtus*.

En annan hithörande form, som anträffats mellan Bokskogen och Yddingesjön torde böra uppfattas som

R. cæsius \times *Mortensenii*.

Erinrar habituelt, särskildt hvad turionerna beträffar, om *R. Mortensenii*, men skiljes lätt genom turionernas beväpnung, som utgöres af små täta taggar, blandade med kortskaftade glandler. Turionbladens stipler stora bladlika, uddbladet bredt, rombiskt. De blombarande grenarna, som ofta frambryta från de under samma år bildade turionerna, erinra genom bladform och blomställning påfallande om *R. cæsius*. Blommor temligen små, ljusröda. Småfrukter i regeln felsläende. — Denna hybrid kommer, såsom man på förhand kunde vänta, mycket nära *R. cæsius* \times *Lidforsii*.

Utom *R. cæsius* synes äfven *R. idæus* i vårt land ega en viss benägenhet att hybridisera med *R. corylifolii*. ARESCHOUG har redan i Some Obs. anført de skäl som tala för att *R. pruinusus* ARRH. motsvarar kombinationen *R. idæus* \times *Wahlbergii* resp. *R. idæus* \times *acuminatus*; en analog form, som otvifvelaktigt bör tolkas som en *R. idæus* \times *permixtus* har af författaren beskrifvits från södra Skåne (Brasakallt—Charlottenlund, Batolog. iaktt. p. 34—35).

Hybrider mellan *R. corylifolii* inbördes torde ej heller saknas i vårt land, men äro af naturliga skäl svåra att med bestämdhet dechifrera. Vid Stenshufvud växa några buskar af en form, som gör intrycket af att vara en mellanform mellan

*R. *ruderalis* och *R. *rotundifolius*. Antagandet att formen i fråga verkligen är en hybrid mellan nämnda *corylifolii* vederlägges ej direkt af den temligen rika fruktsättningen, då vi hos andra släkten finna talrika exempel på fruktbara bastarder. Men å andra sidan är den möjligheten icke utesluten att vi här stå inför en språngvis uppkommen varietet, en s. k. mutation i HUGO DE VRIES' mening. Såsom i sista kapitlet af denna uppsats skall visas, tala åtskilliga genom kulturförsök vunna erfarenheter för att sådana stötvis d. v. s. med ett slag uppkomna mutationer spela en viktig rol vid artbildningen inom släktet *Rubus* — en åsigt som ARESCHOUG på teoretiska grunder redan för femton år sedan med särskildt eftertryck gjort gällande.¹⁾

* * *

III. De svartfruktiga *Rubus*formernas utbredning i Skåne.

Ehuru Skåne utan jemförelse är Sveriges *Rubus*rikaste landskap, finns det dock äfven i denna provins stora områden, der de svartfruktiga *Rubus*formerna fullkomligt saknas. Afgörande härvidlag synas i främsta rummet två faktorer: å ena sidan dessa växters egenskap att i vårt land vara bundna vid mer eller mindre kuperad mark, å andra sidan deras relativt stora behof af värme och ljus. Den förstnämnda omständigheten är säkerligen i främsta rummet orsaken till att de svartfruktiga *Rubus*arterna — bortsedt från *R. cæsius* så godt som fullständigt saknas på det vidsträckta slättland som börjar $\frac{1}{2}$ mil söder om Helsingborg, derifrån öfver Landskrona, Lund och Malmö sträcker sig ned till Trelleborg. Härvid medverkar måhända äfven den omständigheten, att flertalet buskartade *Rubus*former mindre väl trifvas på lerjord; men denna faktor torde dock vara af underordnad betydelse, då de *Rubus*arter, hvilka odlas på den starkt lerhaltiga jorden i Lunds botaniska träd-

¹⁾ Some observ. p. 29, 111, 179.

gård, i allmänhet gå mycket väl till, blott de få växa på en sluttning eller hafva ett stöd att klättra emot.

Det jämförelsevis stora ljus- och värmebehovet orsakar å andra sidan att de ifrågavarande *Rubus*formerna i regeln saknas på nordsidan af de åsar, på hvilkas syd-, ost- och vestsida de bilda en vigtig del af vegetationen. Nordsidan af Hallandsås, Kullaberg, Söderåsen och Linderödsåsen äro därför i det närmaste fullkomligt *Rubus*fria eller hysa på sin höjd strödda exemplar af *R. suberectus* ANDERS., *R. plicatus* WHE. och någon gång *R. *acuminatus* LINDBL. (Linderödsåsen). Endast den sydligast belägna åsen, Romeleåsen eger äfven på nordsidan t. ex. kring Veberöd en rik *Rubus*vegetation, men denna utgöres, utom af *R. plicatus* och *R. suberectus*, uteslutande af *R. *Wahlbergii* ARRH. och *R. *nemoralis* F. ARESCH. v. *acuminatus* LINDBL. d. v. s. just de former, hvilkas geografiska utbredning på den skandinaviska halfön sträcker sig längst mot norr. — I den egentliga furubygden förekomma endast *R. plicatus* (sällsynt) och *R. suberectus* — uppenbarligen en följd af klimatets hårdhet.

Den skånska *Rubus*floran grupperar sig därför helt naturligt på fem distrikt, hvilka sammanfalla med de åsar, som från nordvest till sydost genomstryka provinsen: Hallandsås, Kullaberg, Söderåsen, Romeleåsen och Linderödsåsen med Stenshufvud.

Det rikaste af dessa *Rubus*distrikt är utan tvifvel Kullahalfön,¹⁾ för såvidt nemligen hänsyn tages icke blott till antalet former utan äfven till individrikedomen. Specifikt karakteristiska för detta område äro dock, utom *R. pyramidalis* KALTENB. och den som hybrid suspekta *R. Lindebergii* P. J. MÜLL. var. *sericeus* F. ARESCH. endast par *Rubi corylifolii*, nemligen *R. *dumetorum* v. *tiliaceus*, var. *nudus*, *R. *progenerans*, *R. *maximus* v. *stipularis*, *R. *imitabilis*. Alla dessa former, med undantag af *R. progenerans* och *R. stipularis* upp-

¹⁾ Området afgränsas mot vester ungefär af Skåne—Hallands-jernvägen mellan Helsingborg och Vegeholm.

träda åter i Danmark. Af de öfriga på Kullahalfön förekommande *Rubus*formerna återfinnas *R. polyanthemus* och *R. scanicus* på Söderåsen; *R. insularis*, *R. *maximus v. silvestris*, *v. pruinosis*, *v. Mortensenii*, *R. *subnitidus* på Romeleåsen och dess södra utlöpare; *R. nitidus* och *R. Balfourianus* på Hallandsås. *R. plicatus*, *R. suberectus*, *R. Lindebergii*, *R. Radula*, *R. *Wahlbergii*, *R. *nemoralis v. permixtus* och *v. acuminatus* äro spridda öfver större delen af provinsens *Rubus*distrikt.

Hallandsåsområdet ¹⁾ flora kan så väl hvad art- som individrikedom beträffar betecknas som en reducerad Kullafloa, i det att den hufvudsakligen representeras af *R. Lindebergii*, *R. nitidus*, *R. Wahlbergii*, *R. nemoralis v. acuminatus* och *v. commixtus*. Till dessa sälla sig dessutom två bohuslänska former, nemligen *R. bahusiensis v. nitens* och *R. maritimus v. ovatus*. Den senare bildar äfven ett af de karakteristiska elementen i Väderöns *Rubus*flora, hvilken för öfrigt fullkomligt öfverensstämmer med Kullahalföns, ehuru *R. polyanthemus* och *R. nitidus* saknas.

Vända vi oss dernäst till Söderåsens ²⁾ *Rubus*flora, så finna vi, att denna i främsta rummet utmärkes genom sin fattigdom på *R. corylifolii*. Af dessa uppträda endast tre former, nemligen de öfver hela provinsen spridda *R. Wahlbergii* och *R. nemoralis v. acuminatus* samt den på skandinaviska halfön hittills endast i Halland anträffade *R. hallandicus*. Dessa *corylifolii* förekomma alla tre sparsamt på Söderåsen. Ytterst allmän är deremot *R. Lindebergii*, som i oerhörd myckenhet finnes på Söderåsens vestra och sydvestra sida från Björnekulla klint ända ned till Axelväld. Ett stycke söder om Björnekulla sällar sig till *R. Lindebergii* *R. Radula*, som fortsätter söderut något bortom Äfvarp, der den viker för *R. scanicus*, medan *R. Lindebergii* är lika ymnig som förut. *R. scanicus*, hvilken, som redan förut

¹⁾ Området sträcker sig från Rösjöholm längs sydsidan af åsen öfver Margaretorp och Försjöf fram till Torekov samt från Torekov till Båstad.

²⁾ Detta område sträcker sig från Björnekulla klint i norr ungefär till Axelväld i söder.

antydts, synes ha sitt egentliga utbredningscentrum på Söderåsen, intager här en högst betydlig areal; från Äfvarp följer den åsslutningarna ända fram till Kågeröd, men stiger derjemte upp på åsplatån fram till Stenestad kyrka (633 fot ö. h.) och går derifrån ända bort till Gålarp. Söder om Kågeröd—Stenestad-vägen försvinner snart *R. scanicus* för att här ersättas af *R. vestitus*, som från Ingelstorp till Ebbarp jemte *R. Lindebergii* bildar det dominerande elementet. Denna art (*R. vestitus*), som på skandinaviska halfön endast är funnen här, bildar jemte *R. scanicus* och *R. Lindebergii* samt den stora fattigdomen på *R. corylifolii* det mest utmärkande draget i Söderåsens *Rubus*-flora. — På nord- och östsidan af Söderåsen förekomma mycket få *Rubi*, hufvudsakligen *R. plicatus* och *R. suberectus*, samt derjemte strödda buskar af *R. Lindebergii* (Röstånga, Tostarp, Ljungby, Klöfveröd). Anmärkningsvärd är förekomsten af *R. polyanthemus* vid en gårdsgård något söder om Ljungby (1899).

I skarp motsats till Söderåsen utmärkes Romeledistriktet ¹⁾ genom sin stora rikedom på *corylifolius*-former, medan de andra *Rubus*-arterna försvinna eller träda i bakgrunden. Utom de oundgängliga *R. plicatus* och *R. suberectus* förekomma af icke-*corylifolii* endast *R. insularis*, *R. Lindebergii* och *R. Radula*. *R. Lindebergii* uppträder dels på åsens östra sida vid Ljungby (i närheten af Toppeladugård), dels på det kuperade området söder om åsen vid Yddinge och Bökeberg. *R. Radula*, som af gammalt varit uppgifven för Romeleklint, har af mig endast anträffats på en inskränkt lokal på Romeleåsens sydsida (Frankhult). Mycket utbredd är deremot, enligt hvad jag sistlidna sommar (1900) kunnat konstatera, *R. insularis*, som på sydöstra sidan af Romeleåsen spelar samma dominerande rol, som *R. vestitus* och *R. scanicus* på vissa partier af Söderåsen. *R. insularis* är nemligen ytterst allmän öfver hela det område,

¹⁾ Till detta område räknas icke blott sjelfva åspartiet, utan äfven det söder om åsen belägna distriktet mellan Torup och Krageholm samt Dalby—Reften-trakten i norr.

hvars gränser angifvas af ortnamnen Saggarp, Ryssgård, Bjersgård, Waktholmen, Snöftarp, Mauritstorp, Kogshult, Bonnarp. Troligen är dess område betydligt större.

Högst intressant är Romeletraktens *corylifolius*-flora, hvars märkligare former dock hufvudsakligen uppträda på det kuperade område, som sträcker sig söder om den egentliga åsen från Skabersjö i vester till Krageholm i öster. På sjelfva åsen uppträda knappast andra *R. corylifolii* än *R. Wahlbergii*, *R. acuminatus* samt der och hvar *R. permixtus*, hvilka alla tre äro spridda öfver hela provinsen. På området söder om åsen möta vi deremot dels tvenne bohusslänska former, som saknas i provinsens öfriga distrikt, nemligen *R. maximus v. cordatus* och *R. maximus v. angiocarpus*,¹⁾ dels några andra *corylifolii*, hvilkas förekomst på Skandinaviska halfön synes inskränkt till Romele-distriktet: *R. acupilosus*, *R. nemoralis v. Ruedensis*, *R. Lidforssii*, *R. egregiusculus*, *R. subvestitus*. Gemensamma för Romeletrakten och Kullahalfön äro *R. eluxatus v. subnitidus* och *R. maximus v. silvestris*, för Romeleåsen och Linderödsåsen *R. *ruderalis*, för alla tre områdena *R. maximus v. Mortensenii*.

På Linderödsåsen (med Stenshufvud) finna vi dels de öfver hela provinsen spridda *R. Lindebergii* och *R. Radula*, dels *R. thyrsoideus* och *R. sulcatus*, hvilka för öfrigt saknas i provinsen men längre norrut återfinnas såväl på ost- som vestkusten. Af *R. corylifolii* möta oss här tvenne för trakten karakteristiska former, *R. *ruderalis* och *R. maximus v. rotundifolius*, af hvilka dock den förra fullt typisk återfinnes såväl på Romeleåsen som i Blekinge och Småland, medan *R. rotundifolius* för öfrigt endast är känd från en lokal i det inre af Skåne (Wollsjö). De från Kulla- och Romeletrakten välbekanta *R. Wahlbergii*, *R. acuminatus*, *R. permixtus* och *R. Mortensenii* återfinnas äfven här.

För lättare orientering skulle meddelas följande öfversigt, i hvilken dock endast hänsyn tagits till *R. Corylifolii*:

¹⁾ Denna form förekommer äfven på området norr om åsen vid Lingebyer och Puggehusen (Jfr. pag. 70).

Former (i Skåne) endast uppträdande på Hallandsås:

R. *maritimus v. ovatus.

R. *bahusiensis v. nitens.

Former (i Skåne) endast uppträdande på Kullahalvön:

R. *dumetorum v. tiliaceus.

› › › nudus.

› *progenerans.

› *imitabilis.

› *maximus v. stipularis.

Former (i Skåne) endast uppträdande på Söderåsen:

R. *maritimus v. hallandicus.

Former (i Skåne) endast uppträdande i Romeletrakten:

R. *nemoralis v. Lidforsii.

› › v. Ruedensis.

› *maximus v. angiocarpus.

› › v. cordatus.

› › v. egregiusculus.

› *acupilosus.

› *subvestitus.

Former (i Skåne) endast uppträdande på Linderödsåsen:

R. *maximus v. rotundifolius.¹⁾

Former gemensamma för Kullahalvön och Hallandsås:

R. *Balfourianus.

För Kullahalvön och Romeleåsen:

R. *eluxatus v. subnitidus.

› *maximus v. pruinatus.

› › v. silvestris.

För Linderöds- och Romeleåsen:

R. *ruderalis.

Former spridda öfver hela provinsen:

R. *Wahlbergii.

› *nemoralis v. acuminatus.

› › v. permixtus.

› *maximus v. Mortensenii.

¹⁾ I mellersta Skåne äfven vid Wollajö.

Vid första ögonkastet synes denna öfversigt ge ett stöd åt den med särskildt eftertryck af C. J. LINDBERG häfdade satsen, att hvarje i geografiskt hänseende afgränsadt område hyser sin särskilda (endemiska) *Rubus*flora. Så se vi t. ex. att Romeletrakten kan uppvisa 7 *corylifolii*-former, hvilka ej finnas eller åtminstone till datum ej äro funna i andra delar af provinsen. Kullahalfön hyser fem former af detta slag, Hallandsås två, Söderåsen en och Linderödsåsen (med Stenshufvud) likaledes en (om man, såsom icke orimligt synes, vill räkna Wollsjö till Linderödsdistriktet).

Hvad som här yttrats om *R. corylifolii* gäller äfven till en viss grad om de öfriga *Rubus*-formerna, åtminstone om man jemför ost- och westkusten. Så t. ex. uppträda i vestra Skåne *R. nitidus*, *R. polyanthemus*, *R. scanicus*, *R. vestitus*, hvilka alla saknas på ostkusten, som deremot i sin ordning kan uppvisa *R. sulcatus* och *R. thyrsoideus*, som saknas i vestra Skåne.

Denna utbildning af lokalfloror är emellertid i själfva verket endast skenbar och förvandlas, som F. ARESCHOUG framhåller, till en fullkomlig chimère, så snart man studerar släktets utbredning inom större områden. De senare årens undersökningar ha ytterligare bekräftat denna af ARESCHOUG upprepade gånger uttalade åsigt; det visar sig nu, att af alla i Skåne förekommande *Rubus*former det endast är ett par *R. corylifolii*, som hittills ej blifvit funna utanför provinsen; och med tanke på den sporadiska uppmärksamhet, som i allmänhet kommit *R. corylifolii* till del i Tyskland och England, kan man med fog vänta att återfinna dessa former utanför Skåne.

Men vid en jemförelse mellan den areal en gifven form intager i Skåne och den utbredning den eger för öfrigt, framträda ganska märkliga förhållanden. *R. angiocarpus* och *R. cordatus*, hvilka förekomma flerstädes i Romeledistriktet, öfverhoppa både Söderåsen, Kullahalfön och Hallandsås samt återfinnas först i norra Halland resp. Bohuslän. *R. hallandicus*, som uppträder flerstädes på Bornholm, saknas i östra och södra Skåne, men uppträder på Söderåsens nordvestra sida, öfverhoppar Kullahalfön

och Hallandsås för att åter uppträda i mellersta Halland. *R. Balfourianus*, som är spridd i Danmark och hela Nordtyskland, är i Skåne inskränkt till nordvestra delen. En annan *corylifolius*-form, *R. serrulatus* LINDEB., som likaledes är ytterst vanlig i norra och mellersta Tyskland, gör ett språng öfver hela Skåne och uppträder först i norra Halland. *R. bahusiensis v. subnitidus* uppträder på sydsidan af Kullaberg, saknas på Hallandsås och Söderåsen, men återfinnes i södra Skåne vid Torup. *R. insularis*, som utgör det karakteristiska elementet för Romelåsens östra sida, saknas fullkomligt på Linderödsåsen och Söderåsen, men återfinnes på Kullahalfön, liksom den äfven är utbredd i Danmark och Nordtyskland. De på kontinenten mycket utbredda *R. thyrsoides* och *R. sulcatus* finnas i Skåne endast i trakten kring Stenshufvud, men uppträda båda längre norrut såväl på östra som vestra kusten af skandinaviska halfön.

Dessa exempel, hvilkas antal lätt skulle kunna ökas, visa tydligt, att det med afseende på *Rubus*-arternas utbredning i Skåne råder en viss nyckfullhet, som är främmande för flertalet skandinaviska släkten. Man får ovilkorligen det intrycket, att dessa med så stora geografiska mellanrum uppträdande former i sjelfva verket äro att betrakta som *pionierer* för en inom en icke alltför afägsen tid påbörjad *invandring*. Äfven om man tar hänsyn till att *Rubus*-arternas spridning hufvudsakligen torde utföras af fåglar, så räcker detta dock ej till att förklara det *paradoxa* i många *Rubus*formers utbredning. Detta blir deremot till en viss grad begripligt, om vi antaga, att vi stå inför en växtgrupp, som just är i begrepp att göra en invasion på vår halfö.

Detta antagande upphöjes till full visshet genom direkta iakttagelser i naturen. I en föregående uppsats har jag anført, hurusom *R. dumetorum v. nudus* och *v. tiliaceus* samt *R. bahusiensis v. nitens* på sista decenniet högst betydligt utvidgat sin terräng i nordvestra Skåne. NEUMAN har i en intressant uppsats ¹⁾ skildrat den märkliga invasion, som *R. hallandicus* sedan

¹⁾ Om *tveane Rubi* från mellersta Halland. Bot. Not. 1887.

1872 gjort i mellersta Halland; formen uppträdde här först nämnda år vid den s. k. Möllegårdsbäcken i en buske (turion), blommade först 1875, men hade tolf år senare eröfrat icke blott åstranden på flere hundra alnar, utan äfven spridt sig till en närbelägen landsväg. Enligt hvad prof. ARESCHOUG benäget meddelat mig, har *R. Lindebergii* på de sista decennierna högst väsentligt utvidgat sitt område i östra Skåne, och detsamma är, enligt hvad jag från tillförlitligt håll erfarit, fallet med *R. Radula* i Höganästrakten.

Den omständigheten, att de svartfruktiga *Rubi* för närvarande äro i begrepp att utbreda sig på vår halfö, torde i sin ordning stå i nära samband med en egenhet, som utmärker vissa grupper af släktet och som skall beröras i nästa kapitel, den nemligen, att formbildningen inom vissa grupper af släktet *Rubus* för närvarande synes vara i full gång.

* * *

IV. Kulturförsök med svartfruktiga *Rubi*.

I Lunds botaniska trädgård odlas för närvarande ett par hundra *Rubus*-former, af hvilka flertalet äro kontinentala arter, som uppdragits af prof. ARESCHOUG. Förf., som började sina *Rubus*-odlingar 1887, har för närvarande omkring 100 former i kultur, af hvilka större delen äro skandinaviska. I detta samband skall endast redogöras för de resultat, som vunnits genom kulturförsök, anställda med svenska *Rubi corylifolii*.

Alla former ha uppdragits ur frön, som insamlats i det fria och derefter utsåts i kruka.

Följande *R. corylifolii* ha lemnat en afkomma, som till alla delar öfverensstämmer med den spontana formen:

- | | | | | | |
|----|---|------------------|----|-------------------|-------------------|
| R. | * | <i>nemoralis</i> | v. | <i>acuminatus</i> | (Kullen). |
| > | > | | v. | <i>permixtus</i> | > |
| > | > | | v. | <i>acutus</i> | > |
| > | > | | v. | <i>Lidforsii</i> | (Charlottenlund). |

R. *Balfourianus (Kullen).

- » *maximus v. silvestris (Kullen).
- » *maritimus v. ovatus (Bohuslän).
- » » v. hallandicus (Halland).
- » *bahusiensis v. nitens (Hallandsås).
- » » » (Bohuslän).
- » » v. serrulatus (Bohuslän).
- » *eluxatus (Halland).
- » » v. subnitidus (Kullen).
- » *dumetorum v. tiliaceus »

Ehuru dessa former hvad jordmån och andra ekologiska förhållanden beträffar befinna sig i en från den naturliga växtplatsen afvikande miliö, ha de dock ej i minsta mån förändrat sig under den tid de odlats i Lunds bot. trädgård.

En annan grupp bildas af sådana former, som vid frösådd lemnat en från moderplantan afvikande afkomma. Dit hör bl. a. den redan omnämnda *R. acutus* från Hallandsås, som med all sannolikhet är att uppfatta som en primär hybrid mellan *R. cæsius* och *R. permixtus*. Att den primära hybridens afkomma något afviker från moderplantan är ju mindre underligt, då det sedan länge är känt, att de primära bastardernas afkomlingar utmärka sig för stark variabilitet.

Till samma kategori som nu nämnda form hör äfven *R. cæsius* × *R. Lidforsii*. Vid utsäde ha af denna form erhållits tvenne typer, af hvilka den ena genom turionernas växtsätt och beklädnad, bladeus form o. s. v. i hög grad närmar sig *R. cæsius*, den andra deremot genom bågböjda (ej krypande) turioner, långt tillspetsadt uddblad o. s. v. går i riktning af *R. Lidforsii*.

Synnerligen egendomligt ha deremot de kulturförsök utfallit, som utförts med *R. progenerans* och för hvilka utförligt redogjorts i min ofta citerade uppsats. Hösten 1889 utsåddes ett trettiootal frön, som insamlats på fyndorten vid Mölle. Af de uppkomna plantorna öfverensstämde en del med den ursprungliga *R. progenerans*, medan en annan individgrupp, som betecknades med det provisoriska namnet *gymnetoides*, afvek genom

glesare beväpning på turionerna o. s. v., och slutligen erhöles en tredje form, *R. progenitus*, som genom turionernas nålfina taggar, den rikliga glandelbeklädnaden, uddbladets egendomliga form, de små blommorna o. s. v. intog en från de öfriga isolerad ställning.

År 1897 insamlades ånyo på fyndorten vid Mölle frön, som utsåddes samma höst. Resultatet har så till vida blifvit det samma som 1889, som äfven nu en polymorf afkomma erhållits, nemligen jemte typisk *R. progenerans* äfven, och i flera exemplar en väl markerad *R. gymnetoides*. *R. progenitus*, som i kulturernas form 1889 endast uppträdde i ett fåtal exemplar, saknades denna gång.

Af stort intresse är emellertid, att resultat, som visa en fullkomlig analogi med 1889 års kulturer af *R. progenerans*, erhållits med en annan skånsk *R. corylifolius*, nemligen *R. acutus* från Ryd. Af denna form utsåddes (i kruka) 1899 ett trettiotal frön, som kommo upp i slutet af mars 1900; groddplantorna utplanterades på kalljord i maj och ha under den gångna sommaren drifvit så pass kraftiga turioner, att man redan nu kan bilda sig en mening om deras morfologiska egenskaper. Några plantor synas fullkomligt öfverensstämma med moderväxten, andra afvika i analogi med *R. gymnetoides* genom glesare, mera ensartad beväpning, och andra slutligen tyckas tillhöra en från *R. acutus* fullkomligt skild typ, som deremot bildar en fullkomlig motsvarighet till *R. progenitus*. Turionerna äro hos denna form högt bägböjda, klädda med långa, nålfina taggar, blandade med talrika borst och glandelhår, bladen äro smala och bredast mot spetsen — allt karaktärer, som återfinnas hos *R. progenitus*.

Det är nu högst anmärkningsvärdt, att den ifrågavarande acutusformen äfven i morfologiskt hänseende kan sägas utgöra en parallelform till *R. progenerans*: den förhåller sig nemligen till *R. nemoralis* v. *acuminatus* alldeles på samma sätt som *R. progenerans* till *R. *Balfourianus*. *R. progenerans* afviker från *R. *Balfourianus* genom de täta, olikstora taggarne, glandelrikeligheten, det breda, hjertlika uddbladet, den rika blomställningen och de stora, koniska frukterna, som vid mognaden om-

slutas af fodret. Alldeles samma karaktärer är det som skilja den ifrågavarande *acutus*-formen från *R. acuminatus*.

Hur skall man nu förklara den egendomliga polymorfi, som utmärker afkomman af *R. progenerans* och *R. acutus*? Närmast till hands ligger onekligen det antagandet, att blommorna af *R. progenerans* och *R. acutus* på ort och ställe blifvit befruktade med pollen från andra arter och *R. progenitus*, *R. gymnetoides* och de med dem analoga formerna i *acutus*kulturerna vore då att uppfatta som i fria naturen uppkomna, primära bastarder. Men mot detta antagande uppresas sig betänkliga svårigheter. Det är för det första, såsom jag redan förut framhållit, ¹⁾ alldeles omöjligt att ange, hvilken på Kullaberg växande form som skulle kunna göras ansvarig för faderskapet till *R. progenitus*, enär denna form gör ett fullkomligt främmande intryck. Lika svårt är det att ange den form, genom hvars inblandning *R. gymnetoides* skulle ha uppstått. Då man vidare betänker att *R. gymnetoides* uppstått såväl i kulturerna från 1889 som i dem från 1897, inses lätt, att det ofvan framställda förklaringsförsöket måste uppgifvas. Ty det är helt enkelt omöjligt att förstå hvarför *R. progenerans* gång på gång skulle befruktas med främmande pollen, medan de i dess omedelbara närhet växande *Rubus*formerna vid kultur ge en fullkomligt ren och normal afkomma.

Då det är en känd sak att de primära bastardernas afkomma ofta utmärker sig för en stark variabilitet, kunde man måhända vara böjd för att uppfatta *R. progenerans* och *R. acutus* (från Ryd) såsom primära bastarder för att på detta sätt få en förklaring på afkommans utpreglade polymorfi. Men äfven mot en sådan förklaring uppresas sig betydande svårigheter. Visserligen synas många skäl tala för att *R. progenerans* är genetiskt förbunden med *R. Balfourianus* och *R. acutus* (från Ryd) med *R. acuminatus*, men att med någon sannolikhet utpeka den andra kontrahenten i den förbindelse som skulle leda till uppkomsten af *progenerans*- och *acutus*-formerna, är icke

¹⁾ Batol. iaktt. p. 28—29.

möjligt. Härtill kommer att båda dessa former utmärka sig för en fruktbarhet, hvars make man sällan eller aldrig påträffar hos *R. acuminatus* och *R. Balfourianus*. Att under sådana omständigheter uppfatta dessa former som bastarder, torde fullkomligt sakna vetenskapligt berättigande.

Deremot tala flera omständigheter för att *R. prognerans* och *R. acutus* (från Ryd) äro *muterande* arter i den mening HUGO DE VRIES i sitt nyligen utkomna arbete *Die Mutationstheorie*¹⁾ fattar denna term, och att *R. progenitus*, *R. gymnetoides* och deras parallelformer inom acutusserien äro att betrakta som *mutationer* d. v. s. språng- eller stötvis uppkomna arter. Sådana plötsligt uppdykande formförändringar ha sedan gammalt varit kända — DARWIN kallade dem som bekant *single variations* — men man har i allmänhet ej varit böjd att tillmätta dessa någon betydelse vid artbildningen. Enligt det åskådningssätt, som DE VRIES i det anförda arbetet häfdar, är det i främsta rummet dessa stötvis uppkomna mutationer, som äro af betydelse vid artbildningen, medan deremot variationen i vanlig mening — den »graduella», »fluktuerande», »individuella» variationen härvidlag är så godt som betydelselös. De vid mutationerna uppträdande förändringarne sträcka sig till alla organ och gå i alla möjliga riktningar, så att fördelaktiga, indifferentia och skadliga egenskaper uppstå om hvarandra. Så vidt man hittills kan döma, synes mutabiliteten uppträda periodiskt, så att samma växt under en viss period kan befinna sig i ett stabilt, en annan period i ett muterande stadium.

Jag skall vid detta tillfälle ej närmare ingå på den teoretiska delen i DE VRIES' arbete, hvilket för öfrigt torde vara bestämdt att bilda en vändpunkt i descendensteoriens historia, utan vill i detta samband endast fästa uppmärksamheten på några punkter i den experimentella delen, nemligen de iakttagelser som beröra *Oenothera Lamarckiana*. Denna *Oenothera*, som för öfrigt är nära beslägtad med *O. biennis*, är ett synner-

¹⁾ Die Mutationstheorie. Versuche und Beobachtungen über die Entstehung von Arten im Pflanzenreich von HUGO DE VRIES.

ligen märkligt exempel på en muterande växt. Under de tolf år, som DE VRIES odlat denna växt i Amsterdams botaniska trädgård, har den frambragt ej mindre än sju (7) stötvis uppkomna mutationer, som icke blott genom sina afvikande karaktärer utan äfven genom dessa karaktärers konstanta ärftlighet förhålla sig alldeles som »goda arter». Somliga af de på detta sätt uppkomna mutationerna (*O. Gigas*) synes vara lika väl rustade för kampen för tillvaron som moderväxten (*O. Lamarckiana*), andra äro behäftade med vissa ofördelaktiga egenskaper såsom ovanligt sköra stänglar (*O. rubrinervis*), dvärgartig växt (*O. nanella*), sterila ståndare (*O. lata*) o. s. v. Endast en af sju erhållna mutationerna (*O. scintillans*) visade sig vid utsäde icke konstant, utan gaf en polymorf afkomma (55 % *O. Lamarckiana*, 37 % *O. scintillans*, 7 % *O. oblonga*, 1 % *O. lata*).

Det är nu mycket frestande, att i de förut beskrifna *Rubus*-kulturna se en analogi till dessa *Oenothera*-kulturer, en analogi, som blir än mera iögonenfallande, om man erinrar sig, att *R. progenitus* liksom *O. lata* utmärker sig genom fullkomligt sterila ståndare. Enligt min öfvertygelse äro också *R. progenerans* och *R. acutus* (från Ryd) verkligen att betrakta som muterande arter. Ett strängt vetenskapligt bevis för denna åsigt kan för närvarande ej lemnas, då jag hittills ej haft tillfälle att som DE VRIES gjort med sina *Oenothera*-arter, i flera generationer odla dessa *Rubus*-former under kauteler, som fullkomligt utesluta befruktning med främmande pollen. Det är min afsigt, att snarast möjligt anställa sådana kulturer.

Hvad släktet *Rubus* beträffar, så är det af stort intresse, att ARESCHOUG redan i sitt för femton år sedan utgifna arbete »Some observ. on the Genus *Rubus*» sett sig föranlåten antaga, att artbildningen inom släktet *Rubus* ofta försiggår stötvis. Enligt ARESCHOUG är det hufvudsakligen förändringar i klimatet (och jordmånen) som hos de till Skandinavien invandrade formerna småningom frambragt de inre förändringar, som utåt plötsligt göra sig gällande i form af en stötvis verkande variabilitet d. v. s. mutabilitet.

Om nu en alltjemt pågående nybildning af former kan betraktas såsom gifven inom släktet *Rubus*, så följer redan här af, att detta slägte måste ega en bestämd tendens att utvidga sitt område. Ty i samma stund nya former med nya egenskaper uppstå är dermed äfven förutsättningen gifven för att dessa former skola kunna anpassa sig efter andra ekologiska förhållanden än de, som utgöra nödvändiga betingelser för moderväxtens existens.

Lund, december 1900.

Ueber Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen.

Von ERIK HOLMGREN.

(Mitgeteilt am 9 Januar 1901 durch A. LINDSTEDT.)

Es sei das System von linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(1) \quad \frac{\partial z_i}{\partial x} + \sum_k A_{ik}(x, y) \frac{\partial z_k}{\partial y} + \sum_k B_{ik}(x, y) z_k = 0$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, n)$$

vorgelegt mit der Annahme, dass $A_{ik}(x, y)$, $B_{ik}(x, y)$ gewöhnliche Potenzreihen mit reellen Koeffizienten sind, welche innerhalb des Gebietes $|x - x_0| < \varrho$, $|y - y_0| < \varrho$ konvergieren, wo x_0, y_0 ein Punkt der reellen xy -Ebene ist. Es sei ferner $\varphi_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ein System von Potenzreihen mit reellen Koeffizienten, welche für alle Werthe von y , die der Bedingung $|y - y_0| < \varrho$ genügen, konvergieren.

Nach dem CAUCHY'schen Existenzsatz wissen wir, dass es zu (1) ein und nur ein System von analytischen Integralen giebt, welches in der Umgebung des Punktes x_0, y_0 regulär ist und für $x = x_0$ in das System $\varphi_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) übergeht.

Es fragt sich nun, ob es überhaupt nur dieses Funktionensystem giebt, welches diesen Anfangsbedingungen genügt. Es wäre a priori denkbar, dass (1) von einem anderen

Funktionensystem befriedigt werden könnte, welches innerhalb eines gewissen Gebietes nebst einigen oder allen Ableitungen stetig ist, und welches diesen Anfangsbedingungen genügt. Bei vielen Anwendungen der Theorie der Gleichungssysteme (1) ist es von Bedeutung diese Frage näher zu untersuchen.¹⁾

Im Folgenden werden wir eine Methode angeben durch welche gezeigt wird, dass unter allen Integralsystemen, die innerhalb eines gewissen Gebietes $x_0 \leq x < x_0 + l$, $|y - y_0| < l$ definiert und nebst den ersten Ableitungen stetig sind, das analytische System das einzige ist, welches obigen Anfangsbedingungen genügt.²⁾

§ 1. Wir werden in diesem Paragraph einen Hülfsatz ableiten, welcher sich auf die analytischen Integrale des vorgelegten Gleichungssystems bezieht. In dem (reellen) Bereiche

$$|x - x_0| < \varrho, |y - y_0| < \varrho$$

ziehen wir eine Curve $x = g(y)$, wo $g(y)$ eine im Bereiche $|y - y_0| < \varrho$ konvergente Potenzreihe ist; wir nehmen an, dass diese die Gerade $x = x_0$ in zwei Punkten A und B schneidet, und dass sie also mit dieser Gerade ein Gebiet T einschliesst, welches z. B. rechts von AB gelegen ist.

Wir betrachten nun das analytische Integralsystem $z_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), welches den Anfangsbedingungen

$$z_i(g(y), y) = \psi_i(y) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ genügt;}$$

dabei bedeutet $\psi_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) gewöhnliche Potenzreihen mit reellen Koeffizienten, welche konvergiren, wenn $|y - y_0| < \varrho$.

Unser Hülfsatz lautet dann folgendermassen:

Wenn die Punkte des Segmentes AB der Curve $x = g(y)$ in einer gewissen Nähe $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| < a$ von (x_0, y_0) liegen, und $|g'(y)|$ kleiner als eine gewisse Grösse b für alle

¹⁾ Dieselbe Frage ist auch bei den allgemeinen partiellen Differentialgleichungen zu stellen.

²⁾ Hier ist also die Annahme gemacht, dass die Anfangswerthe gleichmässig angenommen werden. Lässt man diese Bedingung fallen, so kommt man auf Fragen die nicht in Betracht gezogen sind.

reellen und komplexen Werthe von y in dem Gebiete $|y - y_0| < a$ ist — die Zahlen a und b hängen nur von ρ und den oberen Grenzen der Koeffizienten von (1) ab —, so ist das Integral-system $z_i(x, y)$ innerhalb und auf der Grenze des Gebietes T regulär, unabhängig von der Wahl der Funktionen $\psi_i(y)$.

Bei dem Beweise nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die Curve eine Parabel von der Gleichung

$$x = g(y) = h - \frac{1}{2p}(y - y_0)^2,$$

ist, wo h einen Parameter bedeutet.

Wir führen nun in (1) neue unabhängige Veränderliche ein durch die Formeln

$$\begin{aligned} x' &= x + x_0 - g(y) \\ y' &= y. \end{aligned}$$

Die Funktionen $z_i(x, y)$, $A_{ik}(x, y)$, $B_{ik}(x, y)$ gehen dabei in Funktionen von x' , y' über, welche wir mit $\bar{z}_i(x', y')$, $\bar{A}_{ik}(x', y')$, $\bar{B}_{ik}(x', y')$ bezeichnen wollen. Das neue Gleichungssystem lautet dann

$$\begin{aligned} & (1 - \bar{A}_{11}g') \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial x'} - \bar{A}_{12}g' \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial x'} - \dots \\ & - \bar{A}_{1n}g' \frac{\partial \bar{z}_n}{\partial x'} + \sum_k \bar{A}_{1k} \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial y'} + \sum_k \bar{B}_{1k} \bar{z}_k = 0, \\ & - \bar{A}_{21}g' \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial x'} + (1 - \bar{A}_{22}g') \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial x'} - \dots \\ (2) \quad & - \bar{A}_{2n}g' \frac{\partial \bar{z}_n}{\partial x'} + \sum_k \bar{A}_{2k} \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial y'} + \sum_k \bar{B}_{2k} \bar{z}_k = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & - \bar{A}_{n1}g' \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial x'} - \bar{A}_{n2}g' \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial x'} - \dots \\ & - (1 - \bar{A}_{nn}g') \frac{\partial \bar{z}_n}{\partial x'} + \sum_k \bar{A}_{nk} \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial y'} + \sum_k \bar{B}_{nk} \bar{z}_k = 0. \end{aligned}$$

Durch Auflösung dieses Gleichungssystems in Bezug auf $\frac{\partial \bar{z}_i}{\partial x'}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) bekommen wir

$$(3) \quad \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial x'} + \sum_k \bar{C}_{ik}(x', y') \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial y'} + \sum_k \bar{D}_{ik}(x', y') \bar{z}_k = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Die Koeffizienten $\bar{C}_{ik}(x', y')$, $\bar{D}_{ik}(x', y')$ sind von der Form

$$\frac{f(x', y')}{A},$$

wo $f(x', y')$ ein Polynom vom Grade $(n-1)$ in $g'(y')$ ist, dessen Koeffizienten ganze rationale Funktionen der Koeffizienten von (2) sind, und

$$A = \begin{vmatrix} \bar{A}_{11}g' - 1, & \bar{A}_{12}g', \dots, & \bar{A}_{1n}g' \\ \bar{A}_{21}g', & \bar{A}_{22}g' - 1, \dots, & \bar{A}_{2n}g' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{A}_{n1}g', & \bar{A}_{n2}g', \dots, & \bar{A}_{nn}g' - 1 \end{vmatrix}$$

Um eine solche Umgebung von x_0, y_0 in der komplexen $x'y'$ -Ebene abzugrenzen, innerhalb welcher $\bar{C}_{ik}(x', y')$ und $\bar{D}_{ik}(x', y')$ in gewöhnliche Potenzreihen entwickelbar sind, betrachten wir die Ungleichungen

$$(4) \quad \begin{aligned} &|\{x' - x_0 + g(y')\} - x_0| < \varrho, \\ &|y' - y_0| < \varrho, \\ &|A - (-1)^n| < \varepsilon < 1. \end{aligned}$$

Bedeutet M die grösste der oberen Grenzen von $|A_{ik}(x, y)|$ und $|B_{ik}(x, y)|$ innerhalb des Bereichs $|x - x_0| < \varrho$, $|y - y_0| < \varrho$, so können wir immer eine nur von p, ε, ϱ und M abhängige kleine Zahl ϱ_1 so bestimmen, dass die Ungleichungen (4) erfüllt sind, wenn x', y' in dem Gebiete

$$(5') \quad \begin{aligned} &|x' - x_0| < \varrho_1 \\ &|y' - y_0| < \varrho_1 \end{aligned}$$

liegen und h so gewählt ist, dass

$$(5'') \quad h - x_0 < \varrho_1.$$

Die Koeffizienten von (3) sind dann in dem Gebiete (5') in gewöhnliche Potenzreihen von $(x' - x_0)$ und $(y' - y_0)$ entwickelbar.

Wir betrachten nun das innerhalb einer gewissen Umgebung von x_0, y_0 reguläre Integralsystem zu (3), welches für $x' = x_0$ sich auf das System $\psi_i(y') (i = 1, 2, \dots, n)$ reduciert. Um den Konvergenzbereich dieses Systems näher zu untersuchen, bilden wir das folgende Majorantensystem

$$\frac{\partial Z_i}{\partial x'} = \frac{M'}{1 - \frac{(x' - x_0) + (y' - y_0)}{\varrho_1}} \left(\sum_k \frac{\partial Z_k}{\partial y'} + \sum_k Z_k \right),$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

wo M' grösser als die grösste der oberen Grenzen von $|C_{ik}(x', y')|$, $|D_{ik}(x', y')|$ in dem Gebiete $|x' - x_0| < \varrho_1$, $|y' - y_0| < \varrho_1$ ist.

Wir bestimmen das majorante Integralsystem Z_i durch die Anfangsbedingungen

$$Z_i(x_0, y') = \frac{N}{1 - \frac{y' - y_0}{\varrho_1}},$$

wo $N \geq |\psi_i(y')| (i = 1, 2, \dots, n)$ im Bereiche $|y - y_0| < \varrho$.

Man sieht unmittelbar dass

$$Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n (= Z).$$

Zur Bestimmung von diesen Funktionen haben wir also die Gleichung

$$\frac{\partial Z}{\partial x'} = \frac{nM'}{1 - \frac{(x' - x_0) + (y' - y_0)}{\varrho_1}} \left(\frac{\partial Z}{\partial y'} + Z \right),$$

mit der oben angegebenen Anfangsbedingung.

Bilden wir nun, um die Potenzreihe für Z nach $(x - x_0)$ und $(y - y_0)$ zu erhalten, die Werthe der Ableitungen $\frac{\partial^{i+t} Z}{\partial x^i \partial y^t}$ für $x = x_0, y = y_0$, so finden wir dass N in diesen nur als gemeinsamer Faktor auftritt. Die Potenzreihenentwicklung für Z hat nun nach der allgemeinen Theorie einen gewissen Konvergenzbereich $|x' - x_0| < \varrho_2, |y' - y_0| < \varrho_2$. Weil N nur als Faktor der einzelnen Glieder auftritt, so ist ϱ_2 von N ganz unabhängig und hängt nur von ϱ_1 und M' ab. Da nun Z eine Majorante für $z_i(x', y') (i = 1, 2, \dots, n)$ ist, so folgt hieraus,

dass die Entwicklungen für $\bar{z}_i(x', y')$ in dem Gebiete $|x' - x_0| < \varrho_2$, $|y' - y_0| < \varrho_2$ konvergieren.

Wir gehen nun von $\bar{z}_i(x', y')$ zu $z_i(x, y)$ zurück. Wir haben

$$z_i(x, y) = \bar{z}_i(x - x_0 - g(y), y) \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Man findet nun leicht, dass wenn h die Ungleichung

$$h - x_0 < \varrho_3 \text{ erfüllt, wo } \varrho_3 \leq \begin{cases} \varrho_2 \\ \varrho_2^2 \\ 2p \end{cases},$$

so ist das System $z_i(x, y)$ regulär überall im Inneren und auf der Grenze des Gebietes T unabhängig von der Wahl der Funktionen $\psi_i(y)$ (da ϱ_3 von N unabhängig ist, und nur von ϱ , M und ε abhängt). Der Hilfsatz ist also bewiesen.

§ 2. Ehe wir zu der Eindeutigkeitsfrage übergehen können, müssen wir den Begriff des zu dem System (1) adjungirten Systems einführen. Wir bezeichnen die linken Seiten von (1) mit $F_i(z_1, z_2, \dots, z_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) und bilden den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^n u_i F_i(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

wo u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) Funktionen von x und y sind. Diese Funktionen bestimmen wir so, dass

$$(8) \quad \sum_{i=1}^n u_i F_i(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y},$$

wo

$$M = \sum_{i=1}^n \mu_i z_i \\ N = \sum_{i=1}^n \nu_i z_i.$$

Durch das Gleichsetzen der Koeffizienten von $\frac{\partial z_i}{\partial x}$, $\frac{\partial z_i}{\partial y}$ und z_i auf beiden Seiten von (8) finden wir

$$\begin{aligned}
 \mu_i &= u_i \\
 \nu_i &= \sum_k A_{ki}(x, y) u_k \\
 (9) \quad \frac{\partial \mu_i}{\partial x} + \frac{\partial \nu_i}{\partial y} &= \sum_k B_{ki}(x, y) u_k \\
 (i, k &= 1, 2, \dots, n).
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass die Funktionen u_i das System — das adjungirte System —

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_k A_{ki}(x, y) u_k \right) - \sum_k B_{ki}(x, y) u_k &= 0 \\
 (i &= 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

befriedigen müssen. M und N sind dann durch die Formeln

$$\begin{aligned}
 (11) \quad M &= \sum_{i=1}^n u_i z_i \\
 N &= \sum_{i,k=1}^n A_{ki} u_k z_i
 \end{aligned}$$

bestimmt.

§ 3. Nach diesen vorbereitenden Untersuchungen sind wir nun im Stande die Frage von der Eindeutigkeit zu behandeln.

Wir machen die Annahme, es existiere zu (1) ein zweites Integralsystem, welches denselben Anfangsbedingungen, wie das CAUCHY'sche Integralsystem genügt, und welches aus Funktionen besteht, die innerhalb eines gewissen Gebietes $x_0 \leq x < x_0 + l$, $|y - y_0| < l$ definiert sind, und daselbst nebst den Ableitungen, welche in der Differentialgleichung auftreten, stetig sind. Es folgt dann, dass es ein Integralsystem geben muss, welches für $x = x_0$ gleich Null ist; wir wollen nun zeigen dass ein solches System in einer gewissen Nähe von x_0, y_0 identisch gleich Null sein muss. Hieraus folgt dann, dass in dieser Umgebung von x_0, y_0 , das analytische System das einzige ist, welches den gegebenen Anfangsbedingungen genügt.

Es sei also $z_i (i=1, 2, \dots, n)$ ein Integralsystem, welches nebst den ersten partiellen Ableitungen in dem Gebiete $x_0 \leq x < x_0 + l$,

$|y - y_0| < l$ stetig ist, und welches sich für $x = x_0$ auf Null reduziert.

Wir betrachten die Curve $x = g(y) = h - \frac{1}{2p}(y - y_0)^2$, die so gelegen ist, dass die Fläche Γ , welche von der Curve und der geraden Linie $x = x_0$ eingeschlossen wird, innerhalb des Gebietes $x_0 \leq x < x_0 + l$, $|y - y_0| < l$ liegt; wir nehmen ferner an, dass $h - x_0 < \varrho'$; ϱ' ist kleiner als die Zahlen ϱ_3 (siehe p. 96), welche zu (1) und (10) gehören.

Bedeutet $u_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ein Integralsystem von (10), welches nebst den ersten Ableitungen innerhalb und auf der Begrenzung von Γ regulär ist, so hat man nach (8)

$$(12) \quad \iint_{\Gamma} \sum_{i=1}^n u_i \dot{F}_i(z_1, z_2, \dots, z_n) dx dy \\ = \int_{\gamma} \left\{ \sum_{i=1}^n u_i z_i dy - \sum_{i,k=1}^n A_{ik}(x, y) u_k z_i dx \right\},$$

wo das Doppelintegral über das Gebiet Γ und das Linienintegral längs der Begrenzung von Γ im positiven Sinne erstreckt ist. Da nun $z_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ein Integralsystem von (1) ist, welches für $x = x_0$ verschwindet, so bekommen wir

$$(13) \quad \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \sum_{i=1}^n u_i z_i - g'(y) \sum_{i,k=1}^n A_{ik}(x, y) u_k z_i \right\} dy = 0,$$

wo y_1 und y_2 ($y_2 < y_1$) die Ordinaten der Schnittpunkte zwischen der Curve und der Geraden $x = x_0$ sind.

Nach § 1 können wir nun n Systeme von Integralen des adjungierten Systems (10) bestimmen, welche innerhalb und auf der Begrenzung von Γ regulär sind, und welche durch die Anfangsbedingungen

$$(u_j^{(j)})_{x=g(y)} = \varphi_j(y), \quad (u_k^{(j)})_{x=g(y)} = 0, \quad j \neq k, \\ (j = 1, 2, \dots, n)$$

Da nun die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11}g' - 1, & A_{12}g', & \dots, & A_{1n}g' \\ A_{21}g', & A_{22}g' - 1, & \dots, & A_{2n}g' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}g', & A_{n2}g', & \dots, & A_{nn}g' - 1 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so ist längs dieser Curve

$$z_i = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Für jede Curve, deren Parameter h die Bedingung $h - x_0 < \varrho'$ befriedigt, lässt sich derselbe Schluss ziehen. Das Gebiet Γ wird von diesen Curven überdeckt und also folgt dass $z_i = 0$ überall auf Γ . Nach den vorher gemachten Bemerkungen ist also gezeigt, dass in Γ nur das CAUCHY'sche System existiert, welches der gegebenen Anfangsbedingungen genügt.

Mit Hülfe dieses Resultates gelangt man durch eine Koordinatentransformation zu dem folgenden.

Es sei (x_0, y_0) ein Punkt in dessen Umgebung die Koeffizienten von (1) regulär sind; durch diesen Punkt ist eine gerade Linie mit dem Richtungskoeffizienten μ gezogen. Wenn μ keine Wurzel der Gleichung

$$(18) \quad \begin{vmatrix} A_{11} - \mu, & A_{12}, & \dots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22} - \mu, & \dots, & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \dots, & A_{nn} - \mu \end{vmatrix} = 0$$

ist, so kann man von x_0, y_0 aus ein Segment AB derart abgrenzen, dass ein Integralsystem, welches an jeder Stelle des Segmentes Null ist, innerhalb eines dieses Segment einschliessenden Gebietes identisch gleich Null wird. (Das Integralsystem nebst den ersten Ableitungen muss natürlich in diesem Gebiete stetig sein.) Dieses Gebiet ist von zwei Curvenstücken begrenzt, welche durch A und B auf verschiedenen Seiten des Segments hindurch gehen, und welche in A Tangenten besitzen, deren Richtungskoeffizienten von μ verschieden sind.

Vermöge dieses Resultates können wir einige Aufschlüsse über die Begrenzung des Gebietes S in welchem das Integralsystem Null ist, erhalten. Es kommt dabei nur auf solche Theile der Begrenzung an, welche nicht mit der Begrenzung des Existensberiches G der Koefficienten von (1) zusammenfallen, und in deren Umgebung das System nebst den ersten Ableitungen überall stetig ist. Sei ferner C ein Punkt auf einem solchen Theile der Begrenzungcurve. Denken wir uns nun, es sei möglich durch C innerhalb S ein Liniensegment, dessen Richtungskoefficient nicht eine Wurzel der Gleichung (18) ist, zu ziehen. Da nun unsres Integralsystem an jeder Stelle dieses Segmentes Null ist, so können wir nach dem, was wir eben bewiesen haben, dem Punkte C ein kleines innerhalb S gelegenes Dreieck zuordnen, welches das Segment umschliesst und eine Ecke in C hat, und dessen durch C gehende Seiten nicht mit dem Segmente zusammenfallen. Betrachten wir nun diese Seiten, so können wir auch den Richtungen, welche durch sie bestimmt sind, solche Dreiecke zuordnen, innerhalb deren das Integralsystem Null ist u. s. w. Bei Wiederholung dieses Verfahrens, können zwei verschiedene Verhältnisse eintreten:

1) Die Dreiecke überdecken ein Gebiet, in dessen Inneren der Punkt C liegt, und innerhalb dessen das Integralsystem Null ist. Da kann also C nicht ein Punkt von S sein. Dieser Fall tritt ein, wenn die Gleichung (18) nur imaginäre Wurzeln besitzt. Man findet leicht unter Berücksichtigung dieses Resultates, dass innerhalb eines Gebietes, in welchem alle Wurzeln von (18) imaginär sind, unser Integralsystem überall Null sein muss, wo es stetig und mit stetigen ersten Ableitungen versehen ist.

2) Die Dreiecke überdecken ein Gebiet, welches sich zwei Richtungen durch C nähert, deren Richtungskoefficienten Wurzeln von (18) sind. (Dieser Fall tritt also ein, wenn (18) reelle Wurzeln hat). Der Winkel zwischen den beiden Richtungen, innerhalb deren das Gebiet liegt, muss kleiner oder gleich π sein. Denn im entgegengesetzten Falle könnten wir durch C eine Gerade ziehen, deren Richtungskoefficient keine Wurzel von (18) ist

und auf welcher wir ein innerhalb S gelegtes Segment abgrenzen könnten, dessen Mittelpunkt C ist. In der Umgebung dieses Segmentes ist das Integralsystem gleich Null; C kann also kein Begrenzungspunkt sein.

Die entwickelten Resultate sind natürlich auf die linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung anwendbar, da diese auf die Form (1) gebracht werden können. Die Gleichung (18) wird dann die bekannte Charakteristikengleichung.

Wir betrachten z. B. die Gleichungen zweiter Ordnung. Diese können auf folgende drei Typen transformiert werden

$$(\alpha) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

$$(\beta) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

$$(\gamma) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

Bei dem Typus (α) sind die Charakteristiken imaginär. Man findet leicht dass ein Integral, welches in einem Gebiete Null ist, in seinem Existensbereiche innerhalb G überall Null sein muss.

Bei (β) haben wir die zwei reelle Charakteristikensysteme $x = \text{konst.}$, $y = \text{konst.}$ Das Nullgebiet ist hier innerhalb des Existensbereiches von Charakteristiken begrenzt; wenn es ganz innerhalb G liegt, so muss es ein Rechteck sein, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind. (Man kann leicht ein Integral bilden, welches innerhalb dieses Rechtecks Null, ausserhalb aber von Null verschieden ist. Hieraus lässt sich schliessen, dass ein Integral, welches auf zwei zusammenstossenden Seiten eines solchen Rechtecks Null ist, innerhalb dieses Rechtecks identisch gleich Null sein muss.¹⁾ (Wäre es nämlich nicht der Fall, so könnte man ein

¹⁾ Dieser Satz, welcher die Eindeutigkeit der Lösung bei der Gleichung (β) enthält, ist von mir in Upsala universitets Årsskrift, 1897 in einfacherer Weise bewiesen worden (auch brauchen in diesem Beweise die Koeffizienten nur stetige Funktionen zu sein). — Ich benutze diese Gelegenheit um die Bemerkung zu machen, dass die Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin u$$

Integral definieren, welches ausserhalb des Rechtecks Null innerhalb des Rechtecks aber von Null verschieden ist; also hätte die Begrenzung des Nullgebietes eine eingehende Ecke, was nicht möglich ist).

Bei (γ) sind die Charakteristiken die Geraden $y = \text{konst.}$; diese begrenzen innerhalb G das Nullgebiet; z. B. bei der Gleichung der Wärmeleitung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$ besteht das Nullgebiet aus dem Streifen zwischen zwei solchen Charakteristiken.

wenn Anfangswerthe auf zwei zusammenstossenden Charakteristikensegmente gegeben sind, eine unmittelbare Folge von dem dort gegebenen Resultate ist. Hätte nämlich die Gleichung zwei solche Lösungen, so müsste ihre Differenz u einer Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = A(x, y)u$$

genügen, wo $A(x, y)$ stetig ist. Nach der citierten Stelle muss $u \equiv 0$ sein. — Der Beweis, den BIANCHI von diesem Satze gegeben hat (Vorlesungen über Differentialgeometrie, 1896), ist nicht streng.

Skänker till Vetenskaps-Akademins bibliotek.

(Forts. från sid. 4.)

Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoölogy.*

Bulletin. Vol. 36: N:o 2—6; 38. 1900. 8:o.

Annual report. 1869; 1877—78. 8:o.

Cape Town. *R. Observatory.*

Annals. Vol. 2: P. 2. 1899. 4:o.

Catalogue of 3007 stars ... 1885 to 1895. 1898. 4:o.

Catalogue of 2798 zodiacal stars for ... 1900. 1899. 8:o.

Chambésy. *Herbier Boissier.*

Mémoires. N:o 22. 1900. 8:o.

Bulletin. (2) T. 1 (1901): N:o 1. 8:o.

Chicago. *Field Columbian Museum.*

Publication 46—50. 1900. 8:o.

Des Moines. *Iowa Geological survey.*

Annual report. 10 (1899). 8:o.

Dorpat. *Meteorologisches Observatorium.*

Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen. 1900. 4:o.

Granville, Ohio. *Scientific Laboratories of Denison university.*

Bulletin. Vol. 11 (1900): Article 9. 8:o.

's-Gravenhage. *K. Instituut van Ingenieurs.*

Vakafdeeling voor Electrotechniek. 10—11 (1899/1900). 8:o.

Greenwich. *R. observatory.*

Introduction to Greenwich astronomical observations. 1897. 4:o.

Magnetical and meteorological observations. 1897. 4:o.

Astronomical results. 1897. 4:o.

Assumed mean right ascensions of clock stars and circumpolar stars ... 1901. 4:o.

Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*

Abhandlungen. Phil.-Hist. Kl. N. F. Bd. 4: N:o 3. 1900. 4:o.

Hamburg. *Deutsche Seewarte.*

Deutsche überseeische meteorologische Beobachtungen. H. 9. 1900. 4:o.

Helsingfors. *Finska vetenskaps-societeten.*

Öfversigt. 42 (1899—1900). 8:o.

Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk. H. 59—60. 1900. 8:o.

Jena. *Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Jenaische Zeitschrift. Bd 20: Suppl. H. 1—3; 29: H. 2; 31: 1. 1885—1897. 8:o.

Karlsruhe. *Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogthum Baden.*

Niederschlagsbeobachtungen d. meteorolog. Stationen im Grossherzogthum Baden. 1900: 1. 4:o.

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Jahr 1899. 4:o.

Beiträge zur Hydrographie d. Grossherzogthums Baden. H. 10. 1900. 4:o.

(Forts. i sid. 129.)

Auflösung der Gleichungen dritten, vierten und fünften Grades durch besondere Funktionen.

Von C. A. MEBIUS.

(Mitgetheilt am 9 Januar 1901 durch A. LINDSTEDT.)

§ 1. In der folgenden Abhandlung werde ich eine Auflösung der algebraischen Gleichungen dritten, vierten und fünften Grades durch besondere Funktionen mittheilen. Diese Gleichungen können nach bekannten Methoden auf die trinomische Normalform

$$y^{n+1} - (n+1)y + nx = 0 \dots \dots \dots (1)$$

gebracht werden. Es zeigt sich, dass eine Wurzel dieser Gleichung ein partikuläres Integral der linearen Differentialgleichung der n -ten Ordnung

$$(n+1)^n D^n y = \prod_{q=0}^{q=n-1} \{(n+1)x D + qn - 1\} \cdot y \dots \dots (2)$$

ist. Diese Differentialgleichung lässt sich leicht in der Form konvergierender Potenzreihen

$$y = \sum_{r=0}^{r=\infty} A_r x^r \dots \dots \dots (3)$$

oder

$$y = x^m \sum_{r=0}^{r=\infty} B_r x^{-r} \dots \dots \dots (4)$$

integrieren, von denen die erste, wenn $|x| < 1$, und die zweite, wenn $|x| \geq 1$, konvergiert. Wenn $x^n = 1$, hat die Gleichung (1) zwei gleiche Wurzeln $1^{\frac{1}{n}}$. Durch geeignete Bestimmung der

n Integrationskonstanten ergeben sich die sämtlichen $n + 1$ Wurzeln der Gleichung (1).

Die Methode scheint sich auf die allgemeine trinomische Gleichung der Form (1) ($n > 1$) anwenden zu lassen. Ich wende dieselbe mit Erfolg an, um eine Wurzel einer Gleichung des zwanzigsten Grades zu berechnen (§ 12). Es bleibt indessen noch zu beweisen, dass (1) im allgemeinen ein partikuläres Integral der Gleichung (2) ist. Dies ist nicht der Fall, wenn $n = 1$; die Gleichung zweiten Grades lässt sich also nicht auf diese Weise lösen. Dagegen habe ich kontrolliert, dass es wirklich für $n = 2, 3$ und 4 der Fall ist.

Für die Lösung der allgemeinen Gleichungen vierten oder fünften Grades hat die Methode vorzugsweise ein theoretisches Interesse, da es für die Zurückführung der Gleichungen auf die Normalform noch keine leicht zum Ziele führende Methode giebt. Für den praktischen Gebrauch ist daher die Lösung nur dann von Wert, wenn die Gleichung zufälligerweise trinomisch ist.

Die Wurzeln der Gleichung (1) werden durch partikuläre Integrale $N_p(n)$ der Differentialgleichung (2) ausgedrückt. Einige Beziehungen dieser Funktionen werden zwar mitgeteilt; das eingehende Studium derselben muss aber einer besonderen Untersuchung überlassen bleiben. Die Bedeutung dieser Funktionen ist indessen nicht darauf beschränkt, dass durch dieselben die Wurzeln gewisser algebraischen Gleichungen ausgedrückt werden können. Vielmehr scheint es mir, dass sie an und für sich Interesse darbieten. In dieser Hinsicht können sowohl die sehr einfachen Rekursionsformeln der Koeffizienten der Potenzreihen als die Beziehungen (80), (81), (110—112), (143—146) hervorgehoben werden, durch welche alle Funktionen $N_p(n)$ der gleichen Ordnung n , vermittelt einer einzigen Funktion, ausgedrückt werden können.

§ 2. Zurückführung der Gleichung auf die Normalform.

Die Gleichungen dritten, vierten und fünften Grades können nach dem Theorem von TSCHIRNHAUSEN auf die Form

$$u^{n+1} + au + b = 0. \quad (5)$$

gebracht werden. Setzt man hier

$$u = \frac{y}{c}, \quad (6)$$

so nimmt die Gleichung die Form

$$y^{n+1} - (n+1)y + nx = 0 \quad (1)$$

an, wo

$$c^n = -\frac{n+1}{a}. \quad (7)$$

und

$$x = \frac{b \cdot c^{n+1}}{n} = -\frac{n+1}{n} \cdot \frac{bc}{a} \quad (8)$$

Bringt man die Gleichung (1) auf die Form

$$y(y^n - 1) - n(y - x) = 0, \quad (9)$$

so findet man, dass, wenn x eine Wurzel der Gleichung

$$y^n - 1 = 0 \quad (10)$$

ist, x auch eine Wurzel der Gleichung (1) ist, und dass diese Gleichung (1) zwei Wurzeln gleich x hat.

Wenn wir daher im Folgenden voraussetzen, dass die Gleichung nicht gleiche Wurzeln haben soll, brauchen wir also nicht die Werte von x , für welche

$$x^n - 1 = 0$$

ist, in Betracht zu nehmen.

§ 3. Zurückführung der Differentialgleichung von der symbolischen auf die gewöhnliche Form.

Die Differentialgleichung (2) hat die Form

$$\left. \begin{aligned} (n+1)^n D^n y &= \{(n+1)x D + (n-1) \cdot n - 1\} \dots \{ \\ &\{(n+1)x D + qn - 1\} \dots \{(n+1)x D - 1\} \cdot y. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Operiert man successiv mit $(n+1)x D - 1$, $(n+1)x D + n - 1$, \dots , $(n+1)x D + qn - 1$, \dots , so ergeben sich die rechten Glieder der Differentialgleichung für $n = 1, 2, 3 \dots q, \dots$, also

$$(n+1)x \frac{dy}{dx} - y;$$

$$(n+1)^2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (n+1)(2n-1)x \frac{dy}{dx} - (n-1)y; \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} & (n+1)^2 x^3 \frac{d^2 y}{dx^3} + 6n(n+1)x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \\ & + (n+1)(6n^2 - 4n + 1)x \frac{dy}{dx} - (n-1)(2n-1)y \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} & (n+1)^4 x^4 \frac{d^4 y}{dx^4} + 2(n+1)^3(6n+1)x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + (n+1)^2 \{36n^2 + \\ & + 2n + 1\} x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (n+1) \{24n^3 - 18n^2 + 7n - 1\} x \frac{dy}{dx} - \\ & - (n-1)(2n-1)(3n-1)y. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

u. s. w.

Nach q Operationen erhält man einen Ausdruck der Form

$$\sum_{r=1}^{r=q} A_r^{(q)} x^r \frac{d^r y}{dx^r} + A_0^{(q)} y. \quad (15)$$

Operiert man auf diesen Ausdruck mit $(n+1)x D + qn - 1$, so ergeben sich für die Koeffizienten folgende Rekursionsformeln:

$$A_{q+1}^{(q+1)} = (n+1)^{q+1}. \quad (16)$$

$$A_r^{(q+1)} = \{n(r+q) + r - 1\} A_r^{(q)} + (n+1) \cdot A_{r-1}^{(q)}. \quad (17)$$

$$A_0^{(q+1)} = (qn - 1) A_0^{(q)} = -(n-1)(2n-1) \dots (qn-1). \quad (18)$$

Die Differentialgleichung hat somit die Form

$$(n+1)^n (x^n - 1) \frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{r=1}^{r=n-1} A_r^{(n)} x^r \frac{d^r y}{dx^r} + A_0^{(n)} y = 0 \quad (19)$$

oder

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{A_r^{(n)}}{(n+1)^n} \cdot \frac{x^r}{x^n - 1} \frac{d^r y}{dx^r} + \frac{A_0^{(n)} y}{(n+1)^n (x^n - 1)} = 0.$$

Wenn $x^n = 1$, werden also alle Koeffizienten ausser dem ersten unendlich.

§ 4. *Integration der Differentialgleichung, wenn $|x| < 1$.*

Definition von $N_p(x)$.

Die Differentialgleichung

$$(n+1)^n D^n y = \prod_{q=0}^{q=n-1} \{(n+1)x D + qn - 1\} \cdot y \quad (2)$$

lässt sich leicht in Form einer Potenzreihe integrieren. Wir nehmen anfangs an, dass die Reihe nach steigenden Potenzen von x fortschreitet, und dass die niedrigste vorkommende Potenz x^m ist. Wir setzen also

$$y = A'_m x^m + A'_{m+1} x^{m+1} + \dots = \sum_{r=0}^{r=\infty} A'_{m+r} x^{m+r}. \quad (20)$$

Dann wird

$$(n+1)^n D^n y =$$

$$= (n+1)^n \sum_{r=0}^{r=\infty} (m+r)(m+r-1) \dots (m+r-n+1) A'_{m+r} x^{m+r-n}$$

$$= (n+1)^n \sum_{r=0}^{r=\infty} \prod_{q=0}^{q=n-1} (m+r-q) A'_{m+r} x^{m+r-n}$$

und

$$\prod_{q=0}^{q=n-1} \{(n+1)x D + qn - 1\} \cdot y =$$

$$= \sum_{r=0}^{r=\infty} \prod_{q=0}^{q=n-1} \{(n+1)(m+r) + qn - 1\} A'_{m+r} x^{m+r}.$$

Wir müssen also identisch haben:

$$\left. \begin{aligned} (n+1)^n \sum_{r=0}^{r=\infty} \prod_{q=0}^{q=n-1} (m+r-q) A'_{m+r} x^{m+r-n} &= \\ = \sum_{r=0}^{r=\infty} \prod_{q=0}^{q=n-1} \{(n+1)(m+r) + qn - 1\} A'_{m+r} x^{m+r}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Links gehen hier die Potenzen x^{m-n} , $x^{m-(n-1)}$, ..., x^{m-1} ein, welche rechts nicht vorhanden sind. Die entsprechenden Koeffizienten müssen daher Null sein, welches der Fall wird, wenn wir setzen:

$$A'_m \geq 0; A'_{m+1} = A'_{m+2} = \dots = A'_{m+n-1} = 0$$

und

$$m(m-1) \dots (m-n+1) = 0.$$

Wir erhalten also n verschiedene Werte von m , nämlich

$$m = 0, 1, \dots, (n-1), \dots \dots \dots (22)$$

welche n partikuläre Integrale der Differentialgleichung (2) mit sich führen. Den Wert von A'_m im p -ten Integral setzen wir gleich

$$A_p \frac{1}{\underline{p}(n+1)^p} \cdot \quad (\underline{0} = 1)$$

Damit die übrigen Glieder der beiden Seiten von (21) identisch werden, ist es erforderlich, dass

$$(n+1)^n \prod_{q=0}^{q=n-1} (m+r+n-q) A'_{m+r+n} = \prod_{q=0}^{q=n-1} \{(n+1)(m+r) + qn - 1\} A'_{m+r}$$

und also für $m = p$

$$A_{p+r+n} = \prod_{q=0}^{n-1} \frac{\{(n+1)(p+r) + qn - 1\}}{(p+r+n-q)(n+1)^n} \cdot A_{p+r} \dots (23)$$

ist.

Das vollständige Integral der Differentialgleichung (2) ist daher

$$y = A_0 N_0(x) + \dots + A_p N_p(x) + \dots + A_{n-1} N_{n-1}(x), \quad (24)$$

wo

$$A_p N_p(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} A_{p+rn} x^{p+rn} = A_p \sum_{r=0}^{r=\infty} a_{p+rn} x^{p+rn},$$

und somit

$$N_p(x) = \sum_{r=0}^{r+\infty} a_{p+rn} x^{p+rn}, \dots \dots \dots (25)$$

$$a_p = \frac{1}{\underline{p} \cdot (n+1)^p} \dots \dots \dots (26)$$

und

$$a_{p+n(r+1)} = \prod_{q=0}^{q=n-1} \frac{\{(n+1)(p+qn) + qn - 1\}}{(p+n(r+1)-q)(n+1)^n} \cdot a_{p+rn}. \quad (27)$$

ist.

Die Funktionen $N_p(x)$ sind n an der Zahl. Wenn z. B. $n=3$, zeichnen wir dieselben $3_0(x)$, $3_1(x)$, $3_2(x)$. Wir werden im Folgenden zeigen, dass die n Funktionen $N_p(x)$ alle aus einer einzigen Funktion hergeleitet werden können. Die Reihen convergieren, wenn $|x| < 1$.

§ 5. Integration der Differentialgleichung, wenn $|x| \geq 1$.

Definition von $N_{-p}(x)$.

Wenn $|x| \geq 1$, wird die Potenzreihe, durch welche $N_p(x)$ definiert ist, divergent. Wir werden darum in diesem Falle ein Integral der Differentialgleichung von der Form einer Potenzreihe suchen, welche nach abnehmenden Potenzen von x fortschreitet, und es sei x^m die höchste vorkommende Potenz. Wir setzen also

$$y = B'_m x^m + B'_{m-1} x^{m-1} + B'_{m-2} x^{m-2} + \dots = \sum_{r=0}^{r=\infty} B'_{m-r} x^{m-r}. \quad (28)$$

Wir müssen also identisch haben:

$$\left. \begin{aligned} (n+1)^n \sum_{r=0}^{r=\infty} \prod_{q=0}^{q=n-1} (m-r-q) B'_{m-r} x^{m-r-n} = \\ = \sum_{r=0}^{r=\infty} \prod_{q=0}^{q=n-1} \{(n+1)(m-r) + qn - 1\} B'_{m-r} x^{m-r}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Auf der rechten Seite kommen hier die Potenzen $x^m, x^{m-1}, \dots, x^{m-n+1}$ vor, welche auf der linken Seite fehlen. Die entsprechenden Koeffizienten müssen daher Null sein, was der Fall wird, wenn wir setzen:

$$B'_m \geq 0; \quad B'_{m-1} = B'_{m-2} = \dots = B'_{m-(n-1)} = 0$$

und

$$\prod_{q=0}^{q=n-1} \{(n+1)m + qn - 1\} = 0.$$

Wir erhalten somit n verschiedene Werte von m von der Form

$$m = \frac{1 - pn}{n + 1}; \quad p = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (30)$$

Dadurch bekommt man n partikuläre Integrale der Differentialgleichung (2). Im p -ten Integral setzen wir den Wert von B'_m gleich

$$B_p \cdot p(-n)^{\frac{1-pn}{n+1}}.$$

Damit die übrigen Glieder der beiden Seiten von (29) identisch werden, ist es erforderlich, dass

$$\begin{aligned} (n+1)^n \prod_{q=0}^{q=n-1} (m-r-q) B'_{m-r} &= \\ &= \prod_{q=0}^{q=n-1} \{(n+1)(m-r-n) + qn - 1\} B'_{m-r-n}, \end{aligned}$$

also wenn der Wert von m aus (30) eingeführt wird

$$B'_{m-r-n} = \prod_{q=0}^{q=n-1} \frac{(n+1)(r+q) + pn - 1}{(n+1)(r+n) + pn - qn} \cdot B'_{m-r}. \quad (31)$$

Das vollständige Integral der Differentialgleichung (2) ist daher in diesem Falle

$$y = B_0 N_{-0}(x) + \dots + B_p N_{-p}(x) + \dots + B_{n-1} N_{-(n-1)}(x), \quad (32)$$

wo

$$B_p N_{-p}(x) = x^{\frac{1-pn}{n+1}} \sum_{r=0}^{r=\infty} B'_{m-rn} x^{-rn},$$

und folglich, wenn

$$B'_{m-rn} = B_p \cdot b_{rn}^{(p)} \cdot (-n)^{\frac{1-pn}{n+1}}$$

$$N_{-p}(x) = (-nx)^{\frac{1-pn}{n+1}} \sum_{r=0}^{r=\infty} b_{rn}^{(p)} x^{-rn}, \quad (33)$$

wo

$$b_0 = 1. \quad (34)$$

und

$$b_{(r+1) \cdot n}^{(p)} = \prod_{q=0}^{q=n-1} \frac{(n+1)(rn+q) + pn - 1}{(n+1) \cdot n(r+1) + pn - qn} \cdot b_{rn}^{(p)}. \quad (35)$$

Die Funktionen $N_{-p}(x)$ sind n an der Zahl. Die Reihen konvergieren, wenn $|x| \geq 1$.

Führt man die Bezeichnung

$$R_p^{(n)}(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} b_{rn}^{(p)} x^{-rn} (36)$$

ein, so wird

$$N_{-p}(x) = (-nx)^{\frac{1-pn}{n+1}} \cdot R_p^{(n)}(x) (37)$$

Wird x unendlich, verschwinden in $R_p^{(n)}(x)$ alle Glieder ausser dem ersten. Es ergibt sich also

$$\lim_{x=\infty} N_{-p}(x) = (-nx)^{\frac{1-pn}{n+1}} (37_1)$$

§ 6. Berechnung der Ableitungen.

Ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (2) ist durch

$$y^{n+1} - (n+1)y + nx = 0 (1)$$

angegeben, wenigstens wenn n gleich 2, 3, 4 ist. Da uns die Kenntnis der Ableitungen von y nach x aus (1) nötig ist, sind die vier ersten nebst der allgemeinen Rekursionsformel für Berechnung der übrigen hier angegeben.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{(1-y^n)}; (38)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{n \cdot y^{n-1}}{(1-y^n)^3}; (39)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{n^3}{(n+1)^3} \cdot \frac{n(n-1)y^{n-2} + n(2n+1)y^{2n-2}}{(1-y^n)^5}; . . (40)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \left. \frac{\frac{n^4}{(n+1)^4} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)y^{n-3} + 4n(n-1)(2n+1)y^{2n-3} + n(2n+1)(3n+2)y^{3n-3}}{(1-y^n)^7}}{.} \right\} (41)$$

u. s. w.

Man findet leicht, dass im allgemeinen

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{n^p}{(n+1)^p} (1-y^n)^{-(2p-1)} \sum_{r=1}^{r=p-1} C_r^{(p)} y^{rn-p+1} . . (42)$$

ist. Differenziert man noch einmal, so ergeben sich folgende Rekursionsformeln

$$C_1^{(p+1)} = (n - p + 1) C_1^{(p)} = n(n-1) \dots (n-p+1); \dots (43)$$

$$C_p^{(p+1)} = (pn + p - 1) C_{p-1}^{(p)} = n(2n+1)(3n+2) \dots (pn+p-1); (44)$$

$$C_r^{(p+1)} = (rn - p + 1) C_r^{(p)} + \{(2p-r)n + p - 1\} C_{r-1}^{(p)} \dots (45)$$

wo $r = 2, 3 \dots (p-1)$.

Setzt man in (1)

$$n(x-y) = s,$$

so erhält man

$$y^{n+1} - y + s = 0 \dots (1a)$$

und also

$$1 - y^n = \frac{s}{y}.$$

Die Ableitungen können demnach auch so geschrieben werden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{n+1} \frac{y}{s}; \dots (38a)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \cdot \frac{ny(y-s)}{s^3}; \dots (39a)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 \cdot \frac{1}{s^3} \{ n(n-1)y^2(y-s) + n(2n+1)y(y-s)^2 \}; (40a)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^4 \cdot \frac{1}{s^3} \{ n(n-1)(n-2)y^3(y-s) + \left. \begin{aligned} &+ 4n(n-1)(2n+1)y^2(y-s)^2 + \\ &+ n(2n+1)(3n+2)y(y-s)^3 \end{aligned} \right\}; (41a)$$

u. s. w.

§ 7. Die Bestimmung der Konstanten, wenn $|x| < 1$.

Damit das partikuläre Integral (1) mit einem aus den Gleichungen (24) oder (32) abgeleiteten partikulären Integral zusammenfallen soll, muss man den Koeffizienten A_p, B_p geeignete Werte geben. Alle $n+1$ Wurzeln der Gleichung (1) gehen auf diese Weise aus (24) oder (32) hervor.

Wir nehmen zuerst $|x| < 1$ an. Setzen wir

$$x = 0,$$

so erhalten wir aus (24)

$$y = A_0. \dots \dots \dots (46)$$

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{A_p}{(n+1)^p} \dots \dots \dots (47)$$

Aus (1) erhält man für $x = 0$

$$y(y^n - (n+1)) = 0. \dots \dots \dots (48)$$

Ist

$$\alpha_n = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \dots \dots \dots (49)$$

eine Wurzel der Gleichung

$$\alpha^n = 1,$$

so sind die Wurzeln der Gleichung (48)

$$\left. \begin{aligned} y_s &= \alpha_n^s \sqrt[n]{n+1}; \quad s = 1, 2, \dots, n-1 \\ y_n &= \sqrt[n]{n+1} \\ y_{n+1} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (50)$$

Jeder diese Werte kann nun mit A_0 identifiziert werden, und somit erhält dieser Koeffizient $n+1$ verschiedene Werte. Wird jeder Wert in (42) eingeführt und die beiden Werte von $\frac{dy}{dx^p}$ aus (42) und (47) identifiziert, so erhält man die entsprechenden Werte von A_p . Diese Werte sind alle endlich; der Nenner im Ausdrucke (42) für $\frac{d^p y}{dx^p}$ ist ja

$$(n+1)^p (1 - y^n)^{2p-1}$$

und erhält somit für die in (50) angegebenen Werte von y nur den Wert

$$(n+1)^p (-n)^{2p-1} \text{ oder } (n+1)^p.$$

Wir erhalten also ($s = 1, 2, \dots, n$)

$$\left. \begin{aligned} A_0 &, A_1, \dots, A_p \\ \alpha_n^s \cdot (n+1)^{\frac{1}{n}}, -1, \dots, -\left\{ \alpha_n^s \cdot n \cdot (n+1)^{\frac{1}{n}} \right\}^{1-p} \cdot \sum_{r=1}^{p-1} C_r^{(p)} (n+1)^r \\ 0 &, n, \dots, 0. \end{aligned} \right\} (51)$$

Auf Grund dieser letzten Werte der Koeffizienten hat eine Wurzel der Gleichung (1) die einfache Form

$$y = nN_1(x) \dots \dots \dots (52)$$

§ 8. Die Bestimmung der Konstanten, wenn $|x| \geq 1$ ist.

Um die Koeffizienten B_p in (32) auf die Art zu bestimmen, dass das partikuläre Integral mit (1) zusammenfalle, ist es am einfachsten $x = \infty$ anzunehmen. Wir haben dann

$$N_{-p}(x) = (-nx)^{\frac{1-pn}{n+1}}, (x = \infty) \dots \dots \dots (37_1)$$

Wir führen nun den Wert von y aus (32) mit den Grenzwerten (37₁) der Funktionen $N_{-p}(x)$ in die Gleichung (1) hinein, also

$$\left\{ \begin{aligned} & B_0(-nx)^{\frac{1}{n+1}} + B_1(-nx)^{\frac{1-n}{n+1}} + B_2(-nx)^{\frac{1-2n}{n+1}} + \dots \\ & + B_{n-1}(-nx)^{\frac{1-(n-1)n}{n+1}} \} - (n+1) \left\{ B_0(-nx)^{\frac{1}{n+1}} + \right. \\ & \left. + B_1(-nx)^{\frac{1-n}{n+1}} + \dots + B_{n-1}(-nx)^{\frac{1-(n-1)n}{n+1}} \right\} + nx = 0. \end{aligned} \right. \quad (53)$$

Das erste Glied wird noch dem Polynomialtheorem entwickelt und sodann die Konstanten B_p auf die Weise bestimmt, dass die Koeffizienten der n höchsten Potenzen von x identisch Null werden.

Wir erhalten mithin

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 1^{\frac{1}{n+1}}; \\ B_1 &= B_0^{1-n}; \\ B_2 &= \frac{2-n}{2} B_0^{1-2n}; \\ B_3 &= \frac{(3-n)(2-2n)}{3 \cdot 2} B_0^{1-3n}; \\ B_4 &= \frac{(4-n)(3-2n)(2-3n)}{4 \cdot 3 \cdot 2} B_0^{1-4n}; \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

B_0 hat offenbar $n+1$ Werte und also auch die übrigen Koeffizienten $B_1 \dots B_{n-1}$, den $n+1$ Wurzeln der Gleichung (1) entsprechend.

§ 9. *Auflösung der Gleichung des dritten Grades.*

SPITZER ¹⁾ hat gefunden, dass eine Wurzel der Gleichung

$$y^3 + y + x = 0 \dots\dots\dots (55)$$

ein partikuläres Integral der Differentialgleichung

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{27}\right) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x}{4} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{36}y = 0 \dots\dots\dots (56)$$

ist. Die Form dieser Differentialgleichung ist nicht sehr einfach. Es war aber anzunehmen, dass, wenn die Gleichung des dritten Grades statt der Form (55) in die mit Bezug auf die Auflösung einfachste Form gebracht würde, auch die entsprechende Differentialgleichung einfacher würde. Bringt man die Gleichung in die Form

$$y^3 - 3y + 2x = 0, \dots\dots\dots (57)$$

so ist nach der CARDAN'schen Formel

$$y = \sqrt[3]{-x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[3]{-x - \sqrt{x^2 - 1}} \dots\dots (58)$$

und die entsprechende Differentialgleichung

$$(x^2 - 1) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - \frac{1}{9}y = 0 \dots\dots\dots (59)$$

oder

$$9D^2y = \{9(xD)^2 - 1\} \cdot y \dots\dots\dots (60)$$

in Übereinstimmung mit (2) und (11).

Die Auflösung ist die folgende:

1:o. Wenn $|x| < 1$, ist nach (24)

$$y = A_0 \mathfrak{Z}_0(x) + A_1 \mathfrak{Z}_1(x), \dots\dots\dots (61)$$

wo

$$\mathfrak{Z}_0(x) = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{3^2} - \frac{1 \cdot 5 \cdot 7}{4} \frac{x^4}{3^4} - \frac{1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}{6} \frac{x^6}{3^6} \dots\dots (62)$$

¹⁾ SIMON SPITZER: Untersuchungen im Gebiete linearer Differential-Gleichungen. Wien 1884, 1885. Diese Arbeit wurde mir erst bekannt, nachdem ich mit der vorliegenden fertig war. Die erwähnte Eigenschaft der Differentialgleichung (56) erfuhr ich aus einer Aufgabe in FORSYTH: A Treatise on Differential Equations.

$$a_{2(r+1)} = \frac{(6r-1)(6r+1)}{(2r+1)(2r+2)} \cdot \frac{a_{2r}}{3^2} \cdot \dots \cdot (63)$$

und

$$2_1(x) = \frac{x}{3} + \frac{2 \cdot 4}{3} \cdot \frac{x^3}{3^3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 10}{5} \cdot \frac{x^5}{3^5} + \dots \cdot (64)$$

mit der Rekursionsformel (siehe § 12)

$$a_{2r+3} = \frac{(6r+2)(6r+4)}{(2r+2)(2r+3)} \cdot \frac{a_{2r+1}}{3^2} \cdot \dots \cdot (65)$$

Die Wurzeln der Gleichung (57) sind also nach (51)

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2 \cdot 2_1(x) \\ y_2 &= -\sqrt[3]{3} \cdot 2_0(x) - 2_1(x) \\ y_3 &= \sqrt[3]{3} \cdot 2_0(x) - 2_1(x) \end{aligned} \right\} \cdot \dots \cdot (66)$$

Die drei Wurzeln sind reel (für reelles x).

Geht man von der Gleichung

$$u^3 + au + b = 0 \cdot \dots \cdot (67)$$

aus, so ist nach (6—8)

$$u = \pm y \cdot \sqrt[3]{-\frac{a}{3}} \cdot \dots \cdot (68)$$

und

$$x = \mp \frac{3}{2} \cdot \frac{b}{a} \sqrt[3]{-\frac{3}{a}} \cdot \dots \cdot (69)$$

Sind die drei Wurzeln der Gleichung (67) reel und verschieden, so ist x reel und < 1 .

2:o. Wenn $|x| \geq 1$, ist nach (32)

$$y = B_0 2_{-0}(x) + B_1 2_{-1}(x), \dots \cdot (70)$$

wo

$$2_{-0}(x) = (-2x)^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 - \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 6} x^{-2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12} x^{-4} - \dots \right\} \quad (71)$$

mit der Rekursionsformel

$$b_{2r+2}^{(0)} = \frac{(6r-1)(6r+2)}{(6r+4)(6r+6)} b_{2r}^{(0)} \cdot \dots \cdot (72)$$

und

$$2_{-1}(x) = (-2x)^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 8} x^{-2} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{6 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 14} x^{-4} + \dots \right\} \quad (73)$$

mit der Rekursionsformel

$$b_{2r+2}^{(1)} = \frac{(6r+1)(6r+4)}{(6r+6)(6r+8)} b_{2r}^{(1)} \dots \dots \dots (74)$$

Die Konstanten B_0 , B_1 werden nach (54) berechnet.

Ist

$$\alpha_3 = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

so sind in diesem Falle die Wurzeln

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2_{-0}(x) + 2_{-1}(x), \\ y_2 &= \alpha_3 2_{-0}(x) + \alpha_3^2 2_{-1}(x), \\ y_3 &= \alpha_3^2 2_{-0}(x) + \alpha_3 2_{-1}(x). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (75)$$

Wenn x reel ist, ist eine der Wurzeln reel, die übrigen komplex.

Infolge der Gleichung (57) ist

$$y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = -3 \dots \dots \dots (76)$$

und auf Grund dieser Relation findet man ohne Schwierigkeit

$$2_0^2(x) + 2_1^2(x) = 1 \dots \dots \dots (77)$$

und

$$2_{-0}(x) \cdot 2_{-1}(x) = 1 \dots \dots \dots (78)$$

Die Zurückführung der 2-Funktionen auf trigonometrische Funktionen und Radikale ist leicht.

Setzt man

$$2(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{2r} x^{2r} + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{2r+1} x^{2r+1}, \dots (79)$$

wo die Koeffizienten a_{2r} , a_{2r+1} die in (62) bis (65) angegebene Bedeutung haben, so beweist man ohne Mühe, dass

$$2_0(x) = \frac{2(ix) + 2(-ix)}{2}, \quad \dots \quad (80)$$

$$2_1(x) = \frac{2(ix) - 2(-ix)}{2i} \quad \dots \quad (81)$$

und mit Anwendung von (77), (80), (81)

$$2(ix) \cdot 2(-ix) = 1 \quad \dots \quad (82)$$

§ 10. Die Auflösung der Gleichung des vierten Grades.

Setzt man in den Gleichungen (1) und (2) $n=3$, so erhält man die Normalform der bikvadratischen Gleichung

$$y^4 - 4y + 3x = 0 \quad \dots \quad (83)$$

und die entsprechende Differentialgleichung

$$64D^3y = (4xD - 1)(4xD + 2)(4xD + 5)y \quad \dots \quad (84)$$

oder nach (13)

$$64(x^3 - 1) \frac{d^3y}{dx^3} + 288x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 172x \frac{dy}{dx} - 10y = 0. \quad ^1) \quad (85)$$

Führt man in diese Differentialgleichung den Wert von x aus (83) und die Wert der Ableitungen aus (38), (39), (40) ein, so wird sie identisch. Die Gleichung (83) stellt also ein partikuläres Integral von (85) dar.

1:o. Wenn $|x| < 1$, ist nach (24) die Auflösung:

$$y = A_0 \mathfrak{Z}_0(x) + A_1 \mathfrak{Z}_1(x) + A_2 \mathfrak{Z}_2(x), \quad \dots \quad (86)$$

wo

$$\mathfrak{Z}_0(x) = 1 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3} \cdot \frac{x^3}{4^3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 17}{6} \cdot \frac{x^6}{4^6} - \dots \quad (87)$$

mit der Rekursionsformel

$$a_{3r+3} = \frac{(12r-1)(12r+2)(12r+5)}{(3r+1)(3r+2)(3r+3)} \cdot \frac{a_{3r}}{4^3}, \quad \dots \quad (88)$$

¹⁾ Diese lineare Differentialgleichung findet sich ausser bei SPITZER l. c. (zweites Heft) auch in einer Arbeit von FRANCESCO BRIOSCHI, *Annali di Matematica*, Serie II, Tomo X, pag. 104 (105), 1880 bis 1882: *Sulle equazioni differenziali del tetraedro dell'ottaedro e dell'icosaedro*.

$$\mathfrak{z}_1(x) = \frac{x}{4} + \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 x^4}{4} + \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 21 x^7}{7} + \dots (89)$$

mit der Rekursionsformel (siehe § 12)

$$a_{3r+4} = \frac{(12r+3)(12r+6)(12r+9)}{(3r+2)(3r+3)(3r+4)} \cdot \frac{a_{3r+1}}{4^3} \dots (90)$$

und

$$\mathfrak{z}_2(x) = \frac{x^2}{2 \cdot 4^2} + \frac{7 \cdot 10 \cdot 13 x^5}{5} + \frac{7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 22 \cdot 25}{8} \cdot \frac{x^8}{4^3} + \dots (91)$$

mit der Rekursionsformel

$$a_{3r+5} = \frac{(12r+7)(12r+10)(12r+13)}{(3r+3)(3r+4)(3r+5)} \cdot \frac{a_{3r+2}}{4^3}. \quad (92)$$

Die Werte der Konstanten ergeben sich nach (51). Ist

$$\alpha_3 = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

so sind die Wurzeln der Gleichung (83) in diesem Falle

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 3 \cdot \mathfrak{z}_1(x); \\ y_2 &= \alpha_3 \sqrt[3]{4} \mathfrak{z}_0(x) - \mathfrak{z}_1(x) - \alpha_3^2 \sqrt[3]{16} \mathfrak{z}_2(x); \\ y_3 &= \alpha_3^2 \sqrt[3]{4} \mathfrak{z}_0(x) - \mathfrak{z}_1(x) - \alpha_3 \sqrt[3]{16} \mathfrak{z}_2(x); \\ y_4 &= \sqrt[3]{4} \mathfrak{z}_0(x) - \mathfrak{z}_1(x) - \sqrt[3]{16} \mathfrak{z}_2(x). \end{aligned} \right\} \dots (93)$$

2.0. Wenn $|x| \geq 1$, so ist nach (32) ... (35)

$$y = B_0 \mathfrak{z}_{-0}(x) + B_1 \mathfrak{z}_{-1}(x) + B_2 \mathfrak{z}_{-2}(x), \dots (94)$$

wo

$$\mathfrak{z}_{-0}(x) = (-3x)^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{6 \cdot 9 \cdot 12} x^{-3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19}{6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 21 \cdot 24} x^{-6} - \dots \right\} (95)$$

mit der Rekursionsformel

$$b_{3r+3}^{(0)} = \frac{(12r-1)(12r+3)(12r+7)}{(12r+6)(12r+9)(12r+12)} \cdot b_{3r}^{(0)}; \dots (96)$$

$$\mathfrak{z}_{-1}(x) = (-3x)^{-\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{9 \cdot 12 \cdot 15} x^{-3} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 22}{9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 21 \cdot 24 \cdot 27} x^{-6} + \dots \right\} (97)$$

mit der Rekursionsformel

$$b_{3r+3}^{(1)} = \frac{(12r+2)(12r+6)(12r+10)}{(12r+9)(12r+12)(12r+15)} b_{3r}^{(1)} \dots (98)$$

und

$$\mathfrak{Z}_{-2}(x) = (-3x)^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{5 \cdot 9 \cdot 13}{12 \cdot 15 \cdot 18} x^{-3} + \frac{5 \cdot 9 \cdot 13}{12 \cdot 15 \cdot 18} \cdot \frac{17 \cdot 21 \cdot 25}{24 \cdot 27 \cdot 30} x^{-6} + \dots \right\} \quad (99)$$

mit der Rekursionsformel

$$b_{3r+3}^{(1)} = \frac{(12r+5)(12r+9)(12r+13)}{(12r+12)(12r+15)(12r+18)} b_{3r}^{(1)} \quad (100)$$

Führt man in (94) die Werte der Konstanten aus (54) ein, so sind die vier Wurzeln y_1, y_2, y_3, y_4 in dem Ausdrucke

$$y = \alpha_4 \mathfrak{Z}_{-0}(x) + \alpha_4^{-2} \mathfrak{Z}_{-1}(x) - \frac{1}{2} \alpha_4^{-5} \mathfrak{Z}_{-2}(x) \dots (101)$$

mit einbegriffen, wenn α_4 die vier Werte

$$\alpha_4 = 1, \quad -1, \quad i, \quad -i \dots (102)$$

erhält.

Da nach (83)

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_1 y_4 + y_2 y_3 + y_2 y_4 + y_3 y_4 = 0, \quad (103)$$

so ist nach (93)

$$\{\mathfrak{Z}_1(x)\}^2 = 2 \cdot \mathfrak{Z}_0(x) \cdot \mathfrak{Z}_2(x) \dots (104)$$

und nach (101) und (102)

$$\{\mathfrak{Z}_{-1}(x)\}^2 = \mathfrak{Z}_{-0}(x) \cdot \mathfrak{Z}_{-2}(x) \dots (105)$$

Wir definieren eine Funktion $\mathfrak{Z}(x)$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{Z}(x) = \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{3r} x^{3r} - \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{3r+1} x^{3r+1} + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{3r+2} x^{3r+2} \right\} \quad (106)$$

wo $a_{3r}, a_{3r+1}, a_{3r+2}$, die in (87) bis (92) angegebene Bedeutung haben.

Dann wird

$$\mathfrak{z}_0(x) + \mathfrak{z}_1(x) + \mathfrak{z}_2(x) = \mathfrak{z}(-x), \quad (107)$$

$$\mathfrak{z}_0(x) + \alpha_2 \mathfrak{z}_1(x) + \alpha_2^2 \mathfrak{z}_2(x) = \mathfrak{z}(-\alpha_2 x), \quad (108)$$

$$\mathfrak{z}_0(x) + \alpha_2^2 \mathfrak{z}_1(x) + \alpha_2 \mathfrak{z}_2(x) = \mathfrak{z}(-\alpha_2^2 x), \quad (109)$$

und hieraus folgt

$$\mathfrak{z}_0(x) = \frac{\mathfrak{z}(-x) + \mathfrak{z}(-\alpha_2 x) + \mathfrak{z}(-\alpha_2^2 x)}{3}, \quad (110)$$

$$\mathfrak{z}_1(x) = \frac{\mathfrak{z}(-x) + \alpha_2^2 \mathfrak{z}(-\alpha_2 x) + \alpha_2 \mathfrak{z}(-\alpha_2^2 x)}{3}, \quad . . (111)$$

$$\mathfrak{z}_2(x) = \frac{\mathfrak{z}(-x) + \alpha_2 \mathfrak{z}(-\alpha_2 x) + \alpha_2^2 \mathfrak{z}(-\alpha_2^2 x)}{3}. \quad (112)$$

§ 11. Die Auflösung der Gleichung des fünften Grades.

Setzt man in den Gleichungen (1) und (2) $n = 4$, so erhält man die Normalform der Gleichung des fünften Grades

$$y^5 - 5y + 4x = 0 \quad (113)$$

und die entsprechende Differentialgleichung

$$5D^4y = (5xD - 1)(5xD + 3)(5xD + 7)(5xD + 11) \cdot y \quad (114)$$

oder nach (14)

$$\left. \begin{aligned} 5^4(x^4 - 1) \frac{d^4y}{dx^4} + 2 \cdot 5^3 x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 9 \cdot 13 \cdot 5^2 x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \\ 3 \cdot 17 \cdot 5^2 x \frac{dy}{dx} - 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 y = 0. \end{aligned} \right\} (115)$$

Werden in diese Differentialgleichung der Wert von x aus (113) und die Werte der Ableitungen aus (38) . . . (41) eingeführt, so erhält man eine identische Gleichung. Eine Wurzel der Gleichung (113) ist somit ein partikuläres Integral von (115). Die Durchführung der Rechnungen ist schon ziemlich mühevoll, da die identische Gleichung vom neun und zwanzigsten Grade

von der Form $\sum_{r=0}^{r=7} c_r y^{1+4r} = 0$ ist. Mit Anwendung von (38a) . . .

(41a) wird die Rechnung ein wenig bequemer.

1:o. Wenn $|x| < 1$, so ist nach (24)

$$y = A_0 \mathbf{4}_0(x) + A_1 \mathbf{4}_1(x) + A_2 \mathbf{4}_2(x) + A_3 \mathbf{4}_3(x), \dots \quad (116)$$

wo

$$\mathbf{4}_0(x) = 1 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{\underline{4}} \cdot \frac{x^4}{5^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 27 \cdot 31}{\underline{8}} \cdot \frac{x^8}{5^8} - \dots \quad (117)$$

mit der Rekursionsformel

$$a_{4r+4} = \frac{(20r-1)(20r+3)(20r+7)(20r+11)}{(4r+1)(4r+2)(4r+3)(4r+4)} \cdot \frac{a_{4r}}{5^4}; \quad \dots \quad (118)$$

$$\mathbf{4}_1(x) = \frac{1}{5} \cdot x + \frac{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}{\underline{5}} \cdot \frac{x^5}{5^5} + \frac{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 28 \cdot 32 \cdot 36}{\underline{9}} \cdot \frac{x^9}{5^9} + \dots \quad (119)$$

mit der Rekursionsformel (siehe § 12)

$$a_{4r+8} = \frac{(20r+4)(20r+8)(20r+12)(20r+16)}{(4r+2)(4r+3)(4r+4)(4r+5)} \cdot \frac{a_{4r+4}}{5^4}; \quad \dots \quad (120)$$

$$\mathbf{4}_2(x) = \frac{x^2}{\underline{2} \cdot 5^2} + \frac{9 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 21}{\underline{6}} \cdot \frac{x^6}{5^6} + \dots \quad (121)$$

mit der Rekursionsformel

$$a_{4r+6} = \frac{(20r+9)(20r+13)(20r+17)(20r+21)}{(4r+3)(4r+4)(4r+5)(4r+6)} \cdot \frac{a_{4r+2}}{5^4}; \quad \dots \quad (122)$$

$$\mathbf{4}_3(x) = \frac{x^3}{\underline{3} \cdot 5^3} + \frac{14 \cdot 18 \cdot 22 \cdot 26}{\underline{7}} \cdot \frac{x^7}{5^7} + \dots \quad (123)$$

mit der Rekursionsformel

$$a_{4r+7} = \frac{(20r+14)(20r+18)(20r+22)(20r+26)}{(4r+4)(4r+5)(4r+6)(4r+7)} \cdot \frac{a_{4r+3}}{5^4}. \quad (124)$$

Die Wurzeln der Gleichung (113) sind nach (51) in diesem Falle

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \mathbf{4}_1(x); \\ y_2 &= i^{\frac{1}{4}} \mathbf{4}_0(x) - \mathbf{4}_1(x) + i^{\frac{3}{4}} \mathbf{4}_2(x) + 12 \cdot 5^{\frac{1}{4}} \mathbf{4}_3(x); \\ y_3 &= -5^{\frac{1}{4}} \mathbf{4}_0(x) - \mathbf{4}_1(x) + 5^{\frac{3}{4}} \mathbf{4}_2(x) - 12 \cdot 5^{\frac{1}{4}} \mathbf{4}_3(x); \\ y_4 &= -i^{\frac{1}{4}} \mathbf{4}_0(x) - \mathbf{4}_1(x) - i^{\frac{3}{4}} \mathbf{4}_2(x) + 12 \cdot 5^{\frac{1}{4}} \mathbf{4}_3(x); \\ y_5 &= 5^{\frac{1}{4}} \mathbf{4}_0(x) - \mathbf{4}_1(x) - 5^{\frac{3}{4}} \mathbf{4}_2(x) - 12 \cdot 5^{\frac{1}{4}} \mathbf{4}_3(x). \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (125)$$

2:o. Wenn $x \geq 1$, ist nach (32) ... (35)

$$y = B_0 4_{-0}(x) + B_1 4_{-1}(x) + B_2 4_{-2}(x) + B_3 4_{-3}(x), \dots \quad (126)$$

wo

$$4_{-0}(x) = \left. \begin{aligned} & (-4x)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14}{8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20} x^{-4} - \right. \\ & \left. - \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14 \cdot 19 \cdot 24 \cdot 29 \cdot 34}{8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 28 \cdot 32 \cdot 36 \cdot 40} x^{-8} - \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

mit der Rekursionsformel

$$b_{4r+4}^{(0)} = \frac{(20r-1)(20r+4)(20r+9)(20r+14)}{(20r+8)(20r+12)(20r+16)(20r+20)} b_{4r}^{(0)}; \dots \quad (128)$$

$$4_{-1}(x) = (-4x)^{-\frac{3}{2}} \left\{ 1 + \frac{3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 18}{12 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24} x^{-4} + \dots \right\} \dots \quad (129)$$

mit der Rekursionsformel

$$b_{4r+4}^{(1)} = \frac{(20r+3)(20r+8)(20r+13)(20r+18)}{(20r+12)(20r+16)(20r+20)(20r+24)} b_{4r}^{(1)}; \dots \quad (130)$$

$$4_{-2}(x) = (-4x)^{-\frac{7}{2}} \left\{ 1 + \frac{7 \cdot 12 \cdot 17 \cdot 22}{16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 28} x^{-4} + \dots \right\} \dots \quad (131)$$

mit der Rekursionsformel

$$b_{4r+4}^{(2)} = \frac{(20r+7)(20r+12)(20r+17)(20r+22)}{(20r+16)(20r+20)(20r+24)(20r+28)} b_{4r}^{(2)}; \quad (132)$$

$$4_{-3}(x) = (-4x)^{-\frac{11}{2}} \left\{ 1 + \frac{11 \cdot 16 \cdot 21 \cdot 26}{20 \cdot 24 \cdot 28 \cdot 32} x^{-4} + \dots \right\} \dots \quad (133)$$

mit der Rekursionsformel

$$b_{4r+4}^{(3)} = \frac{(20r+11)(20r+16)(20r+21)(20r+26)}{(20r+20)(20r+24)(20r+28)(20r+32)} b_{4r}^{(3)}. \quad (134)$$

Führt man in (126) die Werte der Konstanten nach (54) ein, so sind die fünf Wurzeln in dem Ausdrücke

$$y = \alpha_3 4_{-0}(x) + \alpha_3^2 4_{-1}(x) - \alpha_3^3 4_{-2}(x) + \alpha_3^4 4_{-3}(x) \quad (135)$$

mit einbegriffen, wenn α_3 der Reihe nach die fünf Werte

$$\alpha_3 = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (136)$$

erhält.

Wir definieren eine Funktion $\mathfrak{A}(x)$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{A}(x) = \left. \begin{aligned} &\sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r a_{4r} x^{4r} + \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r a_{4r+1} x^{4r+1} + \\ &\sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r a_{4r+2} x^{4r+2} + \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r a_{4r+3} x^{4r+3}, \end{aligned} \right\} \dots \quad (137)$$

wo a_{4r} , a_{4r+1} , a_{4r+2} , a_{4r+3} die in (117)...(124) angegebene Bedeutung haben.

Wenn β eine Wurzel der Gleichung

$$\beta^4 + 1 = 0 \dots \dots \dots (138)$$

ist, dann ist

$$\mathfrak{A}_0(x) + \beta \mathfrak{A}_1(x) + \beta^2 \mathfrak{A}_2(x) + \beta^3 \mathfrak{A}_3(x) = \mathfrak{A}(\beta x); \dots (139)$$

$$\mathfrak{A}_0(x) - \beta \mathfrak{A}_1(x) + \beta^2 \mathfrak{A}_2(x) - \beta^3 \mathfrak{A}_3(x) = \mathfrak{A}(-\beta x); \dots (140)$$

$$\mathfrak{A}_0(x) + \beta^3 \mathfrak{A}_1(x) - \beta^2 \mathfrak{A}_2(x) + \beta \mathfrak{A}_3(x) = \mathfrak{A}(\beta^3 x); \dots (141)$$

$$\mathfrak{A}_0(x) - \beta^3 \mathfrak{A}_1(x) - \beta^2 \mathfrak{A}_2(x) - \beta \mathfrak{A}_3(x) = \mathfrak{A}(-\beta^3 x) \dots (142)$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{A}_0(x) = \frac{1}{4} \cdot \{\mathfrak{A}(\beta x) + \mathfrak{A}(-\beta x) + \mathfrak{A}(\beta^3 x) + \mathfrak{A}(-\beta^3 x)\}; \quad (143)$$

$$\mathfrak{A}_1(x) = \frac{1}{4\beta} \{\mathfrak{A}(\beta x) - \mathfrak{A}(-\beta x) - \beta^2 \mathfrak{A}(\beta^3 x) + \beta^2 \mathfrak{A}(-\beta^3 x)\}; \quad (144)$$

$$\mathfrak{A}_2(x) = \frac{1}{4\beta^2} \{\mathfrak{A}(\beta x) + \mathfrak{A}(-\beta x) - \mathfrak{A}(\beta^3 x) - \mathfrak{A}(-\beta^3 x)\}; \quad (145)$$

$$\mathfrak{A}_3(x) = \frac{1}{4\beta^3} \{\mathfrak{A}(\beta x) - \mathfrak{A}(-\beta x) + \beta^2 \mathfrak{A}(\beta^3 x) - \beta^2 \mathfrak{A}(-\beta^3 x)\}. \quad (146)$$

Dass auf ähnliche Weise sämtliche N_p -Funktionen auf eine einzige Funktion zurückgeführt werden können, versteht sich wohl von selbst.

§ 12. Die Wurzel $y = nN_1(x)$.

Wenn $|x| < 1$, so ist, wie schon in § 7 bemerkt wurde, eine Wurzel der Gleichung (1)

$$y = nN_1(x) \dots \dots \dots (52)$$

Nach (25), (26), (27) ist

$$N_1(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} a_{nr+1} x^{nr+1} \dots \dots \dots (147)$$

$$a_1 = \frac{1}{n+1}; \dots \dots \dots (148)$$

$$a_{nr+n+1} = \prod_{q=0}^{q=n-1} \frac{(n+1)(nr+1) + qn - 1}{\{1 + nr + n - q\}(n+1)^n} \cdot a_{nr+1} \dots (149)$$

$$= \frac{(n+1)r + n}{(n+1)r} \cdot \frac{nr+1}{nr+n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n a_{nr+1}.$$

Wir erhalten somit

$$y = \frac{nx}{n+1} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{nx}{n+1}\right)^{n+1} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{nx}{n+1}\right)^{2n+1} + \dots \dots \dots (150)$$

$$- \frac{3n+2}{2(n+1)^2} \left(\frac{nx}{n+1}\right)^{3n+1} + \frac{(4n+3)(2n+1)}{3(n+1)^3} \left(\frac{nx}{n+1}\right)^{4n+1} + \dots$$

Als Probe der Allgemeinheit dieser Entwicklung wählen wir die folgende Gleichung des zwanzigsten Grades

$$y^{20} - 20y + 15,2 = 0;$$

also $19x = 15,2; x = 0,8; n = 19; \frac{nx}{n+1} = 0,76.$

Nach (150) ist eine Wurzel

$$y = 0,76 + \frac{1}{20}(0,76)^{20} + \frac{1}{20}(0,76)^{39} + \frac{59}{800}(0,76)^{58} +$$

$$+ \frac{79 \cdot 13}{8000}(0,76)^{77} + \dots$$

$$0,76 \approx 0,76$$

$$\frac{1}{20} \cdot 0,76^{20} = 0,000\ 206\ 653\ 05$$

$$\frac{1}{20} \cdot 0,76^{39} = 0,000\ 001\ 123\ 83$$

$$\frac{59}{899} \cdot 0,76^{58} = 0,000\ 000\ 009\ 01$$

$$\frac{79 \cdot 13}{8000} \cdot 0,76^{77} = 0,000\ 000\ 000\ 09$$

$$y = 0,760\ 207\ 785\ 98.$$

Kontrolle:

$$\begin{array}{rcl}
 20y & = & 15,204 \ 155 \ 7196 \\
 - 19x & = & - 15,1 \\
 \hline
 y^{20} & = & 0,004 \ 155 \ 7196 \\
 \log y^{20} & = & 0,618 \ 6462-3 \\
 \log y & = & 0,880 \ 9323-1 \\
 y_{\text{ber}} & = & 0,760 \ 2077 .
 \end{array}$$

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 104.)

Kazan. *Société physico-mathématique.*

Bulletin. (2) T. 8: N:o 4; 9: 1-4; 10: 1. 1899-1900. 8:o.

— *Kejsert. universitetet.*

Učenijski zapiski. G. 67 (1900): N:o 3-4 & Suppl.; 5-8 & Suppl. 8:o.

Akademiska dissertationer. 4 st. 8:o.

Kharkow. *Société des sciences physico-chimiques à l'université.*

Travaux. T. 24 (1896)—27 (1899). 8:o.

— *Université Impériale.*

Annales. 1900: Kn. 4. 8:o.

Kiel. *Universitäts-Bibliothek.*

Akademische Schriften. 1899/1900. 131 st. 8:o & 4:o.

Kjøbenhavn. *Kommissionen for videnskabelig Undersøgelse af de danske Farvande.*

Beretning. Bd 2: H. 3. 1900. 4:o.

— *Kgl. danske Videnskabernes Selskab.*

Skrifter. (6) Hist.-filos. Afd. T. 5: N:o 1. 1900. 4:o.

Oversigt over Forhandlinger. 1900: N:r 4-5. 8:o.

— *Danmarks geologiske Undersøgelse.*

Beskrivelse til geologisk Kort over Danmark (i Maalestok 1 : 100,000).

Række 1: N:r 7-8. 1900. 8:o.

Krakau. *Académie des sciences.*

Bulletin international. 1900: 10. 8:o.

Kristiania. *Meteorologisches Institut.*

Jahrbuch. 1899. 4:o.

Lawrence. *University of Kansas.*

Kansas University quarterly. Vol. 1 (1900): N:o 3. 8:o.

Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*

Abhandlungen. Math.-phys. Cl. Bd 26: N:o 4. 1900. 8:o.

Berichte. , , , 1900: 5-6. 8:o.

, Philol.-hist. Cl. 1900: 8. 8:o.

Liverpool. *Biological society.*

Proceedings and transactions. Vol. 14 (1899/1900). 8:o.

London. *Meteorological Office.*

Report of the meteorological council. 1899/1900. 8:o.

— *Royal society.*

Reports to the malaria committee. Ser. 3. 1900. 8:o.

— *R. Astronomical society.*

Monthly notices. Vol. 61 (1900/1901): N:o 1. 8:o.

— *Chemical Society.*

Proceedings. Vol. 16 (1899/1900): N:o 229. 8:o.

Journal. Vol. 79-80 (1901): 1. 8:o.

— *R. Meteorological society.*

Quarterly Journal. Vol. 26 (1900): N:o 115. 8:o.

Meteorological record. Vol. 19 (1899): N:o 75. 8:o.

London. *R. Microscopical Society.*

Journal. 1900: P. 6. 8:o.

London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*

The Canadian Entomologist. 1900: 12. 8:o.

Lyon. *Société d'agriculture, sciences et industrie.*

Annales. (7) T. 6 (1898). 8:o.

— *Société Linnéenne.*

Annales. N. S. T. 46 (1899). 8:o.

Mexico. *Sociedad científica »Antonio Alzate».*

Memorias y revista. T. 14 (1899/1900): Núms. 7-10. 8:o.

— *Dep. magnético-meteorol. del observatorio astronomico nacional.*

El clima de la república mexicana en el año de 1896. Año 2. 1900. 12:o.

Minneapolis. *Geological and natural history survey of Minnesota.*

The geology of Minnesota. Vol. 5 (1898-1900). 4:o.

Montevideo. *Museo nacional.*

Anales. T. 2: Fasc. 16. 1900. 8:o.

Montpellier. *Académie des sciences et lettres.*

Mémoires. Section des sciences. (2) T. 2: N:o 6-7. 1899-1900. 8:o.

» » des lettres. (2) T. 3: N:o 1. 1900. 8:o.

Mount Hamilton. *Lick observatory.*

Publications. Vol. 4 (1900). 4:o.

München. *K. B. Akademie der Wissenschaften.*

Abhandlungen. Math.-phys. Cl. Bd 20: Abth. 3. 1900. 4:o.

Sitzungsberichte. Philos.-philol. u. hist. Cl. 1900: H. 3. 8:o.

RANKE, J., Die akademische Kommission für Erforschung d. Urgeschichte u. die Organisation d. urgeschichtl. Forschung in Bayern durch König Ludwig I. Festrede. 1900. 4:o.

— *K. Meteorologische Central-Station.*

Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern. 1900: 10. Fol.

Nancy. *Académie de Stanislas.*

Mémoires. (5) T. 17 (1899/1900). 8:o.

— *Société des sciences.*

Bulletin. (2) T. 16 (1899): Fasc. 34; (3) 1 (1900): 1-5. 8:o.

Nantes. *Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France.*

Bulletin. T. 9 (1899): Trim. 4; 10 (1900): 1-3. 8:o.

Napoli. *R. Istituto d'incoraggiamento.*

Atti. (5) Vol. 1 & Appendice. 1899. 4:o & Fol.

New York. *Academy of sciences.*

Annals. Vol. 12 (1899/1900): P. 2-3. 8:o.

— *American Museum of natural history.*

Bulletin. Vol. 11 (1900): P. 3. 8:o.

Memoirs. Vol. 2, 4. 1900. 4:o.

— *Observatory of Columbian university.*

Contributions. N:o 16. 1900. 8:o.

Paris. Ministère de l'instruction publique.

Bibliothèque de l'école des hautes études. Sect. des sc. naturelles.
T. 16 (1877)—37 (1890). 8:o.

Bulletin de géographie historique et descriptive. Année 1886—1899.
8:o.

Bulletin des sciences mathématiques. (2) T. 9 (1885)—24 (1900). 8:o.

Revue des travaux scientifiques. T. 1 (1881)—18 (1898). 8:o.

Comptes rendus du congrès des sociétés savantes de Paris et des
départements. 1896—1899. 8:o.

— **Muséum d'histoire naturelle.**

Bulletin. 1899: N:o 6—8; 1900: 1—6. 8:o.

Nouvelles archives. (4) T. 1: Fasc. 1—2; 2: 1. 4:o.

— **Société astronomique de France.**

Bulletin. 1900: 12. 8:o.

— **Société entomologique de France.**

Annales. Vol. 68 (1899): Trim. 1—4. 8:o.

Bulletin. Année 1899. 8:o.

— **Société zoologique de France.**

Bulletin. T. 24 (1899). 8:o.

Mémoires. T. 12 (1899). 8:o.

Philadelphia. Academy of natural sciences.

Journal. (2) Vol. 11: P. 3. 1900. 4:o.

Proceedings. 1900: P. 2. 8:o.

— **American philosophical society.**

Proceedings. Vol. 39 (1900): N:o 162. 8:o.

Pittsburgh. Carnegie museum.

Publications. N:o 6—7. 1899—1900. 8:o.

Plymouth. Marine biological association of the United Kingdom.

Journal. N. S. Vol. 6 (1900): N:o 2. 8:o.

Poughkeepsie. Vassar College Observatory.

Publications. N:o 1. 1900. 8:o.

Riga. Naturforscher-Verein.

Korrespondenzblatt. 43. 1900. 8:o.

Rio de Janeiro. Observatorio.

Annuario. 1900. 8:o.

CEULS, L., Méthode pour déterminer les heures des occultations
d'étoiles par la lune. 1899. 4:o.

Roma. Ministero della Pubblica Istruzione.

Indici e cataloghi. 15. 1900. 8:o.

— **R. Accademia dei Lincei.**

Cl. di scienze morali...

Atti. (5) P. 2: Notizie degli scavi. 1900: 8. 8:o.

Cl. di scienze fisiche...

Rendiconti. (5) Vol. 9 (1900): Sem. 2: Fasc. 11. 8:o.

Saint Louis. Academy of science.

Transactions. Vol. 9 (1899/1900): N:o 6, 8—9; 10 (1900): 1—8. 8:o.

St. Petersburg. *Académie Imp. des sciences.*

Mémoires. (8) T. 10: N:o 7-8. 1900. 4:o.

Bulletin. (5) T. 12 (1900): N:o 2-5; 13 (1900): 1-2. 8:o.

— *Hortus Petropolitanus.*

Scripta botanica. Fasc. 15. 1899—1900. 8:o.

— *Musée zoologique.*

Annuaire. T. 5 (1900): N:o 3. 8:o.

— *Societas entomologica Rossica.*

Hors. T. 32 (1898): N:o 3-4; 33 (1899): 1-2; 34 (1900): 3-4. 8:o.

Ukazatel. 1899. 8:o.

— *K. Universitetet.*

Zapiski istoriko-filologičeskago fakulteta. 48—50: 1; 51—54: 1-2; 55—57. 1898—1900. 8:o.

Dissertationer 1898/1900. 3 st. 8:o.

— *Observatoire physique central Nicolas.*

Atlas climatologique de l'empire de Russie 1849—1899 & Notice explicative. Fol. & 8:o.

Stettin. *Entomologischer Verein.*

Stettiner entomologische Zeitung. Jahrg. 61: N:o 7-12. 1900. 8:o.

Sydney. *Department of mines and agriculture.*

Annual mining report. 1899. Fol.

Tokio. *Medicinische Facultät der K. Japanischen Universität.*

Mittheilungen. Bd. 4: N:o 7. 1900. 8:o.

Toulouse. *Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres.*

Bulletin. T. 2 (1898/99): N:o 1-4. 8:o.

Trieste. *Osservatorio astronomico-meteorologico.*

Rapporto annuale. Anno 1897. 4:o.

Troyes. *Société académique d'agriculture, des sciences, arts et belles-lettres.*

Mémoires. (3) T. 36 (1899). 8:o.

Warschau. *Prace matematyczno-fizyczne.*

T. 11. 1900. 8:o.

Washington. *Academy of sciences.*

Proceedings. Vol. 2 (1900): pp. 389-676. 8:o.

— *U. S. Department of agriculture.*

Publications. October, 1900. 24 st. 8:o & 4:o.

— *U. S. Weather bureau.*

Monthly weather review. 1900: 9. 4:o.

Weather map. 1900: 7-10. Fol.

— *U. S. National museum.*

Bulletin. N:o 47: P. 4. 1900. 8:o.

— *U. S. Coast and geodetic survey.*

Special publication. N:o 4. 1900. 4:o.

Wien. *K. K. geographische Gesellschaft.*

Abhandlungen. Bd 2 (1900): Num. 1-7. 8:o.

— *K. K. zoologisch-botanische Gesellschaft.*

Verhandlungen. Bd. 50 (1900): H. 9. 8:o.

Wien. Geologische Reichsanstalt.

Jubiläums-Festschrift, 9. Juni 1900. 8:o.

Zur Erinnerung an die Jubiläums-Feier d. k. k. geologischen Reichsanstalt... gewidmet v. G. STACHE. 9. Juni 1900. 8:o.

Zürich. Schweizerische meteorologische Central-Anstalt.

Annalen. Jahrg. 35 (1898). 4:o.

Af Professor B. Hasselberg:

RYDBERG, J. R., Die Härte der einfachen Körper. Lpz 1900. 8:o.
5 småskrifter.

Af Prof. A. G. Nathorst:

3 polarkartor.

Af Dr. Henry Wilde:

In the matter of the Society of arts and HENRY WILDE. Manchester 1900. 4:o.

Af Alfred Åkerlindh (Ottawa):

Canadian year book for 1900. Toronto. 8:o.

5 skrifter om Canada.

Af utgifvarne:

Svenska jägareförbundets nya tidskrift, utg. af A. WAHLGREN. Årg. 38 (1900): H. 4. 8:o.

Svensk kemisk tidskrift, utg. af Å. G. EKSTRAND. Årg. 12 (1900): N:o 8. 8:o.

Botaniska notiser utg. af O. NORDSTEDT, separater ur årg. 1900. 8:o.

Le Devoir, dir. M^{me} V^{ve} GODIN. T. 24 (1900): 711—712. 8:o.

La Feuille des jeunes naturalistes, publ. par A. DOLLFUS. (4) Année 31 (1901): N:o 363. 8:o.

Af författarne:

JOHNSON, K. R., Beiträge zur Kenntniss der Vorgänge in Inductionsapparaten. Abth. 1. Lpz 1900. 8:o.

— Constanz oder Inconstanz des Funkenpotentials. Lpz 1900. 8:o.

KINBERG, J. G. H., Novæ literæ Asiæ Orientalis. Sthlm 1900. 8:o.

LILLJEBORG, W., Cladocera Sueciæ. Ups. 1900. 4:o.

LÖNNBERG, E., Cestoden. Hamburg 1896. 8:o.

— Reptiles and Batrachians collected in German New Guinea by E. NYMAN. Lond. 1900. 8:o.

— 14 småskrifter.

NATHORST, A. G., Två somrar i Ishafvet. H. 1—6. Sthlm 1900. 8:o.

CANETE DEL PINAR, Algo más sobre observaciones de precisión con el sextante. Madrid 1900. 8:o.

CONWENTZ, Zur Verbreitung des Moschusochsen und anderer Thiere in Nordost-Grönland. Berl. 1900. 8:o.

— Forstbotanische Merkbücher. Danzig 1900. 12:o.

CRIVETZ, TH., Essai sur l'équidistante. Bucarest 1900. 8:o.

Af författarne:

EDELMANN, M. TH., Fortschritte in der Herstellung der Galtoupfefe.
Wiesbaden 1900. 8:o.

— 2 småskrifter.

EDWARDS, F. G., Chemistry an exact mechanical philosophy. Lond.
1900. 8:o.

FASCIANELLI, L., Catalogo degli strumenti sismici e meteorologici
più recenti. Roma 1900. 8:o.

JÖRGENSEN, S. M., Zur Konstitution der Platinbasen. 3. Lpz 1900.
8:o.

LAMBE, L. M., Sponges from the coasts of N.E. Canada and Green-
land. Ottawa 1900. 8:o.

LINDBERG, H., Botanisk undersökning af Isosuo-mosse i Sakkola
socken. Hfors 1900. 8:o.

— 8 småskrifter.

MORANDI, L., Normales para el clima de Montevideo. Montevideo
1900. 8:o.

NIESSEN, M. V., Beiträge zur Syphilis-Forschung. 1—3. Wiesbaden.
1900. 4:o.

UNGER, J., Die Gravitation ist eine Fiction. Wien 1900. 8:o.

— Die Ursache der Umdrehung der Erde. Wien 1900. 8:o.

WEINEK, L., Die Tychoischen Instrumente auf der Prager Stern-
warte. Prag 1901. 8:o.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 58.

1901.

N^o 2.

Onsdagen den 18 Februari.

INNEHÅLL:

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar.	sid. 135.
PALMER. Ueber die kapillarelektischen Erscheinungen	» 139.
PAHL, Nya undersökningar öfver pyrofosfat af natrium, kalcium och magnesium	» 161.
Skäner till Riksmuseum och Akademiens Bibliotek.	sidd. 187, 181.

Tillkännagafs, att Akademiens inländska ledamöter f. d. Utrikes Ministern Grefve ALBERT EHRENSVÄRD, f. d. Professorn JAKOB GEORG AGARDH, f. d. Professorn CARL JAKOB ROSSANDER, och f. d. Lektorn CHRISTIAN FREDRIK LINDMAN, samt utländska ledamöterna Professorn vid universitetet i Paris CHARLES HERMITE, f. d. Professorn vid universitetet i München MAX VON PETTENHOFER och f. d. Professorn vid Polytekniska Institutet i Dresden OSCAR SCHLÖMILCH med döden afgått.

Med anledning af Kongl. Maj:ts remiss å ett af Väg- och Vattenbyggnads- samt Landtbruks-styrelserna gemensamt uppgjort förslag till plan för hydrografiska undersökningar inom landet afgåfvo Herrar PETERSSON och ALMQVIST infordradt utlåtande, hvilket Akademien för sin del godkände.

Öfver ett af K. Preussiska Vetenskaps-Akademien väckt och Akademien meddeladt förslag om åtgärders vidtagande för underlättande af internationel utlåning af handskrifter, hvilket förslag skulle förekomma till behandling af den internationella akademiska Associationens nästa sammanträde den 16 instundande April, afgåfvo Herrar RETZIUS och DAHLGREN infordradt

utlåtande, som af Akademien godkändes. Akademien uppdrog derjemte åt sin nuvarande Præses Professor RETZIUS att såsom dess ombud bevista Associationens nämnda sammanträde.

Herr TÖRNEBOHM förevisade en å Sveriges geologiska undersökningsbyrå nyligen upprättad geologisk öfversigtskarta öfver Sverige och lemnade i samband dermed en framställning af Sveriges äldsta geologiska historia.

Herr BOHLIN förevisade åtskilliga på Akademiens observatorium tagna fotografier af nebulosor.

På tillstyrkan af komiterade antogos till införande i Akademiens skrifter följande inlemnade afhandlingar:

dels i Bihaget till Akademiens Handlingar: 1:o) »Ueber eine Molluskenfauna von Grey Hook auf Spitsbergen», af Professor E. KAYSER i Marburg; 2:o) »Beiträge zur Kenntniss der Insektenfauna von Kamerun. N:o 8», af Doktor Y. SJÖSTEDT; 3:o) »Zur Kenntniss der Gefässpflanzen Ostgrönlands», af Ingeniören P. DUSÉN;

dels i Öfversigten: de i innehållsförteckningen angifna 2. afhandlingar.

Letterstedtska priset för förtjenstfulla originalarbeten och viktiga upptäckter tillerkändes f. d. Professorn W. LILLJEBORG för hans under nästlidne år utgifna arbete: »Cladocera Sueciæ».

Letterstedtska priset för förtjenstfulla öfversättningar till svenska språket tilldelades Doktorinnan ANNA GEETE, född HAMILTON, för hennes under en följd af år utgifna förtjenstfulla öfversättningar af de bästa engelska och amerikanska författares skönliterära arbeten.

Letterstedtska medlen för maktpåliggande undersökningar skulle ställas till Docenten A. HAMBERGS förfogande såsom understöd för fortsättande af hans undersökningar angående de glaciala och meteorologiska förhållandena i Sarjeks fjelltrakter i nordliga Sverige.

Årsräntan å *Scheelefonden* skulle öfverlemnas åt Ingeniören J. KÖHLER såsom understöd för fullföljande af redan påbörjade undersökningar öfver grankädan i kemiskt afseende.

Genom anställt val kallades Professorn i kirurgi vid universitetet i Heidelberg VINCENZ CZERNY till utländsk ledamot af Akademien.

Följande skänker anmäldes:

Till Riksmusei Mineralogiska afdelning.

En särdeles vacker och värderik samling af guldprof från olika delar af Klondyke, skänkt af Häradshöfding C. A. V. EK.

Till K. Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *Meteorologiska central-anstalten.*

Månadsöfversigt af väderleken i Sverige till landtbrukets tjenst. Utg. af H. E. HAMBERG. Årg. 20 (1900). Fol.

— *Statistiska Centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. 4 häften. 4:o.

— *Karolinska Mediko-kirurgiska Institutet.*

Berättelse 1898/99. 8:o.

— *Svenska sällskapet för antropologi och geografi.*

Ymer. Årg. 20 (1900): H. 4.

— *Svenska trädgårdsföreningen.*

Tidskrift. N. F. 1900: N:r 11—12. 8:o.

Göteborg. *Museum.*

Årsberättelse 1900. 4:o.

Adelaide. *Observatory.*

Meteorological observations. Year 1897. Fol.

Amsterdam. *Wiskundig Genootschap.*

Nieuw Archief. (2) D. 5: St. 1. 1901. 8:o.

Wiskundige opgaven met de oplossing. D. 8: St. 3. 1900. 8:o.

Revue semestrielle des publications mathématiques. T. 9: P. 1. 1901. 8:o.

Berlin. *K. Preussische Akademie der Wissenschaften.*

Sitzungsber. 1900: 39—53. 8:o.

Politische Correspondenz Friedrich's des Grossen. Bd 26. 1900. 8:o.

— *Deutsche physikalische Gesellschaft.*

Die Fortschritte der Physik. 1899: 1—3. 8:o.

— *Botanischer Verein der Provinz Brandenburg.*

Verhandlungen. Jahrg. 42 (1900). 8:o.

Bordeaux. *Observatoire.*

Annales. T. 9. 1900. 4:o.

Bruxelles. *Académie R. de Belgique.*

Bulletin. Cl. des lettres ... 1900: N:o 12. 8:o.

» Cl. des sciences ... 1900: N:o 12. 8:o.

Annuaire. Année 67 (1901). 12:o.

— *Société R. de botanique.*

Bulletin. T. 39. 1900. 8:o.

- Bruxelles.** *Société Belge de Géologie.*
Bulletin. T. 13 (1899): Fasc. 2. 8:o.
- Buenos Aires.** *Sociedad Científica Argentina.*
Anales. T. 50 (1900): Entr. 5. 8:o.
- Cambridge.** *Philosophical society.*
Proceedings. Vol. 10: P. 7; 11: 1. 1900—1901. 8:o.
List. 1901. 8:o.
- Cambridge, U. S. A.** *Museum of comp. zoölogy.*
Annual report. 1899/1900. 8:o.
— *Astronomical observatory of Harvard College.*
Annual report. 55 (1899/1900). 8:o.
- Cape Town.** *South African Museum.*
Annals. Vol. 2 (1900): P. 4. 8:o.
- Chambésy.** *Herbier Boissier.*
Bulletin. (2) T. 1 (1901): N:o 2. 8:o.
- Coimbra.** *Sociedade Broteriana.*
Boletim. 17 (1900): Fasc. 1—2. 8:o.
- Genova.** *Musei di zoologia e anatomia comparata.*
Bollettino. 1900: N:o 90—97. 8:o.
— *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*
Atti. Vol. 11 (1900): N:o 2—3. 8:o.
- Glasgow.** *Philosophical society.*
Proceedings. Vol. 31 (1899/1900). 8:o.
- 's-Gravenhage.** *Ministerie van binnenlandsche zaken.*
KOPS, J., & VAN EEDEN, F. W., Flora Batava. Afl. 331—332. Harlem
1900. 4:o.
- Greifswald.** *Geographische Gesellschaft.*
Jahresbericht. 7 (1898/1900). 8:o.
- Göttingen.** *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Nachrichten. Math.-phys. Kl. 1900: H. 3. 8:o.
» Geschäftl. Mittheilungen. 1900: H. 2. 8:o.
- Halifax.** *Nova Scotian institute of science.*
Proceedings and transactions. Vol. 10 (1898/99): P. 1. 8:o.
- Halle.** *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd 73 (1900): H. 3—4. 8:o.
- Hamburg.** *Naturhistorisches Museum.*
Mittheilungen. Jahrg. 16 (1899)—17 (1900). 8:o.
- Harlem.** *Société Hollandaise des sciences.*
Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles. (2) T. 5.
1900. 8:o.
- Indianapolis.** *Indiana academy of science.*
Proceedings. 1898—99. 8:o.
- Jena.** *Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
Denkschriften. Bd 4: Lief. 3: Text & Atlas. 1901. 4:o.
- Kjöbenhavn.** *Carlsberg Laboratoriet.*
Meddelelser. Bd. 5: H. 1. 1900. 8:o.
— *Meteorologisk Institut.*
Maanedsoversigt. 1900: 1—12. Fol.

(Forts. å sid. 181.)

Ueber die kapillarelektrischen Erscheinungen.

VON WILH. PALMÆR.

[Mitgetheilt am 13. Februar 1901 durch P. KLASON].

Vor drei Jahren berichtete ich über Versuche, wodurch die von NERNST theoretisch hergeleiteten Konzentrationsänderungen bei Tropfelektroden durch elektrometrische Messungen nachgewiesen wurden.¹⁾ G. MEYER wiederholte und bestätigte dann meine Versuche und machte auch neue Versuche, wobei in dem von mir angegebenen Apparate statt Quecksilber tropfende Amalgame verwendet wurden.²⁾ G. MEYER suchte des weiteren seine neue sowie meine Versuchsergebnisse im Sinne der WARBURG'schen Theorie der Elektrokapillarität³⁾ zu deuten und schliesst mit der Aussprache dass nach dieser Theorie »sind demnach die von Hrn PALMÆR an seinen Tropfelektroden beobachteten Thatsachen widerspruchsfrei zu erklären, und diese Erscheinungen können daher nicht als eine *zwingende* Bestätigung der von Hrn NERNST gegebenen Theorie der Tropfelektroden angesehen werden».⁴⁾ In einer späteren Arbeit, wo ich die in Rede stehenden Konzentrationsänderungen durch rein chemischen Mitteln nachgewiesen habe,⁵⁾ habe ich auch geäussert dass meine Versuche, *an und für sich*, keinen entscheidenden Beweis gegen die WARBURG'schen

¹⁾ Bihang till Vet. Akad. Handl. Bd 23. Afd. II. N:o 5 (1898).

²⁾ Ann. der Physik und Chemie, N. F. 67, 483 (1899).

³⁾ Ann. d. Physik u. Chemie, N. F. 41, 1 (1890).

⁴⁾ G. MEYER l. c. Seite 488.

⁵⁾ Öfversigt af Kongl. Vet. Akad. Förhandl. 1898, 761.

Theorie der elektrokapillaren Phänomene liefern (l. c. Seite 789). Ich bin damals nicht näher auf die Frage eingegangen, ob die **WARBURG'sche** oder die **NERNST'sche** Theorie vorzuziehen sei, weil ich hoffte mit Hilfe neuer Versuche die Diskussion abkürzen zu können. In der Zwischenzeit sind ein Theil der geplanten Versuche durch **SMITH** ausgeführt worden¹⁾ und andere sind wegen experimenteller Schwierigkeiten nicht fertig gebracht. Ich möchte deshalb die Diskussion der Frage nicht mehr aufschieben, auch weil ich hoffe zeigen zu können dass durch Heranziehung des ganzen, sehr bedeutenden experimentellen Materials auf dem kapillarelektischen Gebiete eine Wahl zwischen der **WARBURG'schen** und der **NERNST'schen** Theorie getroffen werden kann. Zuerst möchte ich doch die Gelegenheit benutzen über die älteste Theorie der kapillarelektischen Phänomene, die bekanntlich von **HELMHOLTZ** herrührt,²⁾ einige Bemerkungen zu machen, obwohl diese Theorie schon vielfach diskutiert worden ist.³⁾

Die Helmholtzsche Theorie.

Erstens ist festzustellen, dass diese Theorie insofern *unvollständig* ist dass sie nichts darüber aussagt, *wie* die »natürliche« Potentialdifferenz zwischen Quecksilber und einen Elektrolyten entsteht; **HELMHOLTZ** folgert nur aus der Richtung des Tropf-elektrodenstromes dass Quecksilber sich gegen verdünnte Schwefelsäure und mehrere andere Elektrolyte positiv ladet, ohne sich über die Ursache dieser Ladung zu äussern.⁴⁾

Bei der Erklärung der Abhängigkeit der Oberflächenspannung des Quecksilbers von der elektromotorischen Kraft der Polarisation, nimmt **HELMHOLTZ** des weiteren an, dass die angelegte Spannung nur eine Ladung der Quecksilberelektrode bewirkt,

¹⁾ Zeitschr. phys. Chemie 32, 433 (1900).

²⁾ Wiss. Abhandlungen I, 925.

³⁾ Vergl. besonders **NERNST**, »Ueber Behrührungselektricität,« Beilage zu den Ann. der Physik und Chemie 1896, Seiten 4, 9, 12, 13.

⁴⁾ Wiss. Abhandl. I, 934.

wodurch Ionen entgegengesetzter Ladung an die Quecksilberoberfläche gezogen werden — dass aber keine Quecksilberjonen (oder andere Ionen) ausgeschieden werden. Hierbei wird keine Rücksicht genommen auf den stets vorhandenen Reststrom¹⁾; da bei den benutzten Elektrolyten, z. B. Schwefelsäure, immer mit Hilfe des Luftsauerstoffs eine kleine Menge Quecksilber gelöst wird, so wird der Reststrom, wegen der leichten Ausfällbarkeit des Quecksilbers, hauptsächlich durch die Entladung von Quecksilberjonen entstehen. Dies hat auch BEHN direkt nachgewiesen; bei seinen Versuchen betrug die angelegte Spannung 0,5—0,6 Volt in einem mit Hg_2SO_4 versetzten Quecksilbervoltameter und war also niedriger als die Spannung, die erforderlich ist um eine sichtbare Elektrolyse hervorzurufen oder das Quecksilber auf das Maximum der Oberflächenspannung zu bringen.²⁾ Die Annahme dass die zugeführte Elektrizität *nur* zur *Ladung* der Elektroden ohne gleichzeitige Abscheidung von Ionen dient darf wohl deshalb in diesen wie in anderen Fällen als bis jetzt nicht begründet bezeichnet werden.

Der Einfluss der Potentialdifferenz $\text{Hg}|\text{Elektrolyt}$ auf die Oberflächenspannung des Quecksilbers erklärt HELMHOLTZ (l. c. Seite 931) bekanntlich sehr schön in folgender Weise: die elektrische Ladung des Quecksilbers, gleichviel ob positiv oder negativ, stösst die Partikelchen auseinander und vermindert dadurch die Oberflächenspannung; in unbeladenem Zustande, wo die Potentialdifferenz $\text{Hg}|\text{Elektrolyt} = 0$, muss daher die Oberflächenspannung ein *Maximum* erreichen. Auf die Veranlassung HELM-

¹⁾ Vgl. NERNST, l. c. Seite 4.

²⁾ BEHN — Ann. d. Physik und Chemie, N. F. 61, 748 (1897) — berechnet, dass die ausgeschiedene Quecksilbermenge 94 % der durchgegangenen Elektrizitätsmenge entspricht weil die Analyse der Kathodenflüssigkeit ergibt dass diese so viel Quecksilber verloren hatte. Er übersieht hierbei dass der Verlust der Kathodenflüssigkeit zum Theil durch *eingewanderte* Hg-Ionen gedeckt wird. Die Menge der eingewanderten Hg-Ionen ist zwar nur klein, da die H-Ionen in vielgrösserer Zahl vorhanden sind und wohl etwa 6 mal schneller wandern. In der That wird jedenfalls eine grössere Menge Hg ausgeschieden, als die den 94 % der Elektrizitätsmenge entsprechende. BEHN erklärt das Defizit durch Abscheidung von Wasserstoff, ohne eine solche wahrgenommen zu haben.

HOLTZ's erweiterte dann KÖNIG¹⁾ die früher von LIPPMANN²⁾ gemachten Beobachtungen und zeigte dass in vielen Elektrolyten ein solches Maximum der Oberflächenspannung auftritt; mit Hülfe des Opthalmometers bestimmte KÖNIG theils bei welcher Spannung das Maximum eintrat, theils den absoluten Wehrt der Kapillarspannung.

Allgemein bekannt ist ferner die HELMHOLTZ'sche Erklärung der Tropfelektroden. Er ging von der gewiss richtigen Voraussetzung aus, dass zur Ausbildung der »natürlichen« Potentialdifferenz Hg-Elektrolyt eine gewisse Zeit erforderlich ist. Daraus schliesst er dass eine schnell tropfende Elektrode gegen den Elektrolyten keine Potentialdifferenz besitzt (l. c. Seite 936). Es erübrigte sich nun zu entscheiden, ob genug schnell tropfende Elektroden sich herstellen lassen. Dies wäre wohl leichter, wenn die Quecksilberoberfläche sich wie ein isolirender Kondensator verhielt; aber wie NERNST bemerkt,³⁾ »in Wirklichkeit verhält sich die Quecksilberoberfläche nicht wie ein isolirender Kondensator (thäte er das, so würde sich ja eine 'natürliche Potentialdifferenz' gar nicht ausbilden können.)« Da später von mir nachgewiesen worden ist, dass die elektromotorische Kraft der Tropfelektrode durch die von NERNST vorhergesagten Konzentrationsänderungen in der Lösung sich erklären lässt, so hat man in der That keinen Grund anzunehmen, dass bei den bisher beobachteten kapillarelektischen Phänomene die zur *Ladung erforderliche Zeit* irgend einen merklichen Einfluss ausübt.

HELMHOLTZ (l. c. Seite 937) glaubt dass die durch folgenden Versuche von KÖNIG (l. c. Seite 37) nachgewiesen ist, dass zur Aufladung einer Quecksilberoberfläche in Schwefelsäure eine geraume Zeit, ja mehrere Stunden, erforderlich sei. KÖNIG beobachtete theils dass ein Quecksilbermeniskus, der erst mit einer Tropfelektrode verbunden war, nach Aufheben dieser Verbindung

¹⁾ HELMHOLTZ l. c.; KÖNIG Ann. der Physik und Chemie, N. F. 16, 1 (1882).

²⁾ Ann. de chim. et de phys. [5], 5, 494 (1875) und [5], 12, 265 (1877).

³⁾ NERNST, l. c. Seite 4.

ein langsames, mehrere Stunden andauerndes Abnehmen der Oberflächenspannung zeigte, theils dass eine frische Quecksilberoberfläche seine Oberflächenspannung unter Schwefelsäure mit der Zeit vermindert. Diese Versuche sind wohl zweifellos so zu deuten, dass, wie **WARBURG** zuerst gezeigt hat,¹⁾ unter Vermittlung des gelösten Sauerstoffes Quecksilber gelöst wird, so dass der früher mit der Tropfelektrode verbundene Quecksilbermeniskus sowie die frische Quecksilberoberfläche allmählich mit einer konzentrierteren Salzlösung umgeben wird, wodurch die Oberflächenspannung abnimmt. So lange der Meniskus mit der Tropfelektrode verbunden ist, wird, in folge des Tropfelektrodenstromes, Quecksilber auf den Meniskus niedergeschlagen und dadurch die Lösung in nächster Nähe des Meniskus an Quecksilber verarmt, weshalb die Oberflächenspannung dann höher ist.

Man darf wohl daher sagen, dass von den **HELMHOLTZ**'schen Auseinandersetzungen über die kapillarelektischen Erscheinungen nur die schöne Erklärung der Verminderung der Oberflächenspannung des Quecksilbers durch eine elektrische Ladung sich bewährt hat.

Vergleich zwischen den Theorien von Warburg und Nernst.

WARBURG stellte fest, dass Quecksilber bei Berührung mit lufthaltigen Elektrolyten, z. B. verdünnter Schwefelsäure, allmählich gelöst wird, so dass zuerst in nächster Nähe des Quecksilbers eine Lösung von Quecksilbersalz entsteht; das gelöste Salz verbreitet sich später durch Diffusion in die ganze Flüssigkeit.¹⁾ Diese Thatsache ist von der grössten Bedeutung für das Verständniss der kapillarelektischen Versuchen bei denen, wenigstens früher, öfters Lösungen verwendet wurden, die von vornherein quecksilberfrei waren aber trotzdem also nach einiger Zeit Quecksilber enthielten.

¹⁾ Ann. d. Physik und Chemie, N. F. 38, 321 (1890).

WARBURG wurde dann auf den Gedanken geleitet, dass hierdurch die galvanische Polarisisation zum Theil (oder vielleicht ganz und gar) erklärt wird, indem durch die angelegte Spannung ein kleiner Strom entsteht, wodurch etwas Metall ausgefällt oder in Lösung getrieben wird¹⁾; dadurch wird die Konzentration der Lösung in nächster Nähe der Elektrode geändert und dadurch auch die Spannungsdifferenz zwischen Elektrode und Lösung, so dass der Strom eventuell fast ganz aufhört. Diese Anschauung wird bekanntlich als »Leitungsstromtheorie« der galvanischen Polarisisation bezeichnet — im Gegensatz zu der HELMHOLTZ'schen »Ladungsstromtheorie«, wonach die polarisierende Spannung nur zur Ladung der Elektroden und der Lösung dient, ohne dass Ionen abgeschieden werden.

WARBURG zeigte des weiteren dass das Anwachsen der Oberflächenspannung des Quecksilbers in z. B. verdünnter Schwefelsäure bei *kathodischer* Polarisisation (LIPPMANN'S Versuch) hier nach so zu deuten wäre, dass durch die polarisierende Spannung etwas Quecksilber aus der unmittelbar umgebenden Schicht der Lösung ausgefällt wird, wodurch die Kapillarspannung wachsen muss. Dass die Kapillarspannung beim Vermindern des Quecksilbergehaltes der Lösung wächst, zeigte WARBURG direkt, indem er der Schwefelsäure verschiedene Mengen Quecksilbersalz hinzufügte.

Zur Erklärung der *Tropfelektroden* reichte aber die Beobachtung, dass Quecksilber von lufthaltigen Elektrolyten gelöst wird, nicht aus. Eine auf die in Rede stehende Erscheinung gegründete Erklärung wäre die folgende. Wir denken uns eine Tropfelektrode in verdünnter Schwefelsäure und messen die Potentialdifferenz zwischen der Tropfelektrode und einer in derselben Lösung befindlichen ruhenden Quecksilberoberfläche. Die ruhende Quecksilbermasse bedeckt sich mit einer Lösung von Merkursulfat, die mit der Zeit eine gewisse Konzentration erreicht. Der Meniskus der Tropfelektrode wird, während er noch in Ruhe ist, auch von einer Quecksilberlösung umgeben; wenn das Tropfen beginnt, wird diese Lösung fortgerissen und um die immer

¹⁾ Ann. d. Physik und Chemie, N. F. 41, 1 (1890).

neugebildeten Tropfen kann keine neue Lösung gebildet werden, weil die Zeit dazu fehlt. Die Tropfelektrode wird also von einer Lösung umgeben sein, die ärmer an Quecksilber ist als die Lösung, die die ruhende Quecksilbermasse umgibt. Infolge dessen entsteht ein Konzentrationselement, dessen Strom im Elektrolyten vom tropfenden zum ruhenden Quecksilber geht — genau wie es der Wirklichkeit entspricht.

Diese nahe liegende Erklärung des Tropfelektrodenstromes ist doch völlig unzureichend. Durch Diffusion, sowie durch die Rührung durch die Tröpfchen, wird sich bald Quecksilbersalz von der unteren Quecksilbermasse in die ganze Flüssigkeit verbreiten. Die elektromotorische Kraft der gedachten Tropfelektrode beträgt etwa 0,8 Volt. Dies entspricht, da die Merkurojonen nach OGG ¹⁾ die Zusammensetzung $-\dot{\text{Hg}}-\dot{\text{Hg}}-$ haben und da $\frac{0,80}{0,03} = \text{rund } 27$, eine 10^{27} mal höhere Konzentration bei der ruhenden Quecksilberoberfläche als bei der Tropfelektrode, was in Anbetracht der Diffusion und der Rührung (die ruhende Quecksilberoberfläche kann ja im demselben Rohre wie die Tropfelektrode unterbracht sein) ganz unmöglich ist.

Des weiteren würde in einer früher mit Quecksilber bei Luftzutritt geschüttelter Lösung die Tropfelektrode keinen Strom geben, was doch nach meinen früheren Versuchen der Fall ist. ²⁾

Dass die, unter Zuhilfenahme des Luftsauerstoffs, stattfindende Lösung von Quecksilber, wobei zuerst in nächster Nähe der Oberfläche Quecksilbersalz entsteht, unzureichend ist, um die Tropfelektroden zu erklären, erkannte WARBURG auch. Um das Phänomen der Tropfelektroden zu erklären, schrieb daher WARBURG in einer späteren Arbeit ³⁾ dem Quecksilber die Eigenschaft zu, Quecksilbersalz aus einer Lösung auf seiner Oberfläche zu verdichten, was kurzweg als *Kondensationsvermögen* des Quecksilbers bezeichnet worden ist. Die Erklärung des Tropfelektrodeneffekts wird dann folgende. Die ruhende Quecksilberoberfläche

¹⁾ Zeitschr. phys. Chemie 27, 285 (1898).

²⁾ Bihang till K. Vet. Ak. Handl. Bd. 23 Afd. II N:o 5 sid. 11 och Öfversigt af K. Vet. Ak. Förh. 1898, sid. 767.

³⁾ Ann. der Physik und Chemie, N. F. 41, 1 (1890).

ist dank des Kondensationsvermögens, mit einer Quecksilbersalzschrift umgeben, deren Konzentration eventuell viel höher als die Konzentration des Quecksilbersalzes in der eigentlichen Lösung sein kann. Bei den Tropfen kann aber, wenn die Lösung nicht sehr reich an Quecksilber ist, wegen Mangel an Zeit keine merkliche Kondensation stattfinden. Daher erhalten wir, wenn die Tropfelektrode mit der unteren Quecksilbermasse verbunden wird, eine Konzentrationskette, wo der Konzentrationsunterschied und somit die elektromotorische Kraft bedeutend ist.

Dies ist, soweit ich verstehen habe, der wesentliche Inhalt der WARBURG'schen Theorie, auf die wir jetzt etwas ausführlicher eingehen werden.

Zunächst ist festzuhalten, dass das Kondensationsvermögen eine *ad hoc* gemachte Hypothese darstellt und beim Quecksilber sonst nicht beobachtet worden ist.

Zweitens ist die hohe elektromotorische Kraft der Tropfelektrode auch durch diese Hypothese nicht erklärbar. Wenn die Tröpfchen auch kein Salz kondensieren können, so sind sie doch von der Lösung des Gefäßes umgeben. Diese Lösung wird, wenn sie aus verdünnter Schwefelsäure besteht, bald so Quecksilberhaltig, dass sie durch Schwefelwasserstoff gefärbt oder gar gefällt wird. Nehmen wir deshalb an, dass die Lösung 0,000 001 normal in Bezug auf Quecksilber ist, was sicher zu niedrig gegriffen ist.¹⁾ Wie oben berechnet, entspricht die elektromotorische Kraft der Tropfelektrode eine 10^{27} mal stärkere Quecksilberkonzentration bei der unteren Quecksilbermasse als bei den Tropfen. Die Konzentration des Quecksilbersalzes in der kondensierten Schicht würde demnach $10^{27} \cdot 0,000\ 001 = 10^{21}$ normal sein. Das würde $2 \cdot 10^{14}$ Kilogrammen Quecksilber pro Kubikmillimeter entsprechen, was unmöglich ist.²⁾

¹⁾ Eine Lösung von Kalomel in Wasser, die durch H_2S nicht geschwärzt wird, ist $2,24 \cdot 10^{-6}$ normal. Vgl. WILSMORE, Zeitschr. phys. Chemie 35, 305 (1900).

²⁾ G. MEYER—Ann. d. Physik u. Chemie N. F. 67, 433 (1899)—hat dagegen später die Ansicht ausgesprochen, dass auf jeden frischen Tropfen fortwährend

Nach NERNST wird der Effekt der Tropfelektrode bekanntlich so erklärt, dass, in Folge der *niedrigen, elektrolytischen Lösungstension* des Quecksilbers, Quecksilberjonen auf die Tröpfchen niedergeschlagen werden, bis der osmotische Druck der in der Lösung noch bleibenden Quecksilberjonen gleich dem Lösungsdruck ist, sofern nicht Diffusion und Konvektion schon früher eine Grenze setzen.¹⁾ Da es aber für eine Verminderung der Konzentration keine untere Grenze giebt, so können die enormen Konzentrationsunterschiede, die die elektromotorische Kraft der Tropfelektrode anzeigt, durch NERNST'S Theorie sehr gut erklärt werden. Die Erklärung der Tropfelektroden nach NERNST ist also nur eine Anwendung der allgemeinen Theorie des elektrolytischen Lösungsdruckes und eine neue Hypothese braucht für den Zweck nicht gemacht zu werden.

Wenn ein als Kahtode dienender Quecksilbermeniskus unter einem Elektrolyten mit immer grösseren Spannungen polarisiert wird, so tritt bekanntlich, nachdem das Maximum der Oberflächenspannung erreicht ist, wieder eine Abnahme der genannten Grösse ein, und man befindet sich auf dem *absteigenden Ast* der Kapillarelektrometerkurve. Dasselbe Effekt kann man erreichen durch Zusatz von Reagenzien die den Gehalt der Lösung an Quecksilberjonen stark herabdrücken, wie Cyankalium, Schwefel-

Quecksilbersalz kondensiert wird, und daher die Lösung in der Nähe der Tropfelektroden ärmer an Quecksilbersalz wird. Diese Erklärung erscheint auch nicht haltbar. Denn wenn sie richtig wäre, müssen offenbar die Tröpfchen von einer Schicht umgeben sein, wo die Quecksilberkonzentration höher ist als in den umgeben Theilen der Lösung; dann müsste auch die Potentialdifferenz zwischen Tropfelektrode und einer unter der unveränderten Lösung befindlichen, konstanten Quecksilberelektrode *kleiner* sein als die Potentialdifferenz zwischen einer in der Nähe der Tropfelektrode angebrachten parasitischen Elektrode und der konstanten Quecksilberelektrode. Nach meinen Versuchen (Bihang till Vet. Akad. Handl. Bd 23, Afd. II N:o 5), die später von MEYER (l. c.) wiederholt und konstatiert wurden, verhält es sich gerade umgekehrt im Einklange mit der NERNST'schen Theorie. Die Konzentration in der den Tropfen umgebenden Schicht ist also kleiner als in den umgebenden Theilen der Lösung (bei z. B. schwefelsäurer Lösung), was mit der Annahme eines Kondensationsvermögens für Quecksilbersalz im Sinne WARBURG'S und MEYER'S unvereinbar erscheint.

¹⁾ NERNST, l. c. Seite 10; PALMER, Bihang till Vet. Akad. Handl. Bd 23, Afd. II, N:o 5, Seite 3.

felnatrium. WARBURG sagt selber in einer späteren Arbeit ¹⁾ dass die Deutung des absteigenden Astes bei der ursprünglichen LIPPMANN'schen Anordnung, wo der Elektrolyt Schwefelsäure ist, ihm nicht gelungen sei. Dagegen hat G. MEYER, der sich um die weitere Ausarbeitung der WARBURG'schen Theorie viel bemüht hat, versucht das Vorkommen eines absteigenden Astes in Lösungen von Metallsalzen (Alkalisalze, Zinksulfat) durch Bildung von Amalgamen zu erklären, welche die Oberflächenspannung des Quecksilbers herabsetzen sollten ²⁾. Obschon ein schwacher Einfluss in der Richtung wohl nicht unwahrscheinlich ist, so fehlt doch jeder Nachweis dass Amalgame, zudem so sehr verdünnte wie die hier in Betracht kommenden, in ungeladenem Zustande, wie es G. MEYER zu meinen scheint, eine bedeutend niedrigere Kapillarspannung als reines Quecksilber besitzen. Nach NERNST wird der absteigende Ast einfach so gedeutet, dass bei höheren elektromotorischen Kräfte, als die zur Erreichung des Maximums der Oberflächenspannung erforderliche, die Quecksilberjonen noch weitgehender aus der Umgebung des Meniskus niedergeschlagen werden, so dass der osmotische Druck der Quecksilberjonen in der Lösung kleiner wird als der Lösungsdruck des Metalls. In folge dessen wird die Potentialdifferenz zwischen Metall und Lösung ihr Zeichen wechseln, das Metall wird negativ und die Lösung positiv. Eine Doppelschicht entsteht aufs Neue, wodurch die Kapillarspannung wieder vermeidert wird. Ob hierbei etwas Metall auf das Quecksilber niedergeschlagen wird, ist von untergeordneter Bedeutung. Dieselbe Erscheinung wird auftreten, wenn man durch chemische Mitteln, (KCN, NaSH) die Konzentration der Quecksilberjonen stark herabsetzt.

Wir haben nun schon die WARBURG'sche Theorie der kapillarelektischen Erscheinungen betrachtet, soweit sie von WARBURG selbst entwickelt worden ist. Es erübrigt sich nunmehr, eine Erweiterung der genannten Theorie zu besprechen, die von G. MEYER versucht worden ist.

¹⁾ Verhandl. d. physik. Gesellschaft, Berlin, 17, 24 (1898).

²⁾ Ann. der Physik und Chemie, N. F. 45, 508 (1892).

Die Amalgame.

Die Erweiterung der WARBURG'schen Theorie die von G. MEYER versucht worden ist, betrifft die kapillarelektischen Erscheinungen bei Amalgamen. Um die hier obwaltenden, etwas komplizierten Verhältnisse besser beurtheilen zu können, können wir die nachstehende Tabelle 1 betrachten, wo die wichtigeren diesbezüglichen Beobachtungen von G. MEYER, ROTHMUND sowie einige von mir zusammengestellt sind. Es bedeutet in der Tabelle 1:

e_0 die Spannung, in Volt gemessen, die angelegt werden muss, um das Amalgam zum Maximum der Oberflächenspannung zu bringen. Hierbei benutzte ROTHMUND ein vertikales Kapillarelektrometer und gab sowohl in das Kapillarrohr wie am Boden des Gefässes Amalgam. Die Potentialdifferenz zwischen Amalgam am Boden und Amalgam in der Kapillare betrug also bei Maximum der Oberflächenspannung e_0 Volt. Wenn der Meniskus Kathode war ist e_0 positiv gerechnet, wenn der Meniskus Anode war ist e_0 negativ. G. MEYER benutzte dieselbe Anordnung.¹⁾

A/B ist, bei meiner schon erwähnten Versuchsanordnung, die Potentialdifferenz, in Volt ausgedrückt, zwischen einer ruhende, nicht betropften Amalgammasse unter der betreffenden Lösung und einer parasitischen Elektrode aus Amalgam, die sich in der Nähe der Tropfelektrode im Elektrodentrichter meines Apparates befand. Wenn A/B positiv ist, so bedeutet dies dass A gegen B positiv ist.

A/C ist, bei derselben Versuchsanordnung, die Potentialdifferenz, in Volt ausgedrückt, zwischen einer ruhenden, nicht betropften Amalgammasse unter der betreffenden Lösung und einer parasitischen Elektrode aus Amalgam, die sich in der Nähe der unteren, betropften Amalgamoberfläche meines Appa-

¹⁾ G. MEYER hat nicht angegeben, ob reines Quecksilber oder Amalgam sich am Boden des Elektrometergefässes befand; da aber gesagt wird, dass die Anordnung dieselbe wie bei ROTHMUND war, darf man wohl annehmen, dass Amalgam sich am Boden befand.

rates befand. Für das Zeichen von A/C gilt ähnliches wie bei A/B .

Die Metall — auch das Quecksilber — sind in der Tabelle nach ihrer Stellung in der Spannungsreihe geordnet.

Tabelle 1.

Metall	Prozentgehalt des Amalgams	Zusammensetzung der Lösung	e_0	A/B	A/C	Beobachter
Zn	0,06	1n H_2SO_4 ; 0,01n				
		Zn SO_4 . . .	— 0,587	—	—	ROTHMUND ¹⁾ .
	,	1n H_2SO_4 ; 0,01n				
		Zn SO_4 . . .	— 0,566	—	—	G. MEYER ²⁾ .
	0,29	0,01n $MgSO_4$;				
		0,001% Zn SO_4	—	— 0,178	— 0,006	G. MEYER ³⁾ .
Cd	1	1n H_2SO_4 ; 0,01n				
		Cd SO_4 . . .	— 0,079	—	—	ROTHMUND ¹⁾
	0,48	1n H_2SO_4 ; 0,01n				
		Cd SO_4 . . .	— 0,167	—	—	G. MEYER ²⁾ .
	0,39	0,01n KJ;				
		0,001 % Cd J_2	—	+ 0,108	— 0,008	G. MEYER ³⁾ .
	0,37	0,01n KJ;				
		0,001 % Cd J_2	—	+ 0,119	—	,
	,	0,005n KJ;				
		0,05 % Cd J_2	—	+ 0,084	—	,
	,	0,01n $MgSO_4$;				
		0,001 % Cd J_2	—	— 0,05	—	,
Ti	1,5	1n HCl mit TiCl				
		gesättigt . .	+ 0,089	—	—	ROTHMUND ¹⁾ .
Sn	0,09	1n HCl; 0,01n				
		Sn Cl_2	+ 0,080	—	—	,
	0,08	1n HCl; 0,01n				
		Sn Cl_2	+ 0,092	—	—	G. MEYER ³⁾ .

¹⁾ Zeitschr. phys. Chemie 15,1 (1894).

²⁾ Ann. der Physik und Chemie, N. F. 56, 680 (1895).

³⁾ Ann. der Physik und Chemie, N. F. 67, 488 (1899).

Metall	Prozentgehalt des Amalgams	Zusammensetzung der Lösung	ϵ_0	A/B	A/C	Beobachter
Pb	0,08	1n H ₂ SO ₄ mit PbSO ₄ gesättigt	+ 0,008	—	—	ROTHMUND ¹⁾ .
Cu	0,02	1n H ₂ SO ₄ ; 0,01n CuSO ₄ . . .	+ 0,445	—	—	G. MEYER ²⁾ .
		1n H ₂ SO ₄ ; 0,01n CuSO ₄ . . .	+ 0,443	—	—	
	0,045	0,01n MgSO ₄ ; 2 % CuSO ₄ . . .	—	+ 0,016	0,000	
		0,01n MgSO ₄ ; 2 % 0,001 % CuSO ₄	—	+ 0,186	— 0,05	G. MEYER ³⁾ .
Bi	gesättigt	1n H ₂ SO ₄ mit Bi ₂ O ₃ gesättigt	+ 0,478	—	—	ROTHMUND ¹⁾ .
Hg	0	1n HCl mit Hg ₂ Cl ₂ gesättigt	+ 0,560	—	—	ROTHMUND ¹⁾ u. A.
		1n H ₂ SO ₄ mit Hg ₂ SO ₄ gesättigt	+ 0,926	—	—	ROTHMUND ¹⁾ .
		0,01n KNO ₃ zu $\frac{1}{10}$ mit Hg ₂ Cl ₂ gesättigt . .	—	+ 0,153	— 0,044	PALMER ⁴⁾ .
		0,01n KNO ₃ zu $\frac{1}{10}$ mit Hg ₂ Cl ₂ gesättigt . .	—	+ 0,216	— 0,082	G. MEYER ³⁾ .

Ausserdem wollen wir noch folgende Beobachtungen über Amalgame erwähnen. G. MEYER hat bei sehr verdünnten Amalgamen, deren Metallgehalt höchstens 0,01 % betrug, untersucht ob ein Zusatz eines Salzes des im Quecksilber gelösten Metalles zum Elektrolyten die Oberflächenspannung des Amalgames beeinflusst oder nicht. ⁵⁾ Er fand dass bei Cu-Amalgam wie bei reinem Hg eine Herabsetzung der Oberflächenspannung ein-

¹⁾ Zeitschr. phys. chemie 15, 1 (1894).

²⁾ Ann. der Physik und Chemie, N. F. 56, 680 (1895).

³⁾ Ann. der Physik und Chemie, N. F. 67, 483 (1899).

⁴⁾ Bihang till Vet. Akad. Handl., Bd 23, Afd. II, N:o 5 (1898).

⁵⁾ Ann. der Physik u. Chemie, N. F. 58, 845 (1894).

trat, die bis 40 % der ursprünglichen Oberflächenspannung betrug; bei Amalgamen von Pb, Cd, Sn, Zn wurde dagegen die Oberflächenspannung durch Zusatz des betreffenden Metallsalzes kaum geändert. Gleichzeitig konstatierte er »dass die Oberflächenspannungskurve des HgCu in H_2SO_4 und HCl, des HgSn in H_2SO_4 , des HgPb in HCl, des HgCd in KJ einen aufsteigenden und einen absteigenden Ast besitzt, dass der aufsteigenden Ast fehlt, wenn HgZn in Lösungen von schwefel- und salzsauren Salzen, HgSn in HCl, HgPb in CH_3COOH , HgCd in H_2SO_4 , HCl und CH_3COOH Lösungen kathodisch polarisiert wird.« PASCHEN fand dass bei Tropfelektroden aus Zinkamalgam und mit Zinkamalgam am Boden des Gefässes der Tropfelektrodenstrom in entgegengesetzter Richtung wie bei reinem Quecksilber floss.¹⁾

Die jetzt citierten Verhältnisse sucht G. MEYER²⁾ zu deuten. Die Thatsache dass bei Tropfelektroden mit reinem Quecksilber die Lösung während des Tropfens in der Umgebung der Tropfelektrode ärmer an Salz, in der Umgebung des betropften Quecksilbers dagegen reicher wird, wie ich nachgewiesen habe, erklärt G. MEYER so, dass frische Tropfen in Folge des Kondensationsvermögens des Quecksilbers, Hg — Salz auf seiner Oberfläche verdichtet und mit sich und die Tiefe führt. Dass diese Erklärung unhaltbar ist, glaube ich schon nachgewiesen zu haben, vergl. Seite 159 Anmerkung 2.

Um das verschiedene Verhalten der Amalgame zu erklären, theilt G. MEYER die Metalle in kondensirende und nicht kondensirende ein. Bei kondensirenden Metallen wird die Oberflächenspannung des Amalgams bei Zusatz eines Salz des betreffenden Metalls vermindert und bei meinem Versuch wird Metallsalz von oben nach unten transportiert. Bei nichtkondensirenden Metallen bleiben diese Erscheinungen aus.

Hiergegen ist zunächst einzuwenden dass diese Eintheilung eine rein empirische ist; man weiss nicht im voraus ob ein

¹⁾ Ann. der Physik u. Chemie N. F. 41, 193 (1890) und 43, 570 (1891).

²⁾ Ann. der Physik und Chemie N. F. 67, 433 (1899).

Amalgam kondensirend wird oder nicht und das Kondensationsvermögen steht mit keiner anderen Eigenschaft der Metalle in Zusammenhang. Zu einer bedenklichen Konsequenz dieser Auffassungsweise werden wir später kommen.

Wir werden nunmehr versuchen die kapillarelektrischen Erscheinungen bei Amalgamen ohne Hinzuziehung neuer Hypothesen soweit möglich zu deuten. Bekanntlich hat NERNST für das Gleichgewicht zwischen einem Amalgam und einem Elektrolyten die folgende Formel hergeleitet.¹⁾

$$\frac{RT}{n_1} \ln \frac{P_1}{p_1} = \frac{RT}{n_2} \ln \frac{P_2}{p_2}$$

wo n_1 , P_1 und p_1 , Werthigkeit, elektrolytischer Lösungsdruck und osmotischer Druck der Ionen des Quecksilbers bedeuten und n_2 , P_2 , p_2 , dieselben Grössen für das gelöste Metall bezeichnen. Beobachten wir, dass $n_1 = 2$, da die Merkurojonen doppelatomig sind²⁾ und führen wir den Werth der Konstante R ein, so gilt, für gewöhnliche Temperatur und mit dekadischen Logarithmen:

$$0,0288 \log \frac{P_1}{p_1} = \frac{0,0576}{n_2} \log \frac{P_2}{p_2}.$$

Oder mit Worten ausgedrückt: die Potentialdifferenz zwischen Quecksilber und Lösung muss gleich sein der Potentialdifferenz zwischen gelöstem Metall und Lösung.

Wir betrachten zuerst die Grösse e_0 in Tabelle 1. Bei dem positivsten Metall, dem Zink, beträgt e_0 im Mittel — 0,576 Volt. Dies erklären wir folgendermassen. Zink hat bekanntlich einen so hohen Lösungsdruck, dass es sich auch gegen die konzentrierten Zinklösungen negativ ladet; ferner hat Zinkamalgam, von der in Rede stehenden Konzentration, gegen eine Lösung beinahe dieselbe Potentialdifferenz wie reines Zink. Das Zinkamalgam wird sich also gegen die verdünnte Zinklösung stark negativ laden. Dies ist aber, nach der eben citierten Formel von NERNST, nur möglich wenn p_1 sehr klein geworden ist,

¹⁾ Zeitschr. phys. Chemie 22, 589 (1897).

²⁾ Ogc, Zeitschr. phys. Chemie 27. 285 (1898).

d. h. es muss (durch Auflösen von Zink) Quecksilberjonen so weit gehends ausgefällt sein, dass das Quecksilber gegen die Lösung negativ wird. Wir befinden uns dann auf dem absteigenden Aste der Kapillarspannungskurve und das zinkhaltige Quecksilber muss um auf das Maximum der Kapillarspannung gebracht zu werden, anodisch polarisiert werden, d. h. eine gewisse Quantität Quecksilberjonen müssen durch den Strom in die Lösung gebracht werden. Wir brauchen also nicht anzunehmen dass die winzige Menge gelösten Zinks auf die Kapillarspannung des Quecksilbers in anderer Weise einwirkt als durch das Ausfällen von Quecksilberjonen; die oben (Seite 10) citierte Hypothese von G. MEYER über die Kapillarspannung der Amalgame wird daher auch in diesem Falle überflüssig.

Bei einem schwach positiven Metall, wie Kupfer, liegt die Sache anders. Hier ist P_2 nur wenig grösser als P_1 und es braucht daher p_1 nur wenig vermindert werden, damit das Gleichgewicht sich nach der Formel herstellt. Also werden aus der ursprünglichen Lösung nur wenig Quecksilberjonen (durch Auflösen von Kupfer) ausgefällt und es ist eine beinahe ebenso starke *kathodische* Polarisation, wie bei reinem Quecksilber, erforderlich um das kupferhaltige Quecksilber auf das Maximum der Oberflächenspannung zu bringen.

Wie man sieht, sind diese zwei Beispiele typisch, indem die Werthe von e_0 sich im Allgemeinen parallel mit den elektromotorischen Eigenschaften der Metalle ändern. Eine Ausnahme bildet nur das Blei, wobei e_0 eigentlich höher sein sollte. Eine quantitative Berechnung von e_0 lässt sich übrigens nicht machen, weil e_0 nicht gegen immer dieselbe Elektrode gemessen ist und weil die Lösungsdrucke und Jonenkonzentrationen unvollständig bekannt sind. Ausserdem ist zu beachten, dass es wohl keineswegs sicher ist, dass sich das Gleichgewicht immer hergestellt hatte. Mehr als die gute qualitative Übereinstimmung kann man nicht erwarten.

Die Potentialdifferenzen A/B sollen positiv sein, wenn das Quecksilber in einer Lösung tropft, wo der osmotische Druck

der Quecksilberjonen grösser ist als der Lösungsdruck des Quecksilbers, dagegen negativ wenn osmotischer Druck der Jonen grösser als Lösungsdruck.¹⁾ Die Zahlen für reines Quecksilber, Kupfer und Zinkamalgal sind also mit der Theorie übereinstimmend. Von den bei Kadmiumpulmalgal gefundenen Zahlen scheinen die Werthe + 0,034 und — 0,05, welche sich von Null nur wenig entfernen, gut begreiflich, wogegen die Werthe + 0,108 und + 0,119 als Ausnahmen zu betrachten sind.

A/C soll das entgegengesetzte Zeichen wie A/B haben.¹⁾ Die Ziffern bei reinem Quecksilber und Kupferamalgal stimmen daher mit der Theorie; die Zahlen für Zink — und Kadmiumpulmalgal sind von Null kaum verschieden. Wenn die Tröpfchen auf ihrem Wege nach unten sich noch mit der Lösung chemisch umsetzen, so dass sie ihr gelöstes Metall abgeben und unten nur reines Quecksilber sich befindet, so ist diese Abweichung dadurch erklärt.

Dass Kupferamalgal ebenso wie reines Quecksilber seine Oberflächenspannung vermindert, wenn Kupfersalz (Quecksilbersalz) zur Lösung gegeben wird, wird so erklärt, dass Kupferamalgal, weil der Lösungsdruck des Kupfers nicht viel höher ist als beim Quecksilber, sich etwa wie reines Quecksilber verhalten muss. Bei Amalgamen von den positiveren Metallen Pb, Cd, Sn, Zn wird die Oberflächenspannung durch Zusatz von Metallsalz kaum geändert; dies beruht wahrscheinlich darauf, dass die genannten Metalle schnell herausgelöst werden, wobei eine verhältnissmässig konzentrierte Metallsalzlösung entsteht; Zusatz von Pb, Cd, Sn oder Zn-Salz übt dann kaum einen Einfluss aus.

Dass die Oberflächenspannungskurve des Kupferamalgams in H_2SO_4 und HCl einen aufsteigenden und einen absteigenden Ast besitzt, ist nach Obigem leicht verständlich, ebenso die Beobachtung dass bei Zinkamalgal in Lösungen von schwefel- und salzsaurer Salzen der aufsteigende Ast fehlt bei kathodischer Polarisation. In letzteren Fall ist die Konzentration der Quecksilberjonen durch das Zink sehr stark herabgesetzt, so dass das

¹⁾ PALMER, Bihang till Vet. Akad. Handl. Bd 23, Afd. II, N:o 5 (1898).

Maximum der Oberflächenspannung schon überschritten worden ist und bei kathodischer Polarisierung die Oberflächenspannung noch weiter sinkt. Bei den Amalgamen von Cd, Sn, Pb kommen beide Fälle vor, der aufsteigende Ast kann da sein oder er kann fehlen. Wie aus den Werthen von e_0 in der Tabelle 1 hervorgeht, sind diese Amalgame schon ziemlich nahe dem Maximum und man braucht nur eine schwache Polarisierung um sie auf das Maximum zu bringen. Die oben erwähnten Umstände, d. h. chemischer Umsatz, verschiedene Ionenkonzentrationen u. s. w., können wohl erklären dass das eine Mal der aufsteigende Ast auftritt, das andere Mal nicht oder, was dasselbe ist, in dem einen Falle eine schwache anodische, in dem anderen eine schwache kathodische Polarisierung erforderlich ist um das Maximum zu erreichen. Ich möchte daher die Vermuthung aussprechen dass der aufsteigende Ast, wenn er auftritt, sehr kurz ist.

Sehr bedenklich für die G. MEYER'sche Hypothese erscheint das Verhalten einer Tropfelektrode aus reinem Quecksilber in Cyankaliumlösungen.¹⁾ In verdünnten Lösungen von KCN giebt die Tropfelektrode einen schwachen Strom in der gewöhnlichen Richtung, d. h. vom tropfenden zu ruhenden Quecksilber im Elektrolyten. Bei einer höheren Konzentration giebt es aber kein Strom. Das Quecksilber wirkt also, nach G. MEYER, hier nicht kondensirend, und wir müssen annehmen dass dasselbe Metall theils kondensirend, theils nicht kondensirend sei! In noch konzentrierterer Lösung von KCN wechselt der Strom seine Richtung, d. h. er fliesst im Elektrolyten vom ruhenden zum tropfenden Quecksilber. Diese Verhältnisse sind nach NERNST's Theorie leicht verständlich; in konzentrierten KCN-Lösungen ist, wegen Doppelsalzbildung, die Konzentration der Quecksilberionen so herabgedrückt, dass ihr osmotischer Druck kleiner als der Lö-

¹⁾ PASCHEN, Ann. d. Physik und Chemie, N. F. 40, 86 (1890). Bei einer anderen Anordnung der Tropfelektrode — PASCHEN'S s. g. Strahlelektrode, Ann. d. Physik u. Chemie, N. F. 41, 557 (1890) — erhielt PASCHEN ein anderes Resultat.

sungsdruck ist, wonach 'also beim Tropfen in der Nähe der Tropfelektrode Quecksilber gelöst wird. Bei einer gewissen Konzentration an KCN herrscht Gleichgewicht und der Strom wird Null. In schwächeren Lösungen sind die Quecksilberjonen zahlreicher.

Dass die Richtung des Tropfelektrodenstromes bei Zink-amalgam umgekehrt ist wie bei reinem Quecksilber, wie PASCHEN fand (vgl. oben Seite 14) ist nunmehr auch leicht erklärlich. In Folge des hohen Lösungsdruckes des Zinkes wird in der Nähe der Tropfelektrode eine konzentriertere Zinklösung als unten entstehen. Wir haben also gesehen dass die kapillarelektischen Verhältnisse der Amalgame in ihren Hauptzügen sich nach der NERNST'schen Theorie erklären lassen und dass vorläufig keine neue Hypothese zu ihrer Deutung nothwendig ist. Erst wenn die diesbezüglichen Messungen unter genau definierten Versuchsbedingungen wiederholt werden, kann man eine genaue quantitative Prüfung machen und nach dem Grund der eventuellen Abweichungen suchen.

Ich hoffe durch die obigen Auseinandersetzungen gezeigt zu haben, dass die NERNST'sche Theorie der WARBURG-MEYER'schen entschieden vorzuziehen sei. Die grosse Bedeutung der Entdeckung WARBURGS, dass Quecksilber von lufthaltigen Elektrolyten gelöst wird, ebenso des von WARBURG gemachten Hinweises darauf dass Änderungen der Konzentration von Quecksilbersalz bei kapillarelektischen Erscheinungen eine grosse Rolle spielt, habe ich schon hervorgehoben. Eine historische Bemerkung ist vielleicht hier noch am Platz. Die WARBURG'sche Theorie wurde, wie schon angegeben, im Jahre 1890 aufgestellt, also kurz nach dem Erscheinen der Theorie des elektrolytischen Lösungsdruckes von NERNST (1889) und 6 Jahre früher als NERNST seine Theorie auf die kapillarelektischen Erscheinungen anwendete, wobei diese Phänomene einfach als Spezialfälle einer viel allgemeineren Theorie erklärt werden konnten.

Noch unaufgeklärte Fragen.

Es giebt in der That auf dem kapillarelektischen Gebiet mehrere Erscheinungen, die noch gar nicht erklärt worden sind und also beweisen dass die Theorie dieser Erscheinungen noch zu ergänzen ist. Ich möchte auf die wichtigeren kurz hinweisen.

Die unsymmetrische Form der Kapillarelektrometerkurve. Bekanntlich stellt die Kurve, die den Zusammenhang zwischen Oberflächenspannung und angelegter elektromotorischer Kraft in z. B. LIPPMANNS Elektrometer angiebt, keineswegs eine in Bezug auf eine durch den Scheitelpunkt gelegten Normale symmetrische Parabel dar, wie es die Theorie fordert, sondern ist vielmehr unsymmetrisch indem vor allem der absteigende Ast abgeflacht erscheint. Die Vermuthung liegt nahe, dass dies durch Berücksichtigung des Spannungsabfalles in der Elektrometerflüssigkeit iw (i = Stromstärke, w = Widerstand) erklärt wird. Durch eine neue Arbeit von SMITH ¹⁾ sowie durch älteren von GOUY ²⁾ und LUGGIN ³⁾ ist es nun aber wahrscheinlich gemacht, dass das Glied iw nicht so gross sein kann, dass dadurch die Abweichung von der Parabelform erklärt wird. SMITH hat doch das Glied iw nicht in direkter Weise bestimmt, sondern dadurch dass er ein grosses Widerstand vorschaltete, und die dadurch hervorbrachte Änderungen der Kurve bestimmte. Da aber dabei auch i geändert wird, so scheint der von SMITH gelieferte Beweis nicht sicher. Bevor direkte Messungen von i und w vorliegen — GOUY und LUGGIN führen keine ausreichende Zahlen an — scheint eine Diskussion der Frage wenig Aussicht auf Erfolg zu haben. Ich bin mit solchen Messungen beschäftigt.

Verschiedene Werthe der maximalen Oberflächenspannung. Die NERNST'sche Theorie, ebenso wie die ältere HELMHOLTZ'sche, lässt nicht anders erwarten als dass das Maximum der Ober-

¹⁾ Zeitschr. phys. Chemie 32, 433 (1900).

²⁾ Comptes rendus de l'Akad. des Sciences, (Paris) 121, 765 (1895).

³⁾ Zeitschr. phys. Chemie 16, 689 (1895).

flächenspannung, welches auftreten soll wenn der osmotische Druck der Quecksilberjonen gleich dem Lösungsdruck ist, in allen Lösungen denselben Werth hat. Durch Beobachtungen von KÖNIG,¹⁾ PASCHEN,²⁾ GOUY,³⁾ ROTHMUND⁴⁾ und SMITH⁵⁾ ist indess festgestellt dass die maximale Oberflächenspannung in verschiedenen Lösungen verschieden ist. Die Beobachtungen stimmen untereinander nicht besonders gut überein und ein Grund der Erscheinung ist nicht bekannt; sie scheint mit der unsymmetrischen Form der Elektrometerkurve in Zusammenhang zu stehen.

Die Potentialdifferenz zwischen Quecksilber und Lösung beim Maximum der Oberflächenspannung. Bei den Versuchen, die Potentialdifferenz zwischen Quecksilber und Elektrolyt zu bestimmen, hat man bekanntlich angenommen dass die Potentialdifferenz beim Maximum der Oberflächenspannung gleich Null sei, was indess zu Widersprüchen führt⁶⁾ und deshalb im Allgemeinen nicht richtig sein kann.

Zusammenfassung.

Die obigen Auseinandersetzungen können folgendermassen zusammengefasst werden.

1. Bei den bisher beobachteten kapillarelektischen Erscheinungen hat man, im Gegensatz zu der Meinung HELMHOLTZ', keinen Grund anzunehmen dass die zur Ladung erforderliche Zeit irgend einen merklichen Einfluss ausübt.

2. Die Eigenschaft, Quecksilbersalz an seiner Oberfläche zu condensiren, welche WARBURG dem Quecksilber zuschreibt, um dadurch die kapillarelektischen Erscheinungen zu erklären, ist eine »ad hoc« gemachte Hypothese.

¹⁾ Ann. d. Physik u. Chemie, N. F. 16, 1 (1882).

²⁾ „ „ „ „ „ 40, 86 (1890).

³⁾ Compt. rendus de l'Acad. des Sciences (Paris) 114, 211 (1892) und 121, 765 (1895).

⁴⁾ Zeitschr. phys. Chemie 15, 1 (1894).

⁵⁾ „ „ „ „ 32, 488 (1900).

⁶⁾ NERNST, Beilage zu den Ann. d. Physik u. Chemie, 1896, Seite 3.

3. Die von WARBURG gegebene Deutung der Tropfelektroden führt zu undenkbar hohen Konzentrationen des Quecksilbersalzes in der kondensirten Schicht. Eine von G. MEYER gegebene Deutung fordert, dass die Konzentration des Quecksilbers in der den Tropfen unmittelbar umgebenden Schicht höher sei als in den angrenzenden Theilen der Lösung, was mit dem Ergebniss meiner Versuche in Widerspruch steht.

4. Die WARBURG'sche Theorie vermag nicht den absteigenden Ast der Kapillarelektrometerkurve zu erklären.

5. Durch die NERNST'sche Theorie werden mehrere der wichtigsten kapillarelekttrischen Erscheinungen durch Anwendung der allgemeinen Theorie des elektrolytischen Lösungsdruckes in befriedigender Weise und ohne Hinzuziehung neuer Hypothesen erklärt.

6. Um die kapillarelekttrischen Eigenschaften der Amalgame zu erklären, nimmt G. MEYER an, dass gewisse Metalle kondensirend wirken, andere aber nicht, ohne einen Grund hierfür angeben zu können.

7. Das Verhalten einer Tropfelektrode in konzentrierter Cyankaliumlösung zwingt, nach G. MEYER, zu der Annahme dass Quecksilber theils kondensirend, theils nichtkondensirend wirkt.

8. Auch die kapillarelekttrischen Eigenschaften der Amalgame lassen sich, der Hauptsache nach, mit Hilfe der NERNST'schen Theorie ohne neuen Hypothesen erklären.

9. Alle Erscheinungen auf kapillarelekttrischen Gebiete sind doch nicht mit Hilfe der jetzigen NERNST'schen Theorie zu erklären und die Theorie dieser Erscheinungen ist deshalb noch zu ergänzen.

Stockholm. Elektrochemisches Laboratorium der Technischen Hochschule.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1901. N:o 2.
Stockholm.

Nya undersökningar öfver pyrofosfat af natrium, kalcium och magnesium.

Af C. N. PAHL.

[Meddeladt den 13 Februari 1901 genom O. WIDMAN.]

Sedan jag under de två sistförflutna åren haft tid och tillfälle att på mitt laboratorium i Umeå något sysselsätta mig med undersökningar för egen räkning, har jag börjat, der jag slutade i Upsala eller med undersökning af pyrofosfaten.

Jag har nu, såvidt jag kan se, något så när fullständigt studerat pyrofosfaten af natrium, kalcium och magnesium och meddelar härmed en kort redogörelse för resultaten.

Någon historik öfver andras arbeten i samma ämne kan jag tyvärr ej i brist på större bibliotek meddela utan kan endast hänvisa till mina förra afhandlingar: »Pyrofosforsyrade salter» (gradualafhandling, Upsala 1872) och »Bidrag till kännedomen om de pyrofosforsyrade salterna» (i Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1873 N:o 7).

Då jag skref dessa afhandlingar, ansågs pyrofosforsyran vara två-basisk, och man kunde således vara nöjd, då man kände ett neutralt och ett surt natriumpyrofosfat; men då syran nu anses fyr-atomig, borde man naturligtvis kunna framställa tre olika sura natriumsalter, och detta har, såsom nedan synes, verkligen lyckats mig.

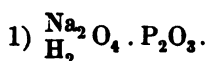
Tvänne procentiskt lika sammansatta och dock olika ammo-

niun-magnesiumsalter $\left\{ \begin{array}{l} (\text{H}_4\text{N})_2\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3 \text{ och } \frac{\text{H}_4\text{N}}{\text{Mg}} \text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3 \end{array} \right\}$

torde finnas, då vid behandling med utspädd saltsyra H_4N i det ena angripes mer än i det andra (se Mg-salterna i 10 och 12).

Om tid och krafter det medgifva, hoppas jag i en ej alltför aflägsen framtid få meddela mina undersökningar öfver barium- och bly-pyrofosfaten, hvilka jag nu närmast tagit i arbete.

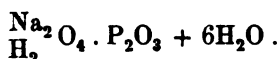
Sura natriumsalter.



Neutralt natriumpyrofosfat, löst i koncentrerad ättiksyra, gaf vid frivillig afdunstning ett kristalliniskt pulver, som vid undersökning befanns vara det vattenfria saltet.¹⁾

	Funnet.	Beräknadt.
Na_2O	27.8	28.0
P_2O_5	63.3	63.9
H_2O	8.9	8.1 .

Ur moderluten efter föregående salt afsatte sig vid fortsatt frivillig afdunstning ett starkt vittrande (vid glödgnig lättsmält) salt i stora, mycket sneda prismer, som efter omkristallisation befanns ega sammansättningen:



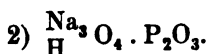
Samma salt har sedan beredts genom det neutrala saltets försättande med oxalsyra, med beräknad mängd salpetersyra samt genom det neutrala saltets lösning i vatten med mot $\frac{Na}{H_3} O_4 \cdot P_2 O_3$ svarande mängd salpetersyra och lösningens fällande med sprit samt omkristallisering ur vattenlösning.

¹⁾ Förut undersökt.

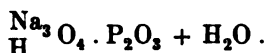
	F u n n e t.				Beräknadt.
	1.	2.	3.	4.	
Na ₂ O	18.5	18.7	—	18.7	18.8
P ₂ O ₅	43.6	43.1	42.9	43.0	43.0
H ₂ O	37.9	38.2	—	38.3	38.2 .

Profvet till 1 var beredt med ättiksyra, 2 med oxalsyra, 3 med salpetersyra, 4 med salpetersyra i öfverskott och sprit.

Vid 100° är saltet vattenfritt.

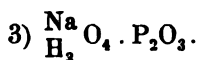


Ur en lösning af ungefär lika delar neutralt och tvåfaldt surt natriumpyrofosfat afsatte sig vid frivillig afdunstning stora, starkt vittrande prismer, som efter torkning vid 100° befunnos ega sammansättningen:



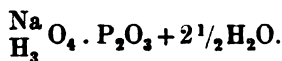
	Funnet.	Beräknadt.
Na ₂ O	35.2	35.5
P ₂ O ₅	54.3	54.1
H ₂ O	10.5	10.3 .

Det ursprungliga saltet innehöll 39.5 % H₂O motsv. 7 mol.



Neutralt natriumpyrofosfat löstes i vatten, försatt med en mot det trefaldt sura saltet svarande mängd svafvelsyra. Vid frivillig afdunstning afsatte sig stora mängder Na₂O₂ · SO₂. Då lösningen öfvergått till syrupkonsistens, fortsattes afdunstningen under exsiccator, hvarvid kristallisationer med mindre och mindre mängder sulfat afskildes, tills lösningen slutligen stelnade till en

sidenglänsande massa af fina kristallnålar. Då saltet är deliquescent, torkades det vid 100° och hade då sammansättningen:



	Funnet.	Beräknadt.
Na_2O	13.3	12.7
P_2O_5	57.3	57.9
H_2O	29.4	29.4 .

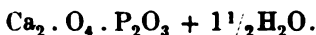
Anm. Att framställa ett natrium-ammoniumpyrofosfat genom det 2-faldt sura natriumsaltets mättande med ammoniak har totalt misslyckats. Det sura saltet omsätter sig nästan ögonblickligen till fina prismer af neutralt natriumsalt, hvar efter kristaller i samma form, men med växlande ammoniumhalt, vid afdunstning afsätta sig.

Kalciumsalter.

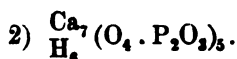
1) $\text{Ca}_2 \cdot \text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5$.

Fälles en lösning af neutralt natriumpyrofosfat i köld med CaCl_2 , erhålles en amorf fällning, som innehåller natrium, äfven om CaCl_2 användts i öfverskott.

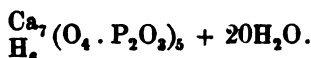
Fälles en lösning af CaCl_2 i kokhetta med neutralt natriumpyrofosfat, så erhålles äfven en amorf fällning, som efter torkning vid 100° har sammansättningen:



	Funnet.	Beräknadt.
CaO	40.7	39.9
P_2O_5	50.6	50.5
H_2O	9.2	9.6 .

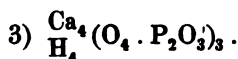


Löses det ofvannämnda natriumhaltiga kalciumpyrofosfatet nätt och jämnt i HCl, så erhålles efter frivillig afdunstning och omkristallisering ett salt i stjärnlikt grupperade, lättlösliga prismor, som, torkadt vid 100°, befanns vara

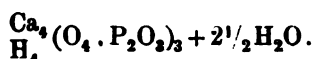


	Funnet.	Beräknadt.
CaO	26.1	25.9
P ₂ O ₅	47.2	46.8
H ₂ O	26.6	27.3 .

Saltet smälter ej.



Löses dubbelsaltet $\frac{\text{Na}_2}{\text{Ca}_2} (\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5)$ nätt och jämnt i HCl, afsätter sig ganska snart svårlösliga, mikroskopiska prismor, som, torkade vid 100°, ega sammansättningen:

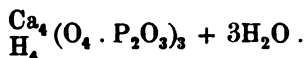


	Funnet.	Beräknadt.
CaO	31.2	30.7
P ₂ O ₅	58.0	58.3
H ₂ O	11.2	11.0 .

Det lufttorkade saltet innehöll 17.1 % H₂O, motsvarande 5 mol., som fordra 16.2 %.

Löses saltet $\frac{\text{Na}}{\text{H}_4\text{N}} (\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5)$ nätt och jämt i HCl, afsätter sig ganska snart svårlösliga, mikroskopiska prismor, ofta vårt-

likt grupperade, som, torkade vid 100° , hade sammansättningen:



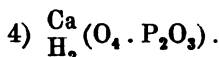
Samma sammansättning har äfven efter torkning vid 100° det salt, som inom kort afsätter sig i svårlösliga, stjärnformigt grupperade, mikroskopiska prismor, då en lösning af CaCl_2 försättes med $\frac{\text{Na}_2}{\text{H}_2}\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3$.

	F u n n e t.		Beräknadt.
	1.	2.	
CaO_2	30.8	30.8	30.3
P_2O_5	56.3	56.3	57.6
H_2O	12.7	12.0	12.1.

(1 är framställt på det förra, 2 på det senare sättet.)

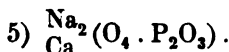
Obs! De lufttorkade salterna äro dock ej identiska, ty det förra innehåller 18.6 % H_2O (6 mol.), det senare 16.8 % (5 mol.).

Saltet smälter ej.



Löses $\frac{\text{Ca}_4}{\text{H}_4}(\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3)_3$ nätt och jämnt i HCl , erhålles först efter frivillig afdunstning till nära torrhet lättlösliga, mikroskopiska, prismatiska taflor, som efter omkristallisering och torkning vid 100° befinnas innehålla 2 mol. vatten.

	Funnet.	Beräknadt.
CaO	23.6	22.2
P_2O_5	56.2	56.4
H_2O	21.1	21.4.



Sättes till en lösning af $\text{Na}_4\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3$ en lösning af CaCl_2 , tills fällningen börjar lösa sig svårt, afsätter sig genast ett salt

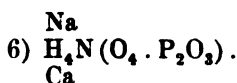
i mikroskopiska prismar, som efter glödgning befanns ega ofvanstående sammansättning.

En fällning af $\text{Ca}_2\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3$ omsätter sig vid beröring med en lösning af $\text{Na}_4\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3$ inom några minuter till mikroskopiska prismar, som efter glödgning hade samma sammansättning.

	Funnet.		Beräknadt.
	1.	2.	
Na_2O			23.9
CaO	21.3	22.3	21.5
P_2O_3	55.5	55.7	54.6

Salterna äro dock ej identiska, ty det förra innehöll efter torkning vid 100° 17.3 % H_2O , motsvarande 3 mol., det senare 20.6 % H_2O eller i det närmaste 4 mol.

Saltet smälter lätt.

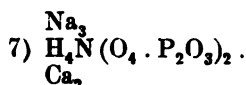


En fällning af $\text{Ca}_2\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3$ omsätter sig med en lösning af $\text{Na}_4 \cdot \text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3 + \text{H}_4\text{N} \cdot \text{Cl}$ inom 24 timmar till mikroskopiska, tre-sidiga taflor, som i vattenfritt tillstånd ega ofvanstående sammansättning.

	Funnet.	Beräknadt.
Na_2O	—	12.1
$(\text{H}_4\text{N})_2\text{O}$	10.6	10.2
CaO	22.3	22.0
P_2O_3	55.8	55.7

Saltet smälter lätt.

Det vid 100° torkade saltet innehöll 15.8 % H_2O , motsvarande $2\frac{1}{2}$ mol.

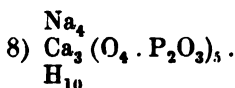


Sattes till en lösning af $\text{Na}_4\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3$ en lösning af $\text{CaCl}_2 + \text{H}_4\text{N} \cdot \text{Cl}$, tills fällningen börjar lösa sig svårt, erhålles

inom några minuter ett salt i mikroskopiska, oftast vårtformigt grupperade prismer, som vid glödgnung lätt smälta.

Det vid 100° torkade saltet innehöll 5 mol. vatten.

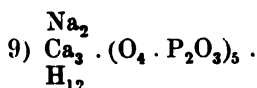
	Beräknadt.	Funnet.	
H ₂ O	14.9	{ 19.2	—
(H ₄ N) ₂ O	4.3		—
Na ₂ O	15.4	15.3	—
CaO	18.5	19.8	20.0
P ₂ O ₅	46.9	45.7	46.2



Till den uttvättade fällningen af natriumhaltigt kalciumpyrofosfat sattes oxalsyra. Ur den filtrerade lösningen afsatte sig vid frivillig afdunstning först stora, sneda tafior, som efter omkristallisation befunnos vara $\overset{\text{Na}_2}{\text{H}_2} \text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3 + 6\text{H}_2\text{O}$, och der- efter en stor mängd lösliga, mikroskopiska, vårtformigt grupperade prismer, som efter omkristallisering och glödgnung befunnos innehålla 2Na₂O, 3CaO, 5P₂O₅.

	Funnet.	Beräknadt.
Na ₂ O	13.0	12.4
CaO	16.5	16.7
P ₂ O ₅	70.5	70.9

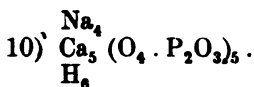
Det vattenfria saltet bör således hafva ofvanstående sammansättning. Det är dock obegripligt, huru 3Ca skulle kunna sammanhålla (O₄P₂O₃)₅.



Ett försök att änyo framställa nästföregående salt gjordes genom att försätta med oxalsyra beredt surt kalciumpyrofosfat med $\overset{\text{Na}_2}{\text{H}_2} \text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3$. Efter långvarig frivillig afdunstning afsatte

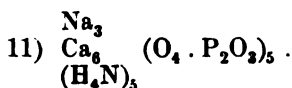
sig först svärlösligt $\frac{\text{Ca}_4}{\text{H}_4}(\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3)_3 + 3\text{H}_2\text{O}$ och vid fortsatt frivillig afdunstning till nära torrhet ett lättlösligt salt i vårtlikt grupperade, mikroskopiska prismer, och slutligen stelnade lösningen till kristaller i samma form. Det lättlösliga saltet befanns efter flerfaldiga omkristallisationer och torkning vid 100° innehålla 8 mol. H_2O .

	Funnet.	Beräknadt.
Na_2O	5.6	5.2
CaO	13.9	14.1
P_2O_5	58.6	59.6
H_2O	21.9	21.1



Om moderluten från föregående salt försattes med sprit, erhålles en amorf fällning, som efter uttvättning med sprit och torkning vid 100° innehöll $5\text{H}_2\text{O}$.

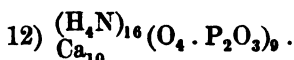
	Funnet.	Beräknadt.
Na_2O	9.2	9.8
CaO	23.4	22.3
P_2O_5	55.4	56.4
H_2O	11.9	11.5



Till en lösning af $\text{Na}_4\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3 + \text{H}_4\text{N} \cdot \text{Cl}$ sattes en lösning af CaCl_2 , tills fällningen började lösa sig svårt. Inom några minuter afsatte sig ett i vatten mycket svärlösligt salt i mikroskopiska prismer, som efter uttvättning med vatten och torkning vid 100° befanns innehålla 10 mol. H_2O .

	Funnet.	Beräknadt.
Na_2O	—	6.4
$(\text{H}_4\text{N})_2\text{O}$	8.6	9.0
CaO	24.4	23.2
P_2O_5	50.4	49.0
H_2O	12.2	12.4

Saltet sintrar vid glödning.

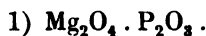


Till en mycket utspädd lösning af $\text{Na}_4\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5 + \text{H}_4\text{NCl}$ sattes en lösning af CaCl_2 , tills fällningen började att lösa sig svårt. Efter några minuter erhöles en stor fällning af i vatten svårslösliga, mikroskopiska prismar, som vid analys befunnos fria från Na_2O och innehöllo 16 mol. H_2O .

	Funnet.	Beräknadt.
H_2O	} 26.5	11.3
$(\text{H}_4\text{N})_2\text{O}$		16.3
CaO	21.8	22.1
P_2O_5	51.4	50.3

Saltet smälter vid glödning.

Magnesiumsalter.



Fälles neutralt natriumpyrofosfat med öfverskott af MgCl_2 , erhålles en amorf fällning af detta salt.

Samma salt erhålles äfven, om $\text{Na}_4\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5$ fälles med öfverskott af $\text{MgCl}_2 + \text{H}_4\text{N} \cdot \text{Cl}$.

Efter torkning vid 100° innehöll saltet 3 mol. H_2O .

	Funnet.		Beräknadt.
	1.	2.	
MgO	28.7	28.8	29.2
P ₂ O ₅	50.9	51.3	51.3
H ₂ O	20.4	19.9	19.5

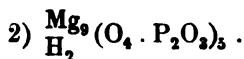
Äfven fällningen för $\frac{\text{Na}_2\text{O}_4}{\text{H}} \cdot \text{P}_2\text{O}_5$ med MgCl_2 innehöll i det närmaste rent $\text{Mg}_2\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5$.

Då till en lösning af MgCl_2 sattes en lösning af $\frac{\text{Na}_2\text{O}_4}{\text{H}_2} \cdot \text{P}_2\text{O}_5$, erhöles ingen fällning; men efter långvarig frivillig afdunstning afsatte sig en kristallinisk massa, som delvis var svårslöslig och kornig, delvis löttlöslig. Det svårslösliga befanns efter torkning vid 100° vara neutralt Mg-salt med 8 mol. H₂O.

	Funnet.	Beräknadt.
MgO	22.0	21.9
P ₂ O ₅	39.2	38.8
H ₂ O	—	39.3

Det var således ej identiskt med det amorf.

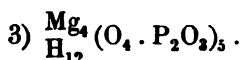
Anm. Med »magnesiumlösning» ger $\text{Na}_4\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5$ amorf fällningar af vexlande sammansättning.



Löses $\text{Mg}_2\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5$ nätt och jämnt i HCl, erhållas vid frivillig afdunstning till syrupskonsistens inga kristaller. Men vid tillsats af sprit fås en amorf fällning, som efter lösning i vatten, förnyad fällning och uttvättning med sprit samt torkning vid 100° innehöll 14 mol. H₂O.

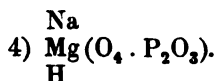
	Funnet.	Beräknadt.
MgO	27.2	27.0
P ₂ O ₅	52.9	52.9
H ₂ O	19.8	20.1

Saltet smälter ej.



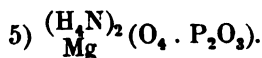
Löses föregående salt nätt och jämnt i HCl, erhålles vid afdunstning till nära torrhet ett mycket lösligt salt i sneda taflor (66 ggrs förstor.), som efter omkristallisering och torkning vid 100° innehöll 12 mol. H₂O.

	Funnet.	Beräknadt.
MgO	13.1	13.5
P ₂ O ₅	59.4	59.4
H ₂ O	—	27.1



Löses saltet $\frac{\text{Na}_2}{\text{Mg}_3} (\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5)_2$ nätt och jämnt i HCl, erhålles vid frivillig afdunstning en stor mängd något sneda, fyr-sidiga mikroskopiska taflor, som äro jämförelsevis svårlösliga och efter omkristallisation, torkade vid 100°, innehålla 4 mol. H₂O.

	Funnet.	Beräknadt.
Na ₂ O	—	9.0
MgO	13.8	13.9
P ₂ O ₅	49.0	49.1
H ₂ O	27.0	28.0



α) Mg₂O₄ · P₂O₅ omsatte sig en gång inom 14 dagar i en lösning af Na₄O₄ · P₂O₅ + H₄N · Cl till ett svårlösligt salt i långsträckta 4- och 6-sidiga prismer (144 ggrs förstor.), som torkadt vid 100° innehöll 4 mol. H₂O.

	Funnet.	Beräknadt.
$(\text{H}_4\text{N})_2\text{O}$	16.6	17.0
MgO	13.5	13.2
P_2O_5	45.9	46.3
H_2O	24.0	23.5

β) Vid en annan beredning under fullkomligt liknande förhållanden erhöles ganska snart fyrsidiga taflor med nästan rätta vinklar och afrundade hörn (144 ggrs förstor.). Torkadt vid 100° innehöll det:

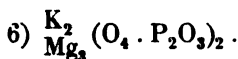
$(\text{H}_4\text{N})_2\text{O}$	17.8
MgO	13.4
P_2O_5	47.2 .

Procentiska sammansättningen var således densamma. Att salterna dock ej äro identiska, framgår tydligt deraf, att olika sura salter af dem bildas vid behandling med HCl (se sid. 16, 17).

γ) Vid åter en annan beredning under liknande förhållanden erhöles ganska snart korta, sexsidiga prismer (144 ggrs förstor.), som efter torkning vid 100° innehöllo $2\frac{1}{2}$ mol. H_2O .

	Funnet.	Beräknadt.
$(\text{H}_4\text{N})_2\text{O}$	19.1	18.6
MgO	14.7	14.5
P_2O_5	49.3	50.8
H_2O	—	16.1

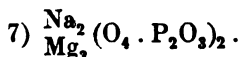
Saltet sintrar vid glödgnng.



$\text{Mg}_3\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5$ omsätter sig i en lösning af $\text{Na}_4\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5 + \text{KCl}$ ganska snart till mikroskopiska, svårlösliga prismer, som, torkade vid 100° , innehöllo 10 mol. H_2O .

	Funnet.	Beräknadt.
K ₂ O	14.1	13.9
MgO	17.6	17.8
P ₂ O ₅	41.5	41.8
H ₂ O	26.7	26.5

Saltet smälter lätt.

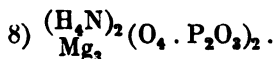


Mg₂O₄ · P₂O₅ omsätter sig i en lösning af Na₄O₄ · P₂O₅ ganska långsamt (inom en månad) till mikroskopiska prismer, som efter torkning vid 100° innehöllo 10 mol. H₂O.

Samma salt har äfven erhållits vid kokning af en lösning af MgCl₂ med stort öfverskott af Na₄O₄ · P₂O₅ samt vid frivillig afdunstning af en sådan lösning.

	Funnet.					Beräknadt.
	1.	2.	3.	4.	5.	
Na ₂ O	—	—	—	—	—	9.6
MgO	18.5	18.4	18.4	18.6	18.3	18.7
P ₂ O ₅	43.6	44.5	—	44.3	—	43.9
H ₂ O	28.3	27.4	—	27.4	—	27.8

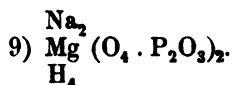
Profvat till 1 var omsatt, 2 beredt i värme, 3, 4, 5 afsatt vid frivillig afdunstning.



Om till en lösning af Na₄O₄ · P₂O₅ sättes en lösning af MgCl₂ + H₄N · Cl, tills fällningen börjar lösa sig svårt, afsätter sig nästan genast ett i vatten svårslösligt salt i tjocka, mikroskopiska taflor med nästan räta vinklar. Moderluten afsätter sedan under en längre tid samma salt, fasthängande vid kärlets väggar. Det lufttorkade saltet innehöll 10 mol. H₂O.

	Funnet.		Beräknadt.
H ₂ O	} 36.4		28.3
(H ₄ N) ₂ O		7.8	8.2
MgO	19.1	18.4	18.9
P ₂ O ₅	44.8	44.7	44.6

Det vid 100° torkade saltet innehöll 6 mol. H₂O.



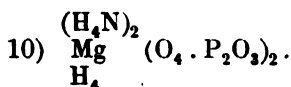
Om saltet $\text{Na}_2 \text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5$ försattes med en mättad oxal-syrelösning, löser det sig, men genast derefter bildas en stor fällning af oxalater. Lösningen ger derefter vid frivillig af dunstning flere olika kristallisationer. Vid omkristallisation af det lättlösligaste erhöles först fyrsidiga, rakt afstympade prismer (50 ggrs förstor.), fasthängande vid kärlets väggar.

Det vid 100° torkade saltet innehöll 4 mol. H₂O.

	Funnet.	Beräknadt.
Na ₂ O	—	12.4
MgO	8.6	8.1
P ₂ O ₅	56.8	57.6
H ₂ O	22.2	21.9

Sedan flere kristallisationer med samma form afskiljts, stelnade lösningen nästan fullständigt till en smörlik massa, hvori några få mikroskopiska prismer kunde upptäckas. Efter utpressning och omkristallisering af denna massa erhöles stjärnformigt grupperade, snedt afskurna prismer (100 ggrs förstor.), som efter torkning vid 100° innehöllo 3 mol. H₂O.

	Funnet.	Beräknadt.
Na ₂ O	—	13.0
MgO	8.4	8.5
P ₂ O ₅	61.9	59.6
H ₂ O	18.0	18.9



Då de ofvan beskrifna prismatiska salterna $\frac{(\text{H}_4\text{N})_2}{\text{Mg}} \text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5$ (α) och (γ *) nätt och jämnt löstes i utspädd saltsyra, afsatte sig genast ett salt i fyr- och sex-sidiga prismer (144 ggrs förstor.), som vid 100° innehöll 1½ mol. H_2O .

Samma salt erhöles äfven, om det i korta sex-sidiga prismer omsatta saltet (γ) $\frac{(\text{H}_4\text{N})_2}{\text{Mg}} \text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5$ behandlades med öfverskott af HCl .

	Funnnet.				Beräknadt.
	1.	2.	3.	4.	
$(\text{H}_4\text{N})_2\text{O}$	12.5	—	12.4	11.6	11.9
MgO	9.4	9.6	9.6	9.8	9.2
P_2O_5	63.2	64.1	64.3	—	64.6
H_2O	—	—	—	—	14.3

Profvet till 1 framstldt af α , 2 och 3 af γ , och 4 af γ med öfverskott af HCl .

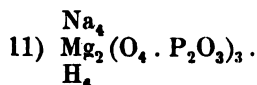
Då det i taflor kristalliserade saltet $\frac{(\text{H}_4\text{N})_2}{\text{Mg}} \text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5$ (γ *) nätt och jämnt löses i HCl , erhöles äfven ett salt i mikroskopiska prismer (144 ggrs förstor.). Men det innehöll, torkadt vid 100°, 3 mol. H_2O .

	Funnnet.	Beräknadt.
$(\text{H}_4\text{N})_2\text{O}$	11.3	11.1
MgO	8.2	8.7
P_2O_5	60.1	60.9
H_2O	—	19.3

Detta salt pöser starkt vid upphettning, tills kristallvattnet och en del af ammoniakken bortgått; vid stark glödgnung går

* Se sid 12 och 13.

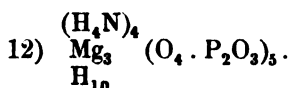
äfvén en del af fosforsyran, såsom det var att vänta, bort i gasform.



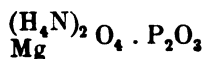
Ur en lösning af MgCl_2 och $\frac{\text{Na}_2}{\text{H}_2} \text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3$ erhöles (såsom ofvan under Mg-saltet 1 omnämndes) ett svärlösligt och ett lättlösligt salt. Detta senare visade sig efter omkristallisation bestå af tjocka, sneda, mikroskopiska taflor, som, torkade vid 100° , innehöllo 5 mol. H_2O .

	Funnet.	Beräknadt.
Na_2O	—	16.3
MgO	10.5	10.7
P_2O_5	57.2	56.3
H_2O	16.9	16.7

Saltet pöser starkt, under det kristallvattnet bortgår; vid glödning smälter det.

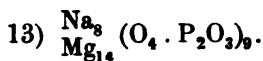


Då det i fyr-sidiga taflor kristalliserade saltet (β)



en annan gång löstes i utspädd HCl , afsatte sig snart ett svärlösligt salt i 4-sidiga pyramider (216 ggrs förstoring). Undersökning gjordes dels på några gånger uttvättadt och utpressadt salt, dels på sådant, som några dagar behandlats med större mängder vatten. Torkadt vid 100° innehöll det 5 mol. H_2O .

	Funnet.		Beräknadt.
	1.	2.	
$(\text{H}_4\text{N})_2\text{O}$	9.4	—	9.3
MgO	10.2	10.3	10.9
P_2O_5	63.4 (medium)		63.7
H_2O	—	—	16.1



Sättes till en lösning af $\text{Na}_4\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_5$ en lösning af MgCl_2 , tills fällningen börjar lösa sig svårt, afsätter sig vid rumstemperatur småningom, vid kokning hastigt, en kornigt kristallinisk, i vatten mycket svårslöslig fällning.

Det i värme framställda saltet har visat sig konstant sammansatt vid flere beredningar.

	Funnet.			Beräknadt.
Na_2O	—	—	—	11.9
MgO	27.0	26.9	26.9	27.0
P_2O_5	60.8	61.3	61.1	61.1

Det lufttorkade saltet innehöll 30 mol. H_2O , det vid 100° torkade 15 mol.

Då en på samma sätt beredd lösning fick stå vid rummets temperatur, hade efter ett par dagar afsatt sig ett salt, som i vattenfritt tillstånd hade samma sammansättning. Det innehöll nämligen:

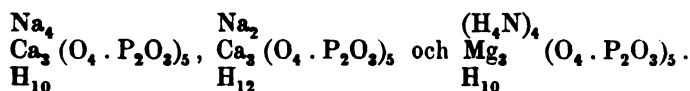
	Funnet.	
MgO	26.7	26.1
P_2O_5	61.4	61.4

Men detta innehöll i lufttorkadt tillstånd 50 mol. H_2O , torkadt vid 100° 30 mol., och var således ej identiskt med det i värme afsatta.

Vid upprepade försök har dock det i köld afsatta saltet befunnits vexla mycket i sammansättning.

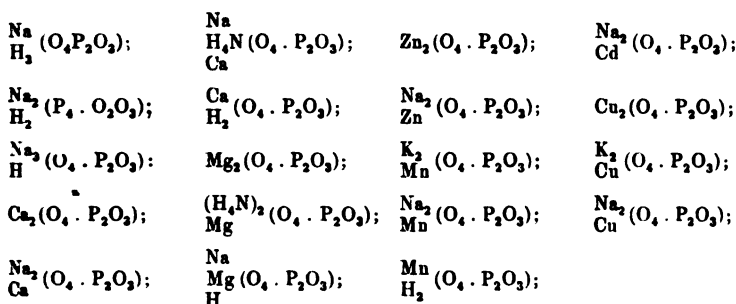
Vid jämförelse mellan de undersökta Ca- och Mg-salterna finner man, att trippelsalter lätt bildas med Ca, Na och H_4N , men endast dubbelsalter med Mg och K, Mg och Na, eller Mg och H_4N .

Särskildt torde ock böra påpekas, att 3Ca och 3Mg synas på något tills vidare obegripligt sätt kunna sammanbinda $5(\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3)$ i salterna

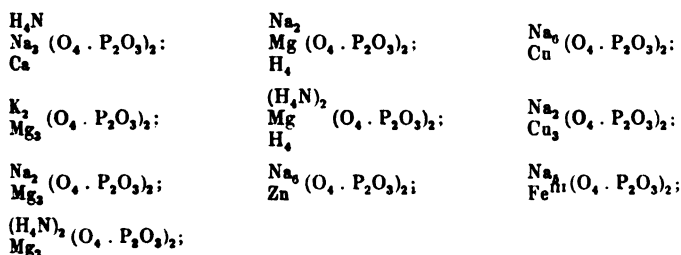


Sammanställas de af mig nu undersökta pyrofosfaten med de af mig förut beskrifna,¹⁾ erhållas följande grupper:

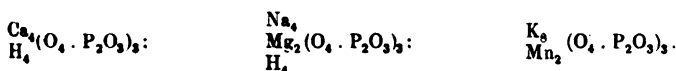
Med $(\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3)$.



Med $(\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3)_2$.



Med $(\text{O}_4 \cdot \text{P}_2\text{O}_3)_3$.



¹⁾ Pyrofosforsyrade salter (grad. disp. Upsala 1872) och Bidrag till känned. om de pyrof. salterna (i Öfvers. af Vetensk.-Akad:s Förhandl. 1873).

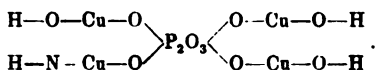
Med $(O_4 \cdot P_2O_3)_5$.

$(H_4N)_5$ Na_3 Ca_6	$(O_4 \cdot P_2O_3)_5$;	Na_4 Ca_3 H_{10}	$(O_4 \cdot P_2O_3)_5$;	$(H_4N)_4$ Mg_3 H_{10}	$(O_4 \cdot P_2O_3)_5$;	Na_3 Mn_4	$(O_4 \cdot P_2O_3)_5$;
Ca_7 H_7	$(O_4 \cdot P_2O_3)_5$;	Na_3 Ca_2 H_{12}	$(O_4 \cdot P_2O_3)_5$;	Mg_4 H_{12}	$(O_4 \cdot P_2O_3)_5$;	Na_2 Fe_4	$(O_4 \cdot P_2O_3)_5$;
Na_4 Ca_5 H_6	$(O_4 \cdot P_2O_3)_5$;	Mg_9 H_2	$(O_4 \cdot P_2O_3)_5$;	Na_4 Zn_4	$(O_4 \cdot P_2O_3)_5$;	Na_2 Al_4	$(O_4 \cdot P_2O_3)_5$;

Med $(O_4 \cdot P_2O_3)_9$.

Ca_{10} K_{16}	$(O_4 \cdot P_2O_3)_9$;	Na_8 Mg_{14}	$(O_4 \cdot P_2O_3)_9$;	Na_{16} Zn_{10}	$(O_4 \cdot P_2O_3)_9$;	Na_{16} Cd_{10}	$(O_4 \cdot P_2O_3)_9$.
-----------------------	--------------------------	---------------------	--------------------------	------------------------	--------------------------	------------------------	--------------------------

Och det basiska saltet:



Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 138.)

La Plata. Museo.

Anales. Seccion Geológica. 2: P. 1. 1900. Fol.

Leeds. Yorkshire geological and polytechnic society.

Proceedings. N. S. Vol. 14 (1900): P. 1. 8:o.

Leiden. Sterrenwacht.

Verslag van den staat. 1896/98; 1898/1900. 8:o.

Leipzig. K. Sachs. Gesellschaft der Wissenschaften.

Abhandlungen. Philol.-hist. Cl. Bd 20: N:o 3. 1901. 8:o.

Lisboa. Direction des services géologiques du Portugal.

CHOFFAT, P., Recueil de monographies stratigraphiques sur le système crétacique. Étude 2. 1900. 4:o.

London. Royal institution of Great Britain.

Proceedings. Vol. 16 (1900): P. 1. 8:o.

— *Wellcome chemical research laboratories.*

N:o 12—15. 1900. 8:o.

— *Meteorological office.*

Report of the meteorological council ... 1899/1900. 8:o.

— *R. Astronomical society.*

Monthly notices. Vol. 60: Appendix; 61 (1900/01): 2. 8:o.

— *Chemical society.*

Journal. Vol. 79—80 (1901): 2. 8:o.

Proceedings. Vol. 16 (1900): N:o 230; 17 (1901): 231. 8:o.

— *R. Meteorological society.*

Quarterly journal. Vol. 26 (1900): N:o 116. 8:o.

The meteorological record. Vol. 19 (1899): N:o 73—74, 76. 8:o.

— *Royal Society.*

Proceedings. Vol. 67 (1900/1901): N:o 439—441. 8:o.

— *Zoological Society.*

Transactions. Vol. 15: P. 5. 1900. 4:o.

London, Ontario. Entomological society of Ontario.

The Canadian Entomologist. Vol. 33 (1901): N:o 1. 8:o.

Lübeck. Geographische Gesellschaft und Naturhistorisches Museum.

Mittheilungen. Reihe 2: H. 14. 1900. 8:o.

Marseille. Musée d'histoire naturelle.

Annales. (2) T. 1 (1898/99): Fasc. 2. 4:o.

— *Commission de météorologie.*

Bulletin annuel. Année 18 (1899). 4:o.

Melbourne. Royal society of Victoria.

Proceedings. N. S. Vol. 12: P. 2. 1900. 8:o.

Mexico. Sociedad científica »Antonio Alzate».

Memorias y revista. T. 14 (1899/1900): Núms. 11—12. 8:o.

Modena. R. Osservatorio meteorologico.

Pubblicazioni. N:o 4: A—B, 6—13. 1897—1900. 4:o.

5 st. småskr. 1900. 4:o & 8:o.

Moscou. *Société impériale des naturalistes.*

Bulletin. 1900: N:o 1—2. 8:o.

München. *Meteorologische Centralstation.*

Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern.
1900: 11. Fol.

Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*

Rendiconto. (3) Vol. 6 (1900): 8—12. 8:o.

New York. *Academy of sciences.*

Annals. Vol. 13: P. 1. 1900. 8:o

Memoirs. Vol. 2 (1900): P. 2. 4:o.

— *Museum.*

Bulletin. N:o 19—25 & Pl.; 26—32. 1898—1900. 8:o.

Report. 49 (1895): 3; 50 (1896): 2; 51 (1897): 1—2. 4:o & 8:o.

Nizza. *Observatoire.*

Annales. T. 7. 1900. 4:o.

— *Société de médecine et de climatologie.*

Nice-médical. Année 25 (1900/1901): N:o 4. 8:o.

Ottawa. *Field-naturalists' Club.*

The Ottawa naturalist. Vol. 14 (1900/1901): N:o 10. 8:o.

Palermo. *Circolo matematico.*

Rendiconti. T. 14 (1900): Fasc. 6. 8:o.

Paris. *Comité international des poids et mesures.*

Procès-verbaux. 1900. 8:o.

— *Commission des méthodes d'essai des matériaux de construction.*

Session 2. T. 1. 1900. Fol.

— *École des mines.*

Annales. T. 18 (1900): Livr. 8—9. 8:o.

— *Société astronomique de France.*

Bulletin. 1901: 1—2. 8:o.

— *Société de géographie.*

La Géographie. Année 1900: N:o 12; 1901: 1. 8:o.

— *Observatoire de Paris.*

Carte photographique du ciel. 1900. Fol.

Pola. *K. u. K. Hydrographisches Amt der k. u. k. Kriegs-Marine.*

Meteorologische Termin-Beobachtungen. 1900: 12. tv. Fol.

Monats- u. Jahresübersicht 1900. Tv. Fol.

Philadelphia. *Geographical society.*

Bulletin. Vol. 2 (1900): N:o 6. 8:o.

— *American philosophical society.*

Proceedings. Vol. 39 (1900): N:o 163. 8:o.

Prag. *Spolek chemiků Českých.*

Listy chemické. Roč. 24 (1900): Číslo 5—10. 8:o.

Roma. *Ministero della pubblica istruzione.*

GALILEI, G., Opere. Ed. nazionale. Vol. 10. 1900. 4:o.

— *R. Accademia dei Lincei.*

Classe di scienze morali...

Atti. (5) P. 2: Notizie degli scavi. 1900: 9. 4:o.

Rendiconti. (5) Vol. 9 (1900): Fasc. 7—8. 8:o.

Roma. R. Accademia dei Lincei.

Classe di scienze fisiche...

Rendiconti. (5) Vol. 9 (1900): Sem. 2: Fasc. 12; 10 (1901): Sem. 1: 1—2. 8:o.

— *Accademia Pontificia de Nuovi Lincei.*

Atti. Anno 54 (1900/1901): Sess. 1. 4:o.

— *R. Comitato Geologico d'Italia.*

Bollettino. Vol. 31 (1900): Trim. 3. 8:o.

— *R. Istituto Botanico.*

Annuario. Anno 10 (1900): Fasc. 1. 4:o.

St Petersburg. Hortus Petropolitanus.

Acta. T. 16; 18: Fasc. 1—2. 1900. 8:o.

Santiago. Museo nacional de Chile.

Anales. Entrega 14. 1900. 4:o.

Sydney. Australian museum.

Records. Vol. 3: N:o 8. 1900. 8:o.

— *Linnean Society of New South Wales.*

Proceedings. Vol. 25 (1900): P. 3. 8:o.

Tacubaya. Observatorio astronómico nacional.

Boletín. T. 2: N. 6. 1900. Fol.

Tokyo. Earthquake investigation committee.

Publications. N:o 3—4. 1900. 4:o.

— *Central meteorological observatory.*

Weather chart. 1900: 10—11. Fol.

Torino. Musei di zoologia ed anatomia comparata.

Bollettino. Vol. 15 (1900): N:o 377—381. 8:o.

Toronto. Canadian institute.

Proceedings. Vol. 2: P. 4. 1901. 8:o.

— *Meteorological service.*

Monthly weather review. Vol. 23 (1899): 1—12. 4:o.

Utrecht. Physiologisch Laboratorium.

Onderzoekingen. (5) 2: Afl. 2. 1901. 8:o.

Verona. Accademia d'agricoltura, scienze, lettere, arti e commercio.

Atti e memorie. (4) Vol. 1: Fasc. 1. 1900. 8:o.

Washington. Smithsonian Institution.

Annual report. 1898: 1—2. 8:o.

— *U. S. National museum.*

Special bulletin: NUTTING, C. C., American Hydroids. P. 1. 1900. 4:o.

— *Academy of sciences.*

Proceedings. Vol. 2 (1900): Titel & Reg.

— *U. S. Naval observatory.*

Report. Year 1899/1900. 8:o.

— *U. S. Department of agriculture.*

Publications, Nov. 1900. 21 nummer.

— *Weather bureau.*

Report. 1898—99: Vol. 1—2. 4:o.

Tables of daily precipitation at special river and rainfall stations for the years 1893—95. 8:o.

Monthly weather review. Vol. 28 (1900): N:o 10. 4:o.

Wien. *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.*

Verhandlungen. Bd 50 (1900): H. 10. 8:o.

— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*

Verhandlungen. 1900: N:o 13—16. 8:o.

Jahrbuch. Bd 50 (1900): H. 2. 8:o.

Abhandlungen. Bd 16: H. 1. 1900. Fol.

Zi-ka-wei. *Shanghai meteorological society.*

Annual report. 7 (1898) & Appendix. 8:o & Fol.

Zürich. *Schweizerische meteorologische Centralanstalt.*

Meteorologische Beobachtungen an 12 Stationen der Schweiz. 1899

Sem. 1—2. 4:o.



ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 58.

1901.

Nº 3.

Onsdagen den 13 Mars.

INNEHÅLL:

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 185.
PHRAGMÉN, Sur une loi de symétrie relative à certaines formules asymptotiques	» 189.
FREDHOLM, Sur la méthode de prolongement analytique de M. Mittag-Leffler	» 203.
JANSSON, Über die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees	» 207.
Skåker till Akademiens bibliotek	sidd. 187, 206, 223.

Tillkännagafs, att Akademiens ledamot f. d. Kanslirådet Friherre ALFRED HENRIK EDUARD FOCK med döden afgått.

Herr BOHLIN redogjorde för de framsteg, som under senare tid blifvit gjorda i konstruktionen af astronomiska objektiv.

Herr CEDERBLOM lemnade en redogörelse för den berättelse, som vagnmakaren A. SVENSSON, hvilken af Akademien utsetts till Byzantinsk stipendiat, afgifvit om den resa, som han i denna egenskap utfört till Hannover, Berlin och Paris för studerande af vagnstillverkning i större skala.

På tillstyrkan af komiterade antogos följande afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter:

i Bihanget till Akademiens Handlingar: 1:o) »On the Genus *Lycodes*», af Professor F. A. SMITT; 2:o) »Etude sur la flore algologique d'eau douce des Açores», af Docenten K. BOHLIN; 3:o) »Ex herbario Regnelliano. Adjumenta ad floram phanerogamicam Brasilie terrarumque adjacentium cognoscendam. Part. 4.» af Dr. G. O. MALME; 4:o) »Ueber die Embryologie von *Zostera marina*», af Docenten O. ROSENBERG; 5:o) »Zur Kenntniss der Vegetation der Insel Oesel. I», af Kandidaterne C. SKOTTSBERG och T. WESTERGREN; och

i Öfversigten: de i innehållsförteckningen angifna 3 uppsatser.

Den *Ferrnerska* belöningen tilldelades Filos. Kandidaten H. VON ZEIPPEL för hans i Bihaget till Akademiens Handlingar under året intagna afhandling: »Recherches sur l'existence des séries de Mr. LINDSTEDT».

Den *Lindbomska* belöningen fann Akademien denna gång icke anledning att bortgifva, utan skulle den därför disponibla räntan å donationen läggas till kapitalet.

Den *Flormanska* belöningen tillerkändes Docenten O. CARLGREN för hans under året utgifna afhandling: »Ostafrikanische Actinien, gesammelt vom Herrn R. STUHLMANN».

För utförande af resor inom landet för att undersöka dess naturförhållande anvisade Akademien följande understöd:

åt Friherre C. KURCK 125 Kr. för att i Skåne fortsätta sina undersökningar af kalktuffaunan och floran;

åt Redaktör W. BÜLOW 125 Kr. för idkande af mykologiska studier i Skåne och Blekinge;

åt Amanuensen C. J. SKOTTSBERG 125 Kr. för att i löfängar i Stockholms skärgård studera insekternas förhållande till pollinations-arbetet;

åt Docenten R. SERNANDER 150 Kr. för biologiska och utvecklingshistoriska studier öfver vegetationen i Uplands yttersta skärgård;

åt Kandidaten H. HESSELMAN 150 Kr. för slutförande af hans biologiskt-fysiologiska forskningar inom löfängar i Stockholms norra skärgård;

åt Docenten A. OHLIN 125 Kr. för att vid Kristinebergs zoologiska station utföra systematiska och embryologiska studier öfver Malacostraca;

åt Kandidaten K. A. ANDERSSON 100 Kr. för studier öfver Bryozoa vid Kristineberg;

åt Kandidaten E. WAHLGREN 125 Kr. för studium af våra sydliga provinser apterygotfauna;

åt Licentiaten I. ARWIDSSON 100 Kr. för studium af Mal-
donider vid Gullmaren;

åt Docenten H. WALLENGREN 125 Kr. för studium af cili-
ata infusorier i norra Skåne och Småland; och

åt Kandidaten N. HOLMGREN 100 Kr. för anatomiska och
biologiska studier öfver insekterna i Stockholms skärgård.

Statsanslaget till instrumentmakeriernas uppmuntran beslöt
Akademien låta lika fördela mellan matematiska och fysiska
instrumentmakarne P. M. SÖRENSEN och G. SÖRENSEN.

Genom anställda val kallade Akademien till inländsk leda-
mot Öfverläkaren vid Sabbatsbergs sjukhus Doktor FRANS WIL-
HELM WARFVINGE, och till utländsk ledamot Professorn vid
Polytekniska Skolan i Zürich LUDVIG TETMAJER.

Följande skänker anmälades:

Till Vetenskaps-Akademins Bibliotek.

Stockholm. *Kongl. Biblioteket.*

Handlingar. 22 (1899). 8:o.

— *Geologiska föreningen.*

Förhandlingar. Bd 22. 1900. 8:o.

Strassburg. *Geologische Landesanstalt.*

Mittheilungen. Bd. 5: H. 2. 1900. 8:o.

Abhandlungen zur geolog. Specialkarte von Elsass-Lothringen. N. F.

H. 4: Text & Atlas. 8:o & Fol.

— *Karolinska mediko-kirurgiska institutet.*

Berättelse. 1899—1900. 8:o.

Katalog. 1901. 8:o.

— *K. Landtbruksstyrelsen.*

Meddelanden. 1899: Nr 10. 8:o.

— *Svenska trädgårdsföreningen.*

Tidskrift. N. F. 1901: 1—2. 8:o.

Halmstad. *Hallands läns hushållningssällskap.*

Handlingar. 1901: H. 1. 8:o.

Bergen. *Museum.*

Aarbog. 1900: H. 2. 8:o.

Aarsberetning. 1900. 8:o.

Berlin. *K. botanischer Garten und Museum.*

Notizblatt. Append. 7. 1901. 8:o.

— *Deutsche Physikalische Gesellschaft.*

Verhandlungen. Jahrg. 3 (1901): 1—2. 8:o.

— *K. Preussisches meteorologisches Institut.*

Witterung. 1900: 1—12. 4:o.

Bruxelles. Académie R. de Belgique.

Bulletin. Cl. des lettres . . . 1901: N:o 1. 8:o.

» Cl. des sciences. 1901: N:o 1. 8:o.

— Musée du Congo.

Annales. Zool. Sér. 1. T. 1: Fasc. 6; Bot. Sér. 1. T. 1: 7. 1900—1901. 4:o.

— Société Belge de géologie.

Bulletin. Année 11 (1897): Fasc. 4; 15 (1901): 1. 8:o.

Budapest. Ungarische Centralbureau f. ornith. Beobachtungen.

Aquila. Jahrg. 8 (1901): Nr 1—2. 8:o.

— Observatoire Royal météorologique.

Jahrbücher. 1898: Th. 1; 1899: 2. 4:o.

Publicationen. 1900: K. 2—3. 4:o.

Buitenzorg. 's Lands Plantentuin.

Mededeelingen. N:o 42. 1900. 8:o.

Calcutta. Geological survey of India.

Memoirs. Vol. 28: P. 2. 1900. 8:o.

Palæontologia Indica. Ser. 9. Vol. 2: P. 2; 15: 3: 2. 1899—1900. 4:o.

Cambridge, Mass. Astronomical observatory of Harvard College.

Annals. Vol. 43: P. 1. 1901. 4:o.

Chambésy. Herbiere Boissier.

Bulletin. (2) T. 1 (1901): N:o 3. 8:o.

Chemnitz. K. Sächsisches meteorologisches Institut.

Jahrbuch. Jahrg. 16 (1898): Abth. 1. 4:o.

Chicago. Newberry library.

Report. Year 1900. 8:o.

Dresden. K. Sächsisches statistisches Bureau.

Zeitschrift. Jahrg. 46 (1900): H. 3—4. 4:o.

Durban. Natal Observatory.

Report of the government astronomer. Year 1899. Fol.

Edinburgh. Botanical society.

Transactions and proceedings. Vol. 21: P. 4. 1900. 8:o.

Firenze. Società entomologica Italiana.

Buletino. Anno 32 (1900): Trim. 4. 8:o.

Frankfurt. Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.

Abhandlungen. Bd 25: H. 1; 26: 2; 28. 1900. 4:o.

Bericht. 1900. 8:o.

Halle. Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd 73 (1900/1901): H. 5—6. 8:o.

Heidelberg. Grossherzogl. Sternwarte.

Veröffentlichungen. Bd 1. 1900. 4:o.

Jena. Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.

Jenaische Zeitschrift. Bd 35 (1901): H. 1—3. 8:o.

Karlsruhe. Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie.

Übersicht d. Ergebnisse der an den badischen meteorolog. Stationen angestellten Beobachtungen . . . 1900: 1—12. Fol.

(Forts. & sid. 206.)

Sur une loi de symétrie relative à certaines formules asymptotiques.

Par E. PHRAGMÉN.

[Communiqué le 13 Mars 1901 par G. MITTAG-LEFFLER.]

J'ai publié antérieurement dans ce même Recueil (année 1891, p. 599) certains résultats relatifs aux expressions asymptotiques étudiées par GAUSS et DIRICHLET, résultats qui se présentaient comme des extensions naturelles de quelques théorèmes célèbres de TCHEBYCHEFF.

En relisant nouvellement ma démonstration, j'ai remarqué qu'on peut facilement donner à ces résultats une forme beaucoup plus précise.

Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x , telle que l'intégrale infinie

$$\int_{x_0}^{\infty} |\varphi(x)| x^{-s-1} dx \quad (\text{dans laquelle nous supposons toujours } x_0 \geq 1)$$

converge pour $s > s_0$, s_0 désignant une quantité réelle; on sait que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-s-1} dx$$

converge uniformément pour $R(s) > s_0 + \varepsilon$, ε désignant une quantité positive arbitrairement petite. Supposons que la fonction monogène définie par cette intégrale soit régulière au point $s = s_0$, de manière que l'on ait, dans le domaine où les deux expressions convergent,

$$(1) \quad \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-s-1} dx = \sum_1^{\infty} \frac{c_1}{|\lambda|} (s_0 - s)^1,$$

et désignons par ϱ le rayon de convergence de ce développement taylorien.

Définissons enfin le symbole $\{u\}$ par les conditions suivantes:

$$\{u\} = \begin{cases} u & \text{pour } u \geq 0 \\ 0 & \text{pour } u \leq 0. \end{cases}$$

Cela posé, je dis que les deux intégrales infinies

$$\int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\} x^{-\alpha-1} (\log x)^{-k} dx, \quad \int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\} x^{-\alpha-1} (\log x)^{-k} dx,$$

convergent ou divergent en même temps, tant que α satisfait à l'inégalité $\alpha > s_0 - \varrho$ et que k est un nombre entier (positif, négatif ou nul).

Comme il est évident *a priori* que ce théorème est vrai pour $\alpha > s_0$, il suffit de le démontrer en supposant $s_0 - \varrho < \alpha \leq s_0$.

D'abord, on obtient immédiatement, en intégrant ou en différentiant (1) par rapport à ϱ , la formule

$$(2) \quad \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) \cdot x^{-s-1} (\log x)^{-k} dx = \sum_0^{\infty} \frac{c_{\nu-k}}{|\lambda|^{\nu}} (s_0 - s)^{\nu};$$

dans cette formule, k est un nombre entier (positif, nul ou négatif), c_{-1}, c_{-2}, \dots sont certaines constantes d'intégration; la série du membre droit converge pour $|s - s_0| < \varrho$.

Posons maintenant

$$(3) \quad I_1 = \int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\} x^{-s_0-1} \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^1}{|\lambda|} \cdot (\log x)^{-k} dx;$$

c'est une quantité finie si nous supposons convergente l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\} x^{-\alpha-1} (\log x)^{-k} dx \quad (\alpha \text{ étant inférieur ou égal à } s_0)$$

On a en effet

$$0 \leq \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^\lambda}{|\lambda|} \leq x^{s_0 - \alpha}.$$

Par conséquent l'élément de l'intégrale

$$I_\lambda = \int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\} x^{-s_0-1} \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^\lambda}{|\lambda|} \cdot (\log x)^{-k} \cdot dx,$$

qui est positif ou nul, est inférieur à l'élément également positif ou nul de l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\} x^{-s_0-1} \cdot x^{s_0-\alpha} \cdot (\log x)^{-k} dx,$$

que nous avons supposée convergente. I_λ est donc fini. On a d'ailleurs

$$I = \sum_0^\infty I_\lambda.$$

Pour démontrer en toute rigueur cette égalité, choisissons x_1, x_2, \dots de manière que $x_{r+1} > x_r$ et que $\lim x_r = \infty$, et posons

$$I_{\lambda, r} = \int_{x_r}^{x_{r+1}} \{\varphi(x)\} x^{-s_0-1} \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^\lambda}{|\lambda|} (\log x)^{-k} dx$$

et

$$\begin{aligned} I^{(r)} &= \int_{x_r}^{x_{r+1}} \{\varphi(x)\} x^{-s_0-1} (\log x)^{-k} dx = \\ &= \int_{x_r}^{x_{r+1}} \{\varphi(x)\} x^{-s_0-1} \cdot \sum_0^\infty \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^\lambda}{|\lambda|} \cdot (\log x)^{-k} dx. \end{aligned}$$

Puisque la série $\sum_0^\infty \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^\lambda}{|\lambda|}$ converge uniformément pour

$x_r \leq x \leq x_{r+1}$, on a sûrement

$$I^{(r)} = \sum_0^\infty I_{\lambda, r}$$

Or on a

$$\begin{aligned} I &= \sum_0^{\infty} I^{(\nu)} = \sum_0^{\infty} \sum_1^{\infty} I_{\lambda, \nu} \\ &= \sum_1^{\infty} \sum_0^{\infty} I_{\lambda, \nu} \end{aligned}$$

puisque les $I_{\lambda, \nu}$ sont positifs ou nuls. Enfin $\sum_0^{\infty} I_{\lambda, \nu} = I_{\lambda}$;
donc

$$I = \sum_1^{\infty} I_{\lambda}.$$

c. q. f. d.

Comme l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\} x^{s-1} \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^{\lambda}}{|\lambda|} \cdot (\log x)^{-k} dx$$

converge uniformément pour $s \geq s_0$, on a

$$\lim_{s=s_0} \int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\} x^{s-1} \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^{\lambda}}{|\lambda|} (\log x)^{-k} dx = I_{\lambda}.$$

Puis, d'après la formule (2), où l'on substitue $k - \lambda$ à k et multiplie par $\frac{(s_0 - \alpha)^{\lambda}}{|\lambda|}$, on obtient

$$\lim_{s=s_0} \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{s-1} \cdot \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^{\lambda}}{|\lambda|} (\log x)^{-k} dx = \frac{c_{\lambda-k} (s_0 - \alpha)^{\lambda}}{|\lambda|}.$$

En nous servant de l'identité

$$\{-\varphi(x)\} = \{\varphi(x)\} - \varphi(x)$$

nous obtenons par conséquent

$$\begin{aligned} (4) \quad \lim_{s=s_0} \int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\} x^{s-1} \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^{\lambda}}{|\lambda|} (\log x)^{-k} dx &= \\ &= I_{\lambda} - \frac{c_{\lambda-k}}{|\lambda|} (s_0 - \alpha)^{\lambda}. \end{aligned}$$

Dans toutes ces expressions limites s s'approche de s_0 en décroissant.

Or, dans l'intégrale

$$(5) \quad \int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\} x^{-s-1} \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^{\lambda}}{|\lambda|} (\log x)^{-k} dx$$

les éléments sont positifs ou nuls et croissent quand s décroît. Par conséquent, on démontre à l'aide de la formule (4), que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\} x^{-s_0-1} \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^{\lambda}}{|\lambda|} (\log x)^{-k} dx$$

obtenue de (5) en y écrivant s_0 au lieu de s , converge et est égale à

$$I_{\lambda} - \frac{c_{\lambda-k}(s_0 - \alpha)^{\lambda}}{|\lambda|}.$$

On a en effet, pour $s > s_0$, $x > x_0$,

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^x \{-\varphi(x)\} x^{-s-1} \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^{\lambda}}{|\lambda|} (\log x)^{-k} dx \\ & \leq \int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\} x^{-s-1} \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^{\lambda}}{|\lambda|} (\log x)^{-k} dx \\ & \leq \lim_{s \rightarrow s_0} \int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\} x^{-s-1} \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^{\lambda}}{|\lambda|} (\log x)^{-k} dx. \end{aligned}$$

Ces inégalités étant vraies pour toutes les valeurs de $s > s_0$, et la première de ces trois intégrales étant une fonction continue de s jusqu'à $s = s_0$, on aura encore pour $s = s_0$

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^x \{-\varphi(x)\} x^{-s_0-1} \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^{\lambda}}{|\lambda|} (\log x)^{-k} dx \\ & \leq \lim_{s \rightarrow s_0} \int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\} x^{-s-1} \frac{[(s_0 - \alpha) \log x]^{\lambda}}{|\lambda|} (\log x)^{-k} dx. \end{aligned}$$

Or, dire que cette inégalité subsiste pour toutes les valeurs de x supérieures à x_0 , c'est dire que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\} x^{-s_0-1} \frac{[(s_0-\alpha) \log x]^{\lambda}}{|\lambda|} (\log x)^{-k} dx$$

converge. On peut en conclure que l'intégrale (5) converge *uniformément* pour $s \geq s_0$, et l'égalité (4) donne par conséquent finalement

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\} x^{-s_0-1} \frac{[(s_0-\alpha) \log x]^{\lambda}}{|\lambda|} (\log x)^{-k} dx = \\ = I_{\lambda} - \frac{c_{\lambda-k}}{|\lambda|} (s_0-\alpha)^{\lambda}. \end{aligned}$$

Faisant la somme par rapport à λ , nous obtenons

$$\begin{aligned} (6) \quad \sum_0^{\infty} \int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\} x^{-s_0-1} \frac{[(s_0-\alpha) \log x]^{\lambda}}{|\lambda|} (\log x)^{-k} dx = \\ = \sum_0^{\infty} I_{\lambda} - \sum_0^{\infty} \frac{c_{\lambda-k}}{|\lambda|} (s_0-\alpha)^{\lambda}, \end{aligned}$$

ce qui est une quantité finie, parce que $0 \leq s_0 - \alpha < \varrho$.

Répétant, avec une modification insignifiante, un raisonnement de toute à l'heure, nous concluons maintenant sans difficulté que l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\} x^{-\alpha-1} (\log x)^{-k} dx = \\ = \int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\} x^{-s_0-1} \cdot x^{s_0-\alpha} \cdot (\log x)^{-k} dx \end{aligned}$$

converge, et qu'elle est égale à l'expression (6), c'est à dire à

$$\int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\} x^{-\alpha-1} (\log x)^{-k} dx - \sum_0^{\infty} \frac{c_{\lambda-k}}{|\lambda|} (s_0-\alpha)^{\lambda}.$$

Une modification de l'énoncé de notre théorème s'offre d'elle même. Les *trois* intégrales

$$\int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\} x^{-\alpha-1} (\log x)^{-k} dx, \quad \int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\} x^{-\alpha-1} (\log x)^{-k} dx,$$

$$\int_{x_0}^{\infty} |\varphi(x)| x^{-\alpha-1} (\log x)^{-k} dx$$

convergent et divergent en même temps. C'est évident puisqu'on a

$$|\varphi(x)| = \{\varphi(x)\} + \{-\varphi(x)\}$$

$$0 \leq \{\varphi(x)\} \leq |\varphi(x)|, \quad 0 \leq \{-\varphi(x)\} \leq |\varphi(x)|.$$

Il mérite d'être remarqué que, dans le cas où on sait que l'intégrale infinie $\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-s-1} dx$, ainsi que toutes les intégrales $\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-s-1} (\log x)^k dx$, que nous avons supposé absolument convergentes pour $R(s) > s_0$, convergent encore *uniformément*, bien que peut-être non plus *absolument*, pour $s_0 > R(s) > s_0 - \rho$, le théorème que nous venons de démontrer devient tout-à-fait banal.

Dans ce cas, en effet, si l'intégrale $\int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\} x^{-s-1} (\log x)^k dx$ converge pour une valeur de s telle que $R(s) < s_0$ il s'ensuit immédiatement que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\} x^{-s-1} (\log x)^k dx$$

converge aussi, puisqu'on a

$$\{-\varphi(x)\} = \{\varphi(x)\} - \varphi(x).$$

Parmi les applications nombreuses que comporte ce théorème nous ne citerons aujourd'hui que celles qui ont rapport à la fonction $f(x)$ de RIEMANN, ou plutôt à la fonction plus générale $f(x, \alpha)$ définie par la condition de rester constante entre deux puissances de nombres premiers, et d'augmenter de $\frac{1}{p^{\alpha p}}$ quand x passe par p^r , p étant un nombre premier.

On aura

$$\int_1^{\infty} f(x, \alpha) x^{s-1} dx = \frac{1}{s} \log \zeta(s + \alpha),$$

et cette égalité subsistera pour $R(s) > 1 - \alpha$ si $\alpha \leq 1$, et pour $R(s) > 0$ si $\alpha > 1$.

On peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \log \zeta(s + \alpha) = & -\frac{\log(s-1+\alpha)}{s} + \frac{\log(\alpha-1)\zeta(\alpha)}{s} + \\ & + \frac{\log \frac{(s+\alpha-1)\zeta(s+\alpha)}{(\alpha-1)\zeta(\alpha)}}{s} \end{aligned}$$

et, dans cette formule, le troisième terme n'a plus, dans le domaine $R(s) > \frac{1}{2} - \alpha$, d'autres points singuliers que les zéros imaginaires de $\zeta(s + \alpha)$.

On trouve facilement une fonction $\Phi(x, \alpha)$ telle que

$$\int_{x_0}^{\infty} \Phi(x, \alpha) x^{s-1} dx = -\frac{\log(s-1+\alpha)}{s} + \text{fonction entière.}$$

Telle est en effet la fonction $\Phi(x, \alpha)$ définie par les conditions

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(x, \alpha)}{dx} &= \frac{1}{x^\alpha \log x} \\ \Phi(e, \alpha) &= C + \int_0^1 \frac{e^{(1-\alpha)u} - 1}{u} du, \end{aligned}$$

C étant la constante dite d'EULER ou de MASCHERONI.¹⁾

¹ Nous donnons le calcul en entier bien qu'il soit tout élémentaire. Nous pouvons écrire

$$\Phi(e, \alpha) = \int_0^1 \frac{1 - e^{-u}}{u} du - \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_0^1 \frac{e^{(1-\alpha)u} - 1}{u} du.$$

Puis on a, pour $\alpha \leq 1$ et $R(s) > 1 - \alpha$, de même que pour $\alpha > 1$ et $R(s) > 0$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Phi(x, \alpha) x^{s-1} = 0.$$

D'ailleurs on sait que $\int_{x_0}^{\infty} x^{-s-1} dx = \frac{x_0^{-s}}{s} = \frac{1}{s} + \text{fonction en-}$

tière. Il est donc démontré que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} [f(x, \alpha) - \Phi(x, \alpha) - \log(\zeta(\alpha)(\alpha - 1))] x^{-s-1} dx$$

représente une fonction de s , qui dans le domaine $R(s) > \frac{1}{2} - \alpha$ ne possède d'autres points singuliers que les zéros imaginaires de $\zeta(s + \alpha)$. D'ailleurs si $\alpha < \frac{1}{2}$ on peut exclure le terme $-\log(\zeta(\alpha)(\alpha - 1))$ sans que notre intégrale cesse d'avoir cette propriété.

Notre intégrale converge absolument

$$\begin{aligned} &\text{pour } R(s) > 1 - \alpha, \text{ si } \alpha \leq 1, \\ &\text{pour } R(s) > 0, \quad \text{si } \alpha > 1. \end{aligned}$$

Il suit donc de notre théorème que, en désignant par $\varphi(x)$ la fonction

$$f(x, \alpha) - \Phi(x, \alpha) - \log(\zeta(\alpha)(\alpha - 1))$$

ou, pour $\alpha < \frac{1}{2}$, la fonction

On a par conséquent

$$\begin{aligned} &\int_e^{\infty} \Phi(x, \alpha) x^{-s-1} dx = \\ &= \frac{1}{s} \left[\int_0^1 \frac{1 - e^{-u}}{u} du - \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_0^1 \frac{e^{(1-\alpha-s)u} - 1}{u} du + \int_1^{\infty} \frac{e^{(1-\alpha-s)u}}{u} du \right] \\ &\quad - \frac{\Phi(e, \alpha) \cdot (1 - e^{-s}) + \int_0^1 (e^{(1-\alpha-s)u} - e^{(1-\alpha)u}) \frac{du}{u}}{s} \\ &= \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \frac{e^{(1-\alpha-s)u} - e^{-u}}{u} du + \text{fonction entière.} \end{aligned}$$

Or l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{e^{(1-\alpha-s)u} - e^{-u}}{u} du$ est égale à $-\log(s + \alpha - 1)$, car sa

dérivée par rapport à s est égale $-\int_0^{\infty} e^{(1-\alpha-s)u} du = \frac{1}{1 - \alpha - s}$ et elle s'annule pour $\alpha + s = 2$.

$$f(x, \alpha) - \mathcal{O}(x, \alpha),$$

les trois intégrales

$$\int_{x_0}^{\infty} \{q(x)\} x^{-\beta-1} (\log x)^{-k} dx, \quad \int_{x_0}^{\infty} \{-q(x)\} x^{-\beta-1} (\log x)^{-k} dx,$$

$$\int_{x_0}^{\infty} |q(x)| x^{-\beta-1} (\log x)^{-k} dx$$

convergent ou divergent en même temps, tant que

$$\beta \geq \frac{1}{2} - \alpha$$

D'ailleurs on sait qu'elles divergent sûrement pour $\beta = \frac{1}{2} - \alpha$, $k = 0$. (Car si la dernière intégrale convergerait pour ces valeurs, il s'ensuivrait que $\log \zeta(s + \alpha)$ serait fini pour $R(s + \alpha) \geq \frac{1}{2}$, ce qui n'est pas le cas, la fonction $\zeta(s + \alpha)$ ayant certainement des zéros dans ce domaine). On peut par conséquent dire, sans toute restriction, qu'elles convergent ou divergent en même temps.

En particulier faisons $\alpha = 0$; $f(x, 0)$ est la fonction $f(x)$ de RIEMANN, tandis que $\mathcal{O}(x, 0) = Li x$, de sorte qu'on peut mettre

$$q(x) = f(x) - Li x.$$

M. VON KOCH a démontré (*Acta mathematica*, t. 24, p. 182), en admettant que les zéros imaginaires de $\zeta(s)$ ont leurs parties réelles égales à $\frac{1}{2}$, que l'on a

$$|f(x) - Li x| < K \log x \cdot x^{\frac{1}{4}}$$

Comme nous l'avons déjà remarqué pour le cas plus général où α est quelconque, les trois intégrales

$$\int_{x_0}^{\infty} \{f(x) - Li x\} x^{-\frac{3}{2}} dx, \quad \int_{x_0}^{\infty} \{Li x - f(x)\} x^{-\frac{3}{2}} dx,$$

$$\int_{x_0}^{\infty} |f(x) - Li x| x^{-\frac{3}{2}} dx$$

divergent sûrement, ce qui démontre que la différence

$$f(x) - Li\,x$$

change nécessairement de signe une infinité de fois au-dessus de toute limite finie.

Le résultat de M. VON KOCH démontre, si on admet le théorème que les zéros imaginaires de $\zeta(s)$ ont leurs parties réelles égales à $\frac{1}{2}$, que les trois intégrales

$$\int_{x_0}^{\infty} \{f(x) - Li\,x\} x^{-\frac{1}{2}} (\log x)^{-2} dx, \quad \int_{x_0}^{\infty} \{Li\,x - f(x)\} x^{-\frac{1}{2}} (\log x)^{-2} dx,$$

$$\int_{x_0}^{\infty} |f(x) - Li\,x| (\log x)^{-2} dx$$

convergent.

Il est d'ailleurs assez vraisemblable que même les trois intégrales suivantes

$$(8) \int_{x_0}^{\infty} \{f(x) - Li\,x\} x^{-\frac{1}{2}} (\log x)^{-1} dx, \quad \int_{x_0}^{\infty} \{Li\,x - f(x)\} x^{-\frac{1}{2}} (\log x)^{-1} dx,$$

$$\int_{x_0}^{\infty} |f(x) - Li\,x| x^{-\frac{1}{2}} (\log x)^{-1} dx$$

convergent.

En effet, tout ce qu'on sait jusqu'ici sur la distribution des nombres premiers nous porte à croire que, si $F(x)$ désigne le nombre des nombres premiers inférieurs à x , l'inégalité

$$F(x) < Li\,x,$$

est toujours vérifiée. Du moins on ne connaît jusqu'ici aucun résultat qui soit en désaccord avec cette hypothèse.¹⁾

¹⁾ Voici en effet en abrégé les chiffres principaux connus jusqu'ici (les valeurs de $F(x)$ sont ceux qu'a indiqués M. GRAM: *Rapport sur quelques calculs entrepris par M. Bertelsen*, Acta math. t. 17).

x en millions	$F(x)$	$Li\,x$	$Li\,x - F(x)$
1	78 498	78 627.5	129.5
2	148 933	149 054.8	121.8
3	216 816	216 970.6	154.6

Admettons donc qu'on ait, si non précisément

$$\{F(x) - Li\,x\} = 0,$$

du moins

$$\{F(x) - Li\,x\} < K \cdot x^{\frac{1}{2}} (\log x)^{-1}$$

K étant une constante.

Comme on a de fait

$$0 < f(x) - F(x) < K_1 \cdot x^{\frac{1}{2}} (\log x)^{-1},$$

K_1 désignant une autre constante, on conclut immédiatement ¹⁾

$$\{f(x) - Li\,x\} < (K + K_1) x^{\frac{1}{2}} (\log x)^{-1},$$

ce qui entraîne la convergence de la première des intégrales (8), et par conséquent, en vertu de notre théorème, celle de toutes ces intégrales.

Nous pouvons résumer ce raisonnement en disant que le théorème hypothétique

$$F(x) < Li\,x$$

ou même

$$F(x) < Li\,x + Kx^{\frac{1}{2}} (\log x)^{-1},$$

dont on peut déduire le théorème sur les racines de $\zeta(s)$, paraît avoir une portée plus vaste que celui-ci, puisqu'il permet de conclure à la convergence de l'intégrale

x en millions	$F(x)$	$Li\,x$	$Li\,x - F(x)$
4	283 146	283 352.8	206.8
5	348 513	348 638.1	125.1
6	412 849	413 076.5	227.5
7	476 648	476 826.8	178.8
8	539 777	539 999.7	222.7
9	602 489	602 676.2	187.2
10	664 579	664 918.4	339.4
20	1 270 607	1 270 905.0	298.0
90	5 216 954	5 217 810.2	856.2
100	5 761 455	5 762 209.4	754.4
1000	50 847 748	50 849 235.0	1 757.0

(pour plus de détails voir GLAISHER, dans la préface de la 6^e million de son énumération des nombres premiers).

¹⁾ C'est une conséquence de l'inégalité $\{A + B\} \leq \{A\} + B$, qui subsiste quand B est positif ou nul.

$$\int_{x_0}^{\infty} |f(x) - Li\,x| \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot (\log x)^{-1} dx,$$

tandisque, de ce dernier théorème, on n'a réussi à déduire que celle de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} |f(x) - Li\,x| \cdot x^{-\frac{1}{2}} (\log x)^{-2} dx.$$

Comme dernière application de notre théorème, nous voulons donner la démonstration rigoureuse d'un autre fait bien connu de la théorie des nombres premiers, qui n'a pas jusqu'ici, autant que je sais, été démontré d'une manière satisfaisante.

M. GRAM compare la fonction $F(x)$ avec la fonction $P(x)$ définie par

$$P(x) = \frac{\log x}{1 \cdot 1 \cdot s_2} + \frac{(\log x)^2}{2 \cdot 2 \cdot s_3} + \frac{(\log x)^3}{3 \cdot 3 \cdot s_4} + \dots \quad \left(s_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^i} \right)$$

fonction qui est telle que

$$P(x) + \frac{1}{2} P(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3} P(x^{\frac{1}{3}}) + \dots = Li\,x - C \log \log x.$$

On voit qu'en négligeant seulement des quantités devenant infinies avec x comme $x^{\frac{1}{2}}$, on peut mettre

$$P(x) = Li\,x - \frac{1}{2} Li\,x^{\frac{1}{2}}$$

et de même

$$F(x) = f(x) - \frac{1}{2} f(x^{\frac{1}{2}}).$$

On a donc, en négligeant une fonction régulière pour $R(s) > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{\infty} (F(x) - P(x)) x^{-s-1} dx = \\ &= \int_{x_0}^{\infty} (f(x) - Li\,x) x^{-s-1} dx - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{\infty} (f(x^{\frac{1}{2}}) - Li\,x^{\frac{1}{2}}) x^{-s-1} dx \\ &= \int_{x_0}^{\infty} (f(x) - Li\,x) x^{-s-1} dx - \int_{x_0^{\frac{1}{2}}}^{\infty} (f(y) - Li\,y) \cdot y^{-2s-1} \cdot dy \\ &= \frac{\log[(s-1)\zeta(s)]}{s} - \frac{\log[(2s-1)\zeta(2s)]}{2s}. \end{aligned}$$

Il suit donc de notre théorème que les trois intégrales

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{\infty} \{F(x) - P(x)\} x^{-\beta-1} (\log x)^{-k} dx, \\ & \int_{x_0}^{\infty} \{P(x) - F(x)\} x^{-\beta-1} (\log x)^{-k} dx, \\ & \int_{x_0}^{\infty} |F(x) - P(x)| x^{-\beta-1} (\log x)^{-k} dx \end{aligned}$$

convergent ou divergent ensemble; d'ailleurs la dernière diverge pour $\beta = \frac{1}{2}$, $k = 0$. (Si non, la fonction $\log [(s-1)\zeta(s)]$ resterait finie pour $R(s) \geq \frac{1}{2}$).

Il s'ensuit que la différence $F(x) - P(x)$ change de signe une infinité de fois au dessus de toute limite fixée.

Avec plus de précision, on peut dire que, au dessus de toute limite fixée pour x , l'expression

$$\frac{(\log x)^2}{x^{\frac{1}{2}}} (F(x) - P(x)),$$

prend des valeurs, tant positives que négatives, supérieures en valeur absolue à toute quantité donnée.

Sur la méthode de prolongement analytique de M. Mittag-Leffler.

Par IVAR FREDHOLM.

(Communiqué le 13 Mars 1901 par G. MITTAG-LEFFLER.)

Dans ses recherches remarquables sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène M. MITTAG-LEFFLER s'est servi comme fonction génératrice — suivant la terminologie de M. MITTAG-LEFFLER — d'une fonction réalisant la représentation conforme d'un cercle sur une figure dite cordiforme, laquelle est limitée par des arcs de spirale logarithmique.

Cette fonction, tout en présentant dans certaines égards des avantages sur toutes les autres fonctions génératrices, donne lieu à des développements très-compiqués.

Pour cette raison je crois qu'il n'est pas sans intérêt de savoir qu'il existe une fonction génératrice donnant lieu à des développements très simples.

En effet cette fonction n'est que le logarithme; je pose ¹⁾

$$f(u | \alpha) = \frac{\log(1 - \beta u)}{\log(1 - \beta)}$$

où

$$\alpha = 1 - \beta$$

et β une quantité réelle remplissant les conditions.

$$0 \leq \beta < 1$$

¹⁾ voir Acta mathematica t. 24 p. 219.

Pour voir quelle est la représentation conforme réalisée par cette fonction faisons décrire à u la circonférence $|u| = 1$. Alors on a, en posant

$$u = e^{i\varphi},$$

$$s + ti = f(u | \alpha), \quad \log(1 - \beta) = -H$$

$$e^{-Hs} \cos Ht = 1 - \beta \cos \varphi$$

$$e^{-Hs} \sin Ht = -\beta \sin \varphi$$

d'où l'on obtient en éliminant φ l'équation de la courbe cherchée

$$2 \cos Ht = (1 - \beta^2) e^{Hs} + e^{-Hs}.$$

Changeant pour simplifier les coordonnées en posant

$$Ht = y$$

$$Hs = x - \frac{1}{2} \log(1 - \beta^2),$$

on trouve

$$\cos y = \sqrt{1 - \beta^2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ou

$$\cos y = \sqrt{1 - \beta^2} \cos hx.$$

On voit que cette courbe approche indéfiniment d'une ligne droite quand β approche de l'unité. Soit $F(z)$ une fonction holomorphe au point $z = a$ et écrivons son développement en série de TAYLOR sous la forme symbolique

$$F(z) = e^{(z-a)} \frac{d}{da} F(a).$$

Posons dans cette formule

$$z - a = (x - a)f(u | \alpha) = -(x - a) \frac{\log(1 - \beta u)}{H}$$

et développons suivant les puissances de u nous aurons

$$\begin{aligned} F(z) &= e^{-(x-a)} \frac{\log(1 - \beta u)}{H} \frac{d}{da} F(a) \\ &= (1 - \beta u)^{-\frac{x-a}{H}} \frac{d}{da} F(a). \end{aligned}$$

Pour $u = 1$ on a $z = x$ de sorte que l'on peut écrire

$$F(z) = (1 - \beta)^{-\frac{z-a}{H} \frac{d}{da}} F(a) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{[n]} \cdot \frac{z-a}{H} \frac{d}{da} \left(\frac{z-a}{H} \frac{d}{da} + 1 \right) \dots \left(\frac{z-a}{H} \frac{d}{da} + n - 1 \right) F(a)$$

ou encore si nous posons

$$\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + n - 1) = \lambda^n + C_1^n \lambda^{n-1} + \dots + C_{n-1}^n \lambda$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{[n]} \left[\left(\frac{z-a}{H} \right)^n F^{(n)}(a) + C_1^n \left(\frac{z-a}{H} \right)^{n-1} F^{(n-1)}(a) + \dots \right. \\ \left. + C_{n-1}^n \frac{z-a}{H} F^{(1)}(a) \right].$$

Le domaine de convergence se détermine d'une manière bien connue par les travaux de M. MITTAG-LEFFLER et ce domaine approche indéfiniment de l'étoile principale de M. MITTAG-LEFFLER quand α approche de la valeur 0.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 188.)

Krakau. *Académie des sciences.*

Bulletin international. 1900: 11. 8:o.

Kristiania. *Universitets-Bibliotheket.*

Norsk Bogfortegnelse for 1897. 8:o.

Leipzig. *K. Sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften.*

Berichte. Math.-phys. Cl. Bd 52 (1900): 7. 8:o.

» Philol.-hist. Cl. Bd 52 (1900): 9. 8:o.

London. *Brit. Association for the advancement of science.*

Report. Meeting 70 (1900). 8:o.

— *R. Astronomical society.*

Monthly notices. Vol. 61 (1901): N:o 3. 8:o.

— *Chemical Society.*

Journal. Vols. 79—80 (1901): 3. 8:o.

Proceedings. Vol. 17 (1901): N:o 232—233. 8:o.

— *R. Geographical society.*

HERBERTSON, A. J., The distribution of rainfall over the land. 1901. 8:o.

PEAKE, R. E., On the results of a deep-sea sounding expedition in the N. Atlantic during the summer of 1899. 1901. 8:o.

— *Geological society.*

The quarterly journal. Vol. 57 (1901): P. 1. 8:o.

— *Meteorological society.*

Quarterly journal. Vol. 26 (1900): N:o 1, 4. 8:o.

— *R. Microscopical Society.*

Journal. 1901: P. 1. 8:o.

— *Royal society.*

Proceedings. Vol. 68 (1900/1901): N:o 442. 8:o.

— *Zoological society.*

Transactions. Vol. 16: P. 1. 1901. 4:o.

London, Ont. *Entomological society of Ontario.*

The Canadian entomologist. Vol. 33 (1901): N:o 2. 8:o.

Manila. *Observatorio.*

Boletín mensual. Año 1898: Trim. 2—3. Fol.

Melbourne. *Geological Society of Australasia.*

Notes. 1900. 8:o.

México. *Observatoire météorologique central.*

Boletín de agricultura, minería é industrias. Año 9 (1900): Núm. 11—12. 8:o.

Milano. *Società Italiana di scienze naturali.*

Atti. Vol. 39: Fasc. 3—4. 1901. 8:o.

Montevideo. *Museo Nacional.*

Anales. T. 2: Fasc. 17—18. 1900—1901. 8:o.

Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*

Rendiconto. (3) Vol. 7 (1901): Fasc. 1. 8:o.

(Forts. à sid. 223.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1901. N:o 3.
Stockholm.

Meddelande från Upsala Univ. Fysiska Institution.

Über die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees.

VON MARTIN JANSSON.

(Mitgeteilt am 13 März 1901 durch K. ÅNGSTRÖM.)

Die Untersuchung über die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees, über die hier Bericht erstattet wird, bildet einen Teil einer Untersuchung, auf die ich noch zurückzukommen hoffe, nämlich einer solchen über die Wärmeleitungsfähigkeit pulverförmiger Körper. Die Untersuchung, die ich auf eine Aufforderung des Herrn Professor K. ÅNGSTRÖM vornahm, wurde im Physikalischen Institut zu Upsala ausgeführt.

1. Die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees haben zuvor untersucht F. NEUMANN, ANDREWS, HJELTSTRÖM und ABELS. NEUMANN¹⁾ bestimmte mit seiner Methode nicht direkt die Wärmeleitungsfähigkeit, sondern eine Grösse, die die spezifische Wärme und Dichtigkeit zugleich enthält. ANDREWS²⁾ verglich die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees mit der des Eises und fand, dass Eis etwa 122 % besser die Wärme leitet. Der erste, der für die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees einen Wert in absolutem Masse angab, war HJELTSTRÖM.³⁾ Er beobachtete den Temperaturverlauf bei einer Schneedecke im Freien, deren

¹⁾ F. NEUMANN, Expériences sur la conductibilité calorifique des solides. Ann. Chim. Phys. 1862. III, 66.

²⁾ ANDREWS, Observations on pure ice and snow. Proc. Roy. Soc. 1886 XL, 544—549.

³⁾ HJELTSTRÖM, Sur la conductibilité de la neige. Öfversigt af K. V. Akad. Handl. 1889, N:o 10, p. 668, Stockholm.

Oberfläche durch die Sonnenstrahlung periodisch erwärmt wurde. Nach einer von A. J. ÅNGSTRÖM¹⁾ angegebenen Methode berechnete er bei bekannter mittlerer Dichtigkeit der Schneedecke die Wärmeleitungsfähigkeit, wobei er annahm, dass die spezifische Wärme für Schnee und Eis dieselbe sei. HJELTSTRÖM vermutete indessen, dass die Wärmeleitungsfähigkeit mit der Dichtigkeit und anderen physikalischen Eigenschaften des Schnees, seiner Kristallisation, Härte, Temperatur u. s. w. variierte. Einen ähnlichen Sachverhalt nahm gleichzeitig mit ihm an WOIWKOW in seiner Arbeit »Der Einfluss einer Schneedecke auf Boden, Klima und Wetter«. ²⁾ Eine umfassende Untersuchung über die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees als Funktion der Dichtigkeit ist später von H. ABELS³⁾ ausgeführt worden. Seine Methode stimmt mit der HJELTSTRÖM's überein, und bei der Berechnung macht er dieselbe Annahme bezüglich der spezifischen Wärme des Schnees, indem er die Wärmekapazität der im Schnee eingeschlossenen Luft vernachlässigen zu dürfen meint. Er stellte sorgfältige Messungen des spezifischen Gewichts der Schneeschicht an, die er untersuchte, ohne jedoch das spezifische Gewicht für die Schneemassen bestimmen zu können, die die zu den Temperaturbestimmungen angewandten Thermometer zunächst umgaben. Dies wäre von um so grösserem Gewicht gewesen, als sich der Schnee beim Einsenken der Thermometer immer etwas zusammenschob.

Die eben erwähnten Bestimmungen der Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees gründen sich also auf Temperaturbeobachtungen im Freien, und es dürfte daher von Interesse sein, mit einer Methode zu arbeiten, die es erlaubt, die Untersuchung in einem Laboratorium zu führen, wo die Versuchsbedingungen leichter variiert werden können, und die zugleich die Wärmeleitungs-

¹⁾ ÅNGSTRÖM, Mémoire sur la température de la terre à différents profondeurs à Upsal, Acta Soc. Reg. sc. Ups. ser. III, Vol. I. 1867.

²⁾ Pencks Geographische Abhandlungen Bd. III, Heft. 3, Wien 1889.

³⁾ H. ABELS, Beobachtungen der täglichen Periode der Temperatur im Schnee und Bestimmung des Wärmeleitungsvermögens des Schnees als Function seiner Dichtigkeit, Rep. für Meteorologie Bd. XVI, N:o 1, St. Petersburg 1892.

fähigkeit ergibt, ohne dass man die Dichtigkeit und spezifische Wärme des Schnees zu kennen braucht.

2. Bei der Untersuchung über die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees, die ich im vergangenen Winter ausführte, benutzte ich die von CHRISTIANSEN ¹⁾ angegebene Methode. Bekanntlich sind die Werte, die man mittelst dieser Methode erhält, nur relative, indem sie sich auf die Wärmeleitungsfähigkeit eines Vergleichskörpers beziehen. Ist jedoch dessen Leitungsfähigkeit bekannt oder irgendwie bestimmbar, so erhält man auch mittelst dieser Methode absolute Werte.

3. Der Apparat, den ich anwandte und der für die Untersuchung der Wärmeleitungsfähigkeit pulverförmiger Körper im allgemeinen angefertigt worden war, stimmte in der Hauptsache mit CHRISTIANSEN's eigenem ²⁾ überein. Die drei runden und gleich grossen Kupferplatten *A*, *B* und *C* (s. Fig. 1 pag. 213) hatten einen Durchmesser von 11,95 cm und eine Dicke von 0,5 cm. Von der zylindrischen Seitenfläche aus waren in jede Platte zwei Löcher von 0,1 cm Durchmesser gebohrt, von denen das eine bis zur Mitte der Platte, das andere nur halb so weit ging. Diese Löcher dienten zur Anbringung von Thermoelementen, von denen also erforderlichen Falls zwei in jeder Platte angewandt werden konnten. Zwischen die Platten *A* und *B*, deren Abstand von einander durch drei gleich dicke Glasstücke von 0,01—0,02 cm² Durchschnittsfläche bestimmt war, wurde der Körper, der untersucht werden sollte, gelegt. Als Vergleichskörper diente eine plangeschliffene Glasplatte von ungefähr 13 cm Durchmesser und 0,314 cm Dicke. Sie war zwischen *A* und *B* mittelst Wachs und Kolophonium, das eine sehr dünne Schicht bildete, befestigt. An den Platten *A* und *C* waren zylindrische Gefässe aus Messing angelötet. Diese besaßen denselben Durchmesser wie die Kupferplatten, waren 3 cm hoch und mit Deckeln versehen, die durch Schrauben befestigt waren. Durch diese

¹⁾ C. CHRISTIANSEN, Einige Versuche über die Wärmeleitung, Wied. Ann. 1881. XIV, 23 ff.

²⁾ A. a. O. Taf. 1 Fig. 1.

Gefässe wurde die Flüssigkeit geleitet, die den Platten die gewünschte konstante Temperatur verleihen sollte. Um eine Zirkulation der Flüssigkeit in den Gefässen zu bewirken und dadurch die Herstellung einer konstanten Temperatur für die Platten noch zu befördern, befand sich in jedem Gefäss ein Umrührer in Gestalt eines Flügelrades aus dünnem Kupferblech, das durch die strömende Flüssigkeit selbst in Umdrehung versetzt wurde. Durch Fenster, die in die Deckel eingesetzt waren, konnte ich sehen, ob diese Umrührer funktionierten. Der ganze Apparat wurde durch drei Schrauben zusammengehalten.

4. Die Theorie für diesen Apparat ist aus CHRISTIANSEN's Arbeit ¹⁾ bekannt, auf die ich deshalb verweise. Wenn t_1 , t_2 und t_3 die Temperaturen für die drei Kupferplatten A , B und C sind, nachdem stationärer Wärmezustand eingetreten ist, so ist das Verhältnis zwischen der Wärmeleitungsfähigkeit des untersuchten Körpers (k_1) und des Vergleichskörpers (k_2) bestimmt durch die Formel:

$$(1) \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{e_1}{e_2} \cdot \frac{t_2 - t_3}{t_1 - t_2},$$

wobei e_1 und e_2 den Abstand zwischen den Platten A und B resp. B und C bedeuten.

Der Durchmesser des Apparats war gross im Verhältnis zur Dicke der Kupferplatten und der zwischen ihnen angebrachten schlechten Wärmeleiter. Die Temperaturen t_1 und t_3 wurden so gewählt, dass die Temperatur t_2 der Platte B sich wenig von der der Umgebung unterschied. Die Temperaturbestimmungen (t_1 , t_2 und t_3) bezogen sich auf die zentralen Teile der Kupferplatten. Dass die Temperatur in dem mittleren Teil jeder Platte, wenigstens im Bereich des halben Durchmessers, völlig konstant war, davon überzeugte ich mich durch eine besondere Untersuchung, in der ich gleichzeitig die Temperatur in den beiden oben erwähnten Löchern an der Seitenfläche der Platte mass. Unter diesen Verhältnissen gilt die Formel (1), vorausgesetzt

¹⁾ A. a. O.

jedoch, dass es mir gelungen ist, einen stationären Wärmezustand zu erhalten.

5. Die Untersuchung wurde in einem Raum ausgeführt, in dem die Temperatur während der Anstellung der Versuche unter 0° war. Die Platten *A* und *C* erhielten die gewünschte Temperatur dadurch, dass Wasser, in dem Kochsalz in hinreichender Menge gelöst war, mit ziemlich grosser Geschwindigkeit durch die an den Platten festgelöteten Gefässe strömte. Das Wasser für die Platte *A* kam aus einem Behälter, der ungefähr 60 Liter fasste. Die Temperatur desselben war immer sehr nahe der Umgebung und hielt sich daher hinreichend konstant. Die Platte *C*, die eine niedrigere Temperatur haben musste, wurde durch eine Salzlösung abgekühlt, die durch eine Turbine aus einem 5 Liter haltenden und von einer Kältemischung von Schnee und Kochsalz umgebenen Gefäss getrieben wurde. Die Turbine wurde durch ein Laufwerk und ein grösseres Gewicht in Bewegung erhalten. Durch Umwicklung des Gefässes und der Rohrleitung mit Filz und Baumwolle gelang es, auch der Platte *C* eine Temperatur zu geben, die während der Zeit für eine Beobachtungsreihe, d. h. 30 Minuten, sich konstant hielt.

6. Die in die Formel (1) eingehenden Temperaturunterschiede $t_1 - t_2$ und $t_2 - t_3$ wurden mit Hilfe von Thermoelementen gemessen. Diese bestanden aus Konstantan und Kupfer und mussten, um elektrischen Kontakt mit den Kupferplatten zu vermeiden, isoliert werden, was durch Umwicklung mit Seide und Firnissung geschah. Die Angaben der Thermoelemente wurden mittelst eines DESPREZ-D'ARSONVAL'schen Galvanometers auf gewöhnliche Weise, mit Spiegel, Fernrohr und Skala, beobachtet. Diese letztere besass Millimeterteilung, und der Abstand vom Spiegel betrug 2,5 Meter. Eine besondere Untersuchung erwies, dass die Ausschläge am Galvanometer proportional waren den Temperaturdifferenzen, wenn diese nicht grösser als die hier in Betracht kommenden waren. Wenn kein Extrawiderstand in die Leitung zum Galvanometer eingeführt war, so entsprach 1 mm Ausschlag durchschnittlich einer Temperaturdifferenz von

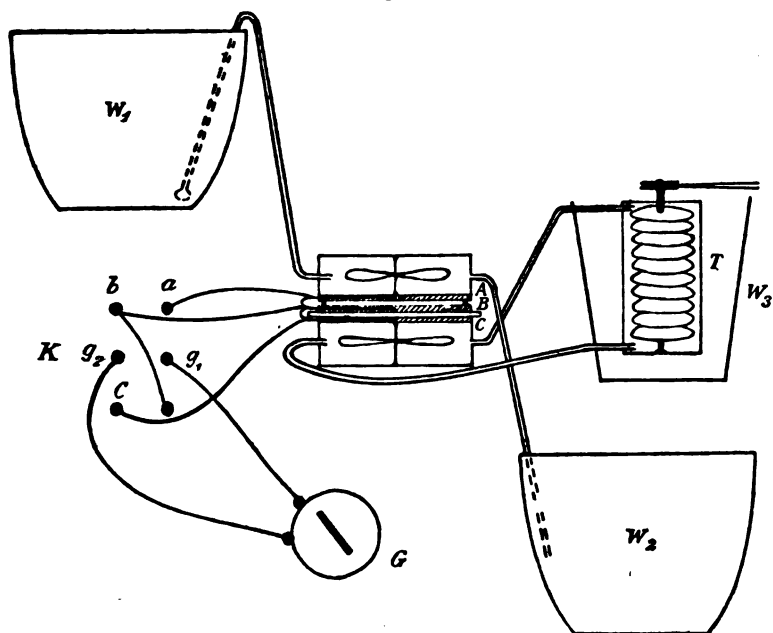
0°,012 Cels., einem Wert, der auf 0°,018 und 0°,024 stieg, wenn ein Widerstand von 2 resp. 4 Ohm eingeführt wurde. Ich führe das an, um einen Begriff von der Empfindlichkeit der Messungen zu geben. Die Werte der Ausschläge in Temperaturgrade umzusetzen, ist im übrigen nicht nötig, da ich an Stelle der Temperaturdifferenzen $t_1 - t_2$ und $t_2 - t_3$ in der Formel (1) bei der Berechnung der relativen Wärmeleitungsfähigkeit die entsprechenden Galvanometeraussschläge α_1 und α_3 benutzen kann.

7. Der Schnee, der untersucht werden sollte, wurde in grösseren Stücken von einem Platz im Freien geholt, wo derselbe rein und unberührt zu sein schien. Aus ihm eine gleichmässig dicke und homogene Schicht zum Einlegen in den Apparat zwischen die Platten A und B zu erhalten, erforderte Übung und Sorgfalt. Die Schicht wurde stets etwas dicker genommen als die Glasstücke, die den Abstand zwischen den Platten bestimmten. Der Schnee wurde so immer etwas wenn auch unbedeutend zusammengepresst, wenn der Apparat zusammengeschaubt wurde. Im allgemeinen betrug die Dicke (e_1) der Schneeschicht 0,314 cm; eine Ausnahme machen drei Bestimmungen (N:o 1, 8 und 13 in Tab. I), bei denen e_1 0,8 resp. 0,628 und 0,193 cm betrug. Der überflüssige Schnee wurde entfernt, so dass das Volumen der Schneeschicht gleich dem Zwischenraum zwischen den Platten war. Hierauf wurden die Thermoelemente in die für sie bestimmten Löcher eingesetzt. Nur ein Elementen wurde in jeder Platte angewendet, und zwar war es in das bis zur Mitte führende Loch eingesetzt. Zum Schutz gegen starke Wärmestrahlung wurde über den Apparat eine mit Stanniol belegte Pappkappe gesetzt.

8. Fig. 1 zeigt schematisch die Anordnung bei dem Experiment. Aus dem Behälter W_1 rann Flüssigkeit durch das Gefäss an der Platte A herunter in den Behälter W_2 . Die Turbine T trieb Flüssigkeit aus dem Behälter W_3 durch das an die Platte C festgelötete Gefäss und wieder zurück (zu W_3). Von den in die Platten A , B und C eingesetzten Thermoelementen gehen Leitungen zu den entsprechenden Kontakten

a , b und c am Kommutator K . Durch die Kontakte g_1 und g_2 steht der Kommutator in Verbindung mit dem Galvanometer G . Kommutator und Leitungsdrähte waren aus demselben Metall, Kupfer, und die Stromverbindungen waren durch Lötung hergestellt, ausser beim Galvanometer, das mit Klemmschrauben versehen war, und beim Kommutator, wo der Strom dadurch geschlossen wurde, dass ein breiter, messerförmiger Kontaktarm aus Kupfer zwischen zwei federnde Kupferplatten heruntergedrückt wurde.

Fig. 1.



Nach Eintritt stationären Wärmezustandes, was nach ungefähr 10 Minuten der Fall war, wurden zu bestimmten Zeiten Ausschlag und Nullpunkt des Galvanometers beobachtet. Letztere (α_0) wurde durch Verbindung der Kontakte g_1 und g_2 mit b erhalten. Setzte ich dann g_1 in Verbindung mit a , während g_2 mit b verbunden blieb, so erhielt ich den Ausschlag α_1 , der dem Temperaturunterschied $t_1 - t_2$ entsprach. Nachdem dann wieder

der Nullpunkt für das Galvanometer beobachtet worden war, wurde g_2 mit c verbunden, wodurch ich den $t_2 - t_3$ entsprechenden Ausschlag α_3 erhielt. Beide Ausschläge geschahen, wie leicht einzusehen, in derselben Richtung. Diese Beobachtungen wurden wiederholt, so lange das Strömen der Flüssigkeit andauerte. Das Laufwerk, das die Turbine trieb, ging nur 30 Minuten; beim Aufziehen desselben wurde der stationäre Wärmezustand gestört. Einigemal wurde eine neue Beobachtungsreihe aufgenommen, nachdem der Wärmezustand wieder stationär geworden war. Im allgemeinen aber begnügte ich mich mit der ersten Beobachtungsreihe, da zu befürchten war, dass das Volumen des Schnees infolge Verdunstung sich änderte. Zwischen den Galvanometerablesungen wurden die Zimmertemperatur (R) und die Temperaturen der Flüssigkeitsbäder T_1 und T_2 beobachtet. Als Beispiele mögen zwei Beobachtungsreihen angeführt werden, die erste für alten, die zweite für frischgefallenen Schnee geltend (Tab. I: N:o 25 und 2).

24 März 1900.

Zeit.	α_0	α_1	Zeit.	α_0	α_2	α_1/α_2	Temp.	
7t 41m	196.0	94.5	7t 40m	196.0	37.5	2.52	$T_1 = -4^\circ.0$	Schnee von älterer Lage.
45m	196.0	94.5	44m	196.0	37.0	2.55	$T_2 = -6^\circ.0$	Eiskörner ziemlich klein.
47m	195.7	93.8	46m	195.8	37.2	2.51	$T_3 = -6^\circ.8$	$e_1 = 0.814$ cm.
49m	195.7	92.5	48m	195.8	37.2	2.49	$R = -4^\circ.5$	Wahrscheinlicher Fehler im Mittel $\alpha_1/\alpha_2 =$ $= \pm 0,14 \%$
52m	195.0	92.0	51m	195.2	37.0	2.49		
54m	195.0	91.2	53m	195.0	37.0	2.47		
8t 3m	194.0	86.5	8t 4m	194.5	36.5	2.87		
6m	194.4	86.2	5m	194.3	35.9	2.40		
9m	194.0	85.0	8m	194.3	35.2	2.41		
11m	193.5	83.0	10m	194.0	33.7	2.46		
14m	192.0	81.0	13m	193.0	33.8	2.40		
17m	192.0	80.4	16m	192.0	33.5	2.40		

Mittel 2.456.

6 März 1900.

Zeit.	α_0	α_1	Zeit.	α_0	α_3	α_1/α_3	Temp.	Frischgefallener Schnee. Nur unbedeutend zusammengepresst. $e_1 = 0,814$ cm. Wahrscheinlicher Fehler im Mittel $\alpha_1/\alpha_3 = \pm 0,1\%$
5t 47m	223.0	254.5	5t 49m	223.2	21.8	11.67	$T_1 = -8^{\circ}.8$	
50m	223.2	254.6	51m	223.2	21.8	11.67	$T_2 = -7^{\circ}.0$	
52m	223.3	255.7	54m	223.3	21.7	11.78	$T_3 = -8^{\circ}.0$	
55m	223.2	256.3	57m	223.2	22.0	11.65	$R = -2^{\circ}.8$	
58m	223.2	256.8	6t 0m	223.2	22.0	11.67		
6t 7m	222.7	257.8	9m	222.9	22.1	11.68		

Mittel 11.69.

Die angegebenen Zeiten beziehen sich auf die Ablesungen der Ausschläge α_1 und α_3 . T_2 ist ein ungefährer Wert für die Temperatur der Platte B , aus T_1 und T_3 unter der Annahme berechnet, dass diese Temperaturen nicht sehr verschieden sind von den exakten t_1 und t_3 , so dass also $\alpha_1/\alpha_3 = \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_3}$. T_2 kennend, habe ich $\tau_1 = \frac{T_1 + T_2}{2}$ und $\tau_2 = \frac{T_2 + T_3}{2}$ berechnet, welches die approximativen Werte für die Mitteltemperatur der Schneeschicht und der Glasplatte sind (s. Tab. I).

9. Nach der Formel (1) ist die gesuchte Wärmeleitungsfähigkeit

$$k_1 = \frac{e_1}{e_2} \cdot \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot k_2.$$

Da aber die Glasplatte während des ganzen Versuchs unberührt und ihre Temperatur konstant blieb, so dass also k_2 und e_2 konstante Werte haben, so wird

$$k_1 = \text{Konst.} \times \frac{e_1 \alpha_3}{\alpha_1}.$$

Bei den verschiedenen Bestimmungen hat allerdings die Temperatur der Glasplatte (τ_2) geschwankt (s. Tab. I), ich habe aber geglaubt, die hierdurch verursachte unbedeutende Veränderung der Wärmeleitungsfähigkeit vernachlässigen zu dürfen. Unter solchen Verhältnissen sind die erhaltenen Werte für $\frac{e_1 \alpha_3}{\alpha_1}$, wie sie in Tab. I aufgeführt sind, relative Werte für die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees und genügen also, um zu zeigen, inwieweit diese mit der Dichtigkeit und anderen physi-

Tab. I.

N:o	Tag.	δ	$\epsilon_1 \alpha_3 / \alpha_1$	$10^5 \cdot k_{\text{obs.}}$	$10^5 \cdot k_{\text{ber.}}$	Diff.	τ_1	τ_2	
1	$10\frac{1}{2}$	0.047	0.026	20	14	+ 6	-5°.6	-10°.9	Schnee vom vorigem Tage.
2	$6\frac{1}{2}$	0.075	0.027	20	19	+ 1	-5°.2	- 7°.8	Frischgefallener Schnee.
3	$26\frac{1}{2}$	0.104	0.087	28	25	+ 3	-5°.4	-10°.5	Schnee von der letzten Nacht.
4	$10\frac{1}{2}$	0.121	0.081	23	28	- 5	-5°.5	-10°.3	Wie N:o 1, nur mehr gepresst.
5	$7\frac{1}{2}$	0.134	0.084	26	31	- 5	-4°.5	- 5°.9	Morgens gefallener Schnee.
6	$26\frac{1}{2}$	0.147	0.048	33	33	\pm 0	-4°.3	- 8°.4	Am selben Tag gefallener Schnee.
7	$28\frac{1}{2}$	0.148	0.088	29	33	- 4	-4°.5	- 7°.0	Wie N:o 3; Schnee vom 26. III.
Mittel		0.111		25.6	26.1	- 0.6			
8	$26\frac{1}{2}$	0.169	0.051	39	38	+ 1	-5°.4	-10°.5	Wie N:o 3 u. 7, nur mehr gepresst.
9	$3\frac{1}{2}$	0.177	0.050	38	39	- 1	-6°.8	- 8°.7	Schnee vom 1. II., noch wie frisch.
10	$23\frac{1}{2}$	0.180	0.056	43	40	+ 3	-3°.0	- 6°.1	Frischgefallener Schnee.
11	$27\frac{1}{2}$	0.181	0.057	43	40	+ 3	-5°.1	- 9°.4	Wie N:o 3, 7 u. 8, mehr gepresst.
12	$7\frac{1}{2}$	0.192	0.049	37	42	- 5	-2°.7	- 5°.1	Wie N:o 5, von 8 auf 3,14 mm zusammengepresst.
13	$13\frac{1}{2}$	0.189	0.057	43	44	- 1	-6°.6	-12°.9	Wie N:o 1 u. 4, mehr gepresst.
14	$26\frac{1}{2}$	0.208	0.060	45	46	- 1	-4°.0	- 7°.9	Wie N:o 6.
15	$20\frac{1}{2}$	0.210	0.066	50	46	+ 4	-5°.6	- 9°.8	Wie N:o 6 u. 14, nun 4 Tage alt.
16	$21\frac{1}{2}$	0.229	0.064	48	49	- 1	-5°.2	- 8°.4	Älterer Schnee, kleine Eiskörner.
Mittel		0.194		42.9	42.7	+ 0.2			
17	$17\frac{1}{2}$	0.271	0.069	52	60	- 8	-9°.3	-13°.1	Schnee vom 13. II., 5 Tage alt, gepresst.
18	$2\frac{1}{2}$	0.272	0.072	54	60	- 6	-2°.7	- 4°.6	Wie N:o 3, 7, 8 u. 11, mehr gepresst.
19	$20\frac{1}{2}$	0.277	0.073	55	61	- 6	-7°.4	-11°.3	Wie N:o 16.
20	$8\frac{1}{2}$	0.295	0.093	71	66	+ 5	-4°.2	- 7°.8	Wie N:o 9, auf das halbe Volumen zusammengepresst.
21	$20\frac{1}{2}$	0.298	0.092	70	66	+ 4	-5°.3	- 9°.6	Wie N:o 6, 14 u. 15.
22	$22\frac{1}{2}$	0.303	0.096	73	68	+ 5	-4°.8	- 8°.9	Wie N:o 16 u. 19.
23	$22\frac{1}{2}$	0.323	0.107	80	73	+ 7	-4°.2	- 8°.8	Wie N:o 16, 19, 22; von 5 auf 3,14 mm gepresst.
Mittel		0.291		65.0	64.9	+ 0.1			
24	$5\frac{1}{2}$	0.383	0.128	97	91	+ 6	-3°.8	- 7°.1	Vom Wind kräftig gepresster Schnee.
25	$24\frac{1}{2}$	0.398	0.128	97	96	+ 1	-5°.0	- 6°.4	Älterer Schnee aus einer 10 cm tief liegenden Schicht.
26	$24\frac{1}{2}$	0.404	0.121	92	97	- 5	-3°.1	- 4°.7	Wie N:o 25.
Mittel		0.395		95.3	94.6	+ 0.7			
27	$9\frac{1}{2}$	0.416	0.154	117	102	+ 15	-3°.0	- 5°.6	Älterer Schnee; grössere Eiskörner.
28	$22\frac{1}{2}$	0.439	0.157	119	111	+ 8	-3°.1	- 6°.1	Wie N:o 27.
29	$9\frac{1}{2}$	0.450	0.135	102	115	-13	-5°.6	- 6°.4	Wie N:o 24, sehr feinkörnig.
30	$23\frac{1}{2}$	0.454	0.165	125	116	+ 9	-2°.1	- 5°.0	Wie N:o 27 u. 28.
31	$23\frac{1}{2}$	0.457	0.162	123	118	+ 5	-2°.7	- 5°.3	Schnee von der gefrorenen Oberfläche, grobkörnig.
32	$2\frac{1}{2}$	0.461	0.134	102	120	-18	-2°.8	- 4°.5	Wie N:o 24 u. 29, mehr gepresst.
33	$8\frac{1}{2}$	0.470	0.154	117	124	- 7	-5°.0	- 8°.6	Wie N:o 24, 29 u. 32.
Mittel		0.450		115.0	115.1	- 0.1			

Mittel - 4°.6 - 8°.0.

kalischen Eigenschaften des Schnees variiert. Um die Wärmeleitfähigkeit in absolutem Mass zu erhalten, muss $\frac{k_2}{e_2}$ bestimmt werden. Am leichtesten geschah das so, dass zwischen die Platten *A* und *B* an Stelle des Schnees ein Körper von bekannter Wärmeleitfähigkeit gebracht wurde. Ich wählte hierzu Wasser. Den Wert für die Wärmeleitfähigkeit des Wassers, der den absoluten Werten von k_1 zu Grunde liegt, hat LEES ¹⁾ angegeben, der $k = 0.00147$ C. G. S. für eine Temperatur von 11° gefunden hat. LEES hat weiter gefunden, dass die Wärmeleitfähigkeit mit steigender Temperatur abnimmt, und dass zwischen 25° und 45° der Temperaturkoeffizient — 0.0055 ist. Zur Vergleichung führe ich die Resultate der wichtigsten früheren Untersuchungen über die Wärmeleitfähigkeit des Wassers an. Sie sind ausgeführt worden von

LUNDQVIST ²⁾ $k = 0.00155$ C. G. S. bei 40°,

WINKELMANN ³⁾ $k = 0.00154$ C. G. S. bei 14°,

H. F. WEBER ⁴⁾ $k = 0.00143$ C. G. S. bei 24°,

GRÄTZ ⁵⁾ $k = 0.00157$ C. G. S. bei 30° und

CHREE ⁶⁾ $k = 0.00124$ C. G. S. bei 18°.

Endlich noch eine Untersuchung von

MILNER und CHATLOCK ⁷⁾ $k = 0.001433$ C. G. S. bei 20°.

Das Wasser, das ich untersuchte, war destilliert und durch Kochen von Luft befreit. Die Dicke der Schicht war teils 0.077 cm, teils 0.314 cm. Als Mittelwert für $\frac{k_2}{e_2}$ wurde erhalten 5.161×0.00147 oder 0.00759 C. G. S., mit welcher Zahl die Werte von $\frac{e_1 \alpha_2}{\alpha_1}$ also multipliziert werden müssen. Tab. I ent-

¹⁾ LEES, Philos. Trans. of The Royal Soc. of London 191, Ser. A, 399—440 (1898).

²⁾ LUNDQVIST, Upsala Universitets Årsskrift pag. 1. 1869.

³⁾ WINKELMANN, Pogg. Ann., Bd. 153, pag. 481. 1874.

⁴⁾ H. F. WEBER, Wied. Ann., Bd. 10, pag. 103. 1880.

⁵⁾ GRÄTZ, Wied. Ann. 18, pag. 79, 1883; 25, pag. 337. 1885.

⁶⁾ CHREE, Phil. Mag. (5) 24, pag. 1. 1887.

⁷⁾ MILNER und CHATLOCK, Phil. Mag. 48, p. 46—64. 1899.

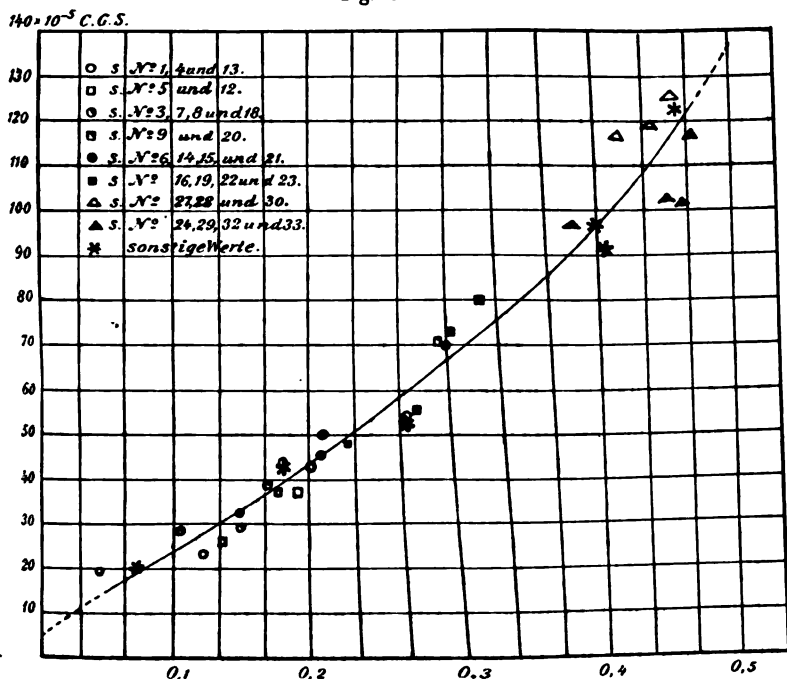
hält in der Kolumne $k_{\text{obs.}}$ die auf diese Weise erhaltenen Werte für die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees in absolutem Mass.

10. Die Dichtigkeit der Schneeschicht war leicht aus deren Volumen und Gewicht zu bestimmen. Das Volumen war bekannt, da der Abstand zwischen den Platten *A* und *B* bekannt war, und das Gewicht wurde durch Wägen bestimmt. Dies geschah unmittelbar, nachdem die Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit abgeschlossen war. Der Schnee wurde zu diesem Zweck in einem Glasgefäss gesammelt, das, um Verdunstung zu verhüten, bedeckt wurde. Die Gewichtsbestimmung konnte mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{10}$ mgr geschehn. Die Dichtigkeit (δ) der untersuchten Schneeschichten ist in Tab. I angegeben. Draussen im Freien hatte derselbe Schnee eine geringere Dichtigkeit wegen der Zusammenpressung des Schnees im Apparat, ganz abgesehen von den Versuchen, bei denen eine stärkere Zusammenpressung stattfand in der Absicht, den Einfluss hiervon auf die Wärmeleitungsfähigkeit kennen zu lernen. Um eine Vorstellung von der Grösse dieser Zusammenpressung zu bekommen, wurde bei einigen Gelegenheiten die Dichtigkeit des Schnees im Freien gemessen. Hierbei wurde ein Zylinder aus dünnem Eisenblech angewendet, dessen Durchmesser 5,7 cm und dessen Länge 19,6 cm betrug. Dieser wurde mit Schnee gefüllt, der dann geschmolzen wurde, und das Verhältniss zwischen den Volumen für Wasser und Schnee gab die Dichtigkeit an. Bei einer Lage von frisch-gefallenem Schnee erhielt ich als Mittelwert für die Dichtigkeit 0,109; die Dichtigkeit der von dort geholten Schneeproben schwankte zwischen 0.104—0.272 (vgl. N:o 3, 7, 8, 11 und 18 in Tab. I). Derselbe Schnee wurde später durch starken Wind zusammengedrängt und bildete Haufen von feinkörnigem Schnee, dessen mittlere Dichtigkeit 0.358 war (vgl. N:o 24, 29, 32 und 33 in Tab. I). Der grösste für die Dichtigkeit des Schnees im Freien erhaltene Wert war 0.384, der kleinste 0.066. RATZEL¹⁾ giebt als obere Grenze für die Dichtigkeit des Schnees 0.5 an (Schnee von einem Tyroler Berge).

¹⁾ Met. Zeitschr. Nov. 1899, S. 483.

11. Fig. 2 giebt eine graphische Darstellung der für die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees erhaltenen Werte als Funktion der Dichtigkeit oder Masse Schnee per Volumeinheit. Die Ordinatenachse repräsentiert die Wärmeleitungsfähigkeit in absolutem Mass und die Abscissenachse die Dichtigkeit. Um die

Fig. 2.



Abhängigkeit der Wärmeleitungsfähigkeit von der Dichtigkeit durch eine Gleichung darzustellen, habe ich

$$k = a + b \times \delta + c \times \delta^2 + d \times \delta^3 + e \times \delta^4 \quad (2)$$

gesetzt, wo k die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees, in C. G. S.-Einheiten ausgedrückt, ist, δ die Dichtigkeit und die übrigen Grössen willkürliche Konstanten. Betrachte ich den Schnee als eine Mischung von Luft und Eis, so muss ich die Wärmeleitungsfähigkeit der Luft $k = 0.00005$ ¹⁾ erhalten für $\delta = 0$ (Masse des

¹⁾ Die Wärmeleitung der Luft bei 0° ist im Mittel nach STEFAN, KUNDT-WARBURG, WINKELMANN, GRÄTZ, SCHLEIERMACHER 0.0000588 C. G. S.

Eises = 0) und die Wärmeleitungsfähigkeit des Eises $k = 0.00568$ ¹⁾ für einen Wert von $\delta = 0.9$,²⁾ der Dichtigkeit des Eises. Setze ich diese Werte für δ und k ein, so bestimmen sich mit Hilfe der in Tab. I erhaltenen fünf Mittelwerte die willkürlichen Konstanten so, dass aus der Gleichung (2) folgende wird:

$$k = 0.00005 + 0.0019 \times \delta + 0.006 \times \delta^4. \quad (3)$$

Dieser Formel entspricht die in Fig. 2 gezogene Kurve. Aus ihr werden die für k als berechnet angegebenen Werte in Tab. I erhalten. Diese Tabelle enthält auch die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werten und ferner einige Angaben betreffs des untersuchten Schnees. Die Beobachtungen sind in der Tabelle nach zunehmender Dichtigkeit geordnet. Auf vorhergehende Bestimmungen ist hingewiesen worden, so bald eine Untersuchung an Schnee von derselben Schneelage im Freien vorgenommen war. In Fig. 2 sind die in solchen Fällen erhaltenen Werte gleichartig bezeichnet.

12. Das Resultat dieser Untersuchung, wie es in Tab. I und Fig. 2 vorliegt, scheint zu beweisen, dass die Beobachtungen Differenzen zeigen, die nicht durch direkte Beobachtungsfehler erklärt werden können. Der wahrscheinliche Fehler in der Bestimmung von α_1/α_2 betrug in einem Fall 1.1 %, war aber im allgemeinen viel kleiner. Eine ebensolche Genauigkeit darf man wohl auch für die Dichtigkeitsbestimmungen annehmen, da nur solche Schneelagen, die homogen zu sein schienen, angewandt wurden. Der Fehler, den ich begehe, wenn ich die Wärmeleitungsfähigkeit der Glasplatte als konstant annehme, ist sehr gering. Die Glasplatte blieb, wie oben erwähnt, unverrückt, und der Temperaturwechsel war sehr gering. Die Temperatur der Schneelagen variierte sehr unbedeutend und kann daher nicht von merkbarem Einfluss sein.

Die Ursache für die Abweichungen muss in der eigenen Beschaffenheit des Schnees gesucht werden. Im frischgefallenen

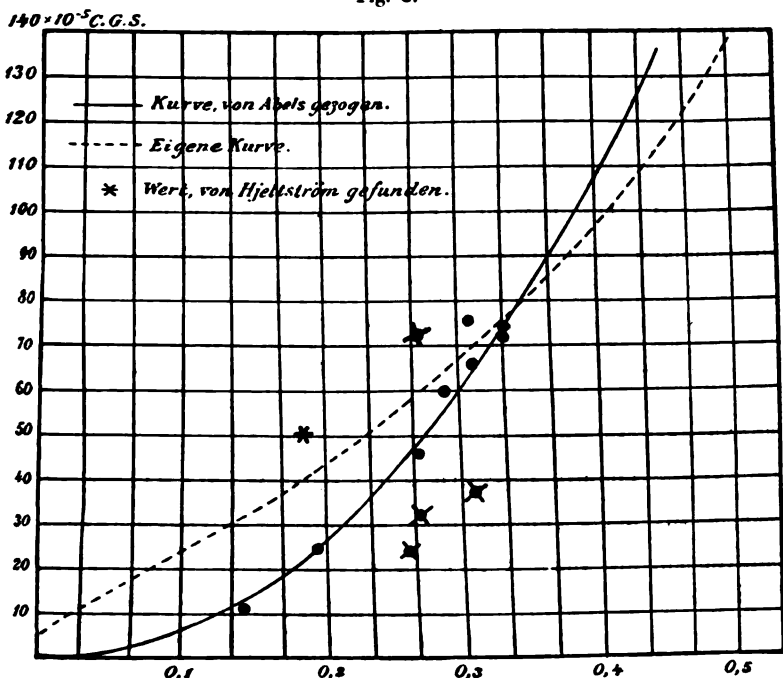
¹⁾ vgl. NEUMANN, A. a. O.

²⁾ Die Dichtigkeit des Eises ist nach BUNSEN 0.9167.

Schnee finden sich Eiskrystalle von vielen verschiedenen Formen¹⁾, und bei älterem Schnee wechselt die Grösse der Schneekörner sehr bedeutend. Es scheint auch, als ob die Wärmeleitungsfähigkeit kleiner ist bei feinkörnigem, kräftig zusammengepresstem Schnee, als bei älterem, grobkörnigem.

13. Eine Vergleichung des gewonnenen Resultats mit den von HJELTSTRÖM und ABELS gefundenen Werten für die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees giebt Fig. 3. HJELTSTRÖM's Wert,

Fig. 3.



$k = 0.000508 \text{ C. G. S.}$, der sich auf einen Dichtigkeitswert $= 0.183$ bezieht, zeigt eine Abweichung, die zweifellos ihren Grund in der Unsicherheit der Dichtigkeitsbestimmung hat.

ABELS' Werte, die alle zur Vergleichung in Fig. 3 angeführt werden (die durchstrichenen sind die Werte, die ABELS aus besonderen Gründen verwerfen zu müssen geglaubt hat), stimmen.

¹⁾ S. u. a. HELLMAN, Schneekrystalle, Berlin 1900.

gut mit den hier für Schnee von der Dichtigkeit 0.29—0.33 erhaltenen überein. Bei Schnee von geringerer Dichtigkeit, wofür nur drei Bestimmungen von ABELS vorhanden sind, zeigt sich eine bestimmte Abweichung, indem alle von mir gefundenen Werte höher sind. Die Formel, die nach ABELS die Veränderung der Wärmeleitungsfähigkeit mit der Dichtigkeit darstellt, ist:

$$k = 0.0068 \times \delta^2 \text{ C. G. S.}$$

Der Formel entspricht die in Fig. 3 gezogene Kurve. Wie die von mir gegebene Formel (3) ist diese unter der Annahme erhalten, dass bei einem Werte für $\delta = 0.9$, der Dichtigkeit des Eises, $k =$ der Wärmeleitungsfähigkeit des Eises wird. Während ich aber die Wärmeleitungsfähigkeit der Luft als untere Grenze annehme, geht ABELS ¹⁾ von der Annahme aus, dass die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees $= 0$ ist, da $\delta = 0$, d. h. Masse des Eises $= 0$. Die Formel (3), welche die von mir erhaltenen Beobachtungen treu darstellt, ergibt für $\delta = 0$ (Masse des Eises $= 0$) $k = 0.00005$ C. G. S., die Wärmeleitungsfähigkeit der Luft, und für $\delta = 0.9$ $k = 0.00570$ C. G. S.

14. Als Endresultat dieser Untersuchung ergibt sich, dass die Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees sich mit der Dichtigkeit ändert nach folgender Formel:

$$k = 0.00005 + 0.0019 \times \delta + 0.006 \times \delta^4 \text{ C. G. S.,}$$

jedoch so, dass Abweichungen von diesem mittleren Verhältnis stattfinden, die von der Art der Krystallisation und der Körnigkeit und möglicherweise noch von anderen physikalischen Eigenschaften des Schnees abhängen. Eine vollständige Untersuchung der Wärmeleitungsfähigkeit des Schnees erfordert daher Beobachtungen über das Aussehn der Schneekrystalle und Messungen über die Grösse der Eiskörner.

Schliesslich sei es mir gestattet, Herrn Professor K. ÅNGSTRÖM für seine mir bei dieser Arbeit durch Rat und That gewährte Unterstützung meinen wärmsten Dank auszusprechen.

¹⁾ A. a. O. pag. 30 ff.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 206.)

New York. Meteorological Observatory.

Annual tables 1899. 4:o.

Report. 1900. 4:o.

O'-Gyalla. K. Ung. meteorologisch-magnetische Central-Observatorium.

Beobachtungen. 1900: 1—12. 4:o.

Ottawa. Meteorological service.

Report. 1897. 4:o.

Paris. Bureau central météorologique de France.

Bulletin mensuel. Année 1900: N:o 1, 3—12. 4:o.

— *Comité international des poids et mesures.*

Procès-verbaux. 1900. 8:o.

— *Ministère des travaux publics, Division des mines.*

Annales des mines. (9) T. 17 (1900): Livr. 6; 18 (1900): 7, 10. 8:o.

— *Société astronomique de France.*

Bulletin. 1901: 3. 8:o.

— *Société de géographie.*

La Géographie. Année 1901: N:o 2. 8:o.

— *Société météorologique de France.*

Annuaire. Année 48 (1900): 4—12. 8:o.

— *Société géologique de France.*

Bulletin. (3) T. 17 (1889): N:o 8; 18 (1890): 5, 9; 19 (1891): 1, 3, 5—6, 8—11; 20 (1892): 7; 21 (1893): 5—6. 8:o.

Mémoires. (2) T. 10: 3; (3) T. 1—3. 1875—85. 4:o.

— *Société philomathique.*

Bulletin. (6) T. 12 (1877): 1; (7) T. 5 (1880/81): 1, 4; 6 (1881/82): 1, 3; 7 (1882/83): 2—4; 9 (1884/85): 1—2, 4; 11 (1886/87): 1—3; 12 (1887/88): 2, 4. 8:o.

Perth. Observatory.

Meteorological observations. Year 1899. Fol.

Pola. K. u. K. Hydrographisches Amt der K. u. k. Kriegs-Marine.

Meteorologische Termin-Beobachtungen... 1901: 1. Fol.

Riposto. Osservatorio meteorologico.

Bollettino mensile. Anno 29 (1900): Fasc. 1, 3, 5—12. 8:o.

Roma. R. Accademia dei Lincei.

Cl. di scienze morali...

Atti. (5) P. 2: Notizie degli Scavi, 1900: 10—11. 8:o.

Cl. di scienze fisiche...

Rendiconti (5) Vol. 10 (1901): Fasc. 3—4. 8:o.

St Petersburg. Physikalisches Centralobservatorium.

Ežem'sjačnyj meteorologičeskij bjulleten. 1900: N:o 1—12. 4:o.

— *Société Imp. Russe de géographie.*

Izvjestija. T. 36 (1900): 3—5. 8:o.

— *Université Impériale.*

Otschet. 1900. 8:o.

São Paulo. *Commissão Geographica e geologica.*

Dados climatologicos do anno de 1899. 8:o.

Hans Staden suas viagens e captiveiro entre os selvagens do Brasil.

São Paulo 1900. 8:o.

Tachkent. *Observatoire astronomique et physique.*

Publications. N:o 1—2: Texte & Atlas. 1899—1900. 4:o & Fol.

Tokyo. *Central meteorological observatory.*

Weather chart. 1900: 12. Fol.

Report on observations in terrestrial magnetism and atmospheric electricity. Year 1897. 8:o.

Washington. *Dep. of agriculture.*

Publications. 11 st. 1900—1901. 8:o.

— *Weather Bureau.*

Bulletin G. 1900. 4:o.

Monthly weather review. Vol. 28 (1900): 11. 4:o.

Wien. *K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*

Jahrbücher. Jahrg. 1898—1899. 4:o.

— *K. K. Geographische Gesellschaft.*

Mittheilungen. Bd 43 (1900): 1—12. 8:o.

— *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.*

Verhandlungen. Bd 51 (1901): H. 1. 8:o.

— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*

Verhandlungen. 1900: 17—18; 1901: 1. 8:o.

Af professor Chr. Aurivillius:

17 småskrifter.

Af professor A. G. Nathorst:

8 småskrifter.

Af f. d. kanslisekreteraren Simon Nordström.

Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. Jahrg. 1 (1890), 2 (1891). 4 (1893). Lpz. 8:o.

Af utgifvarne:

Le Devoir, directrice M^{me} V^{ve} GODIN. T. 25 (1901): 1—2. 8:o.

La Feuille des jeunes naturalistes, red. A. DOLLFUS. (4) Année 31 (1901): N:o 364—365. 8:o.

SYMON's monthly meteorological magazine. Vol. 35 (1900): 2—12. 8:o.

Botaniska notiser, utg. af O. NORDSTEDT, separater ur årg. 1901. 8:o.

Svensk kemisk tidskrift utg. af Å. G. EKSTRAND. Årg. 13 (1901): N:o 1—2. 8:o.

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen, hrsg. von A. SEIDEL. Jahrg. 5 (1900): H. 3. 8:o.

Af författarne:

CARLGREN, O., Ostafrikanische Actinien. Hamburg 1900. 8:o.

— 2 småskrifter.

ERIKSSON, J., La rouille des céréales. Paris 1900. 8:o.

— 2 småskrifter.

Af författarne:

- HOLST, N. O., Bidrag till kännedomen om Östersjöns och Bottniska vikens postglaciala geologi. Sthlm 1899. 8:o.
- MALM, A. H., Berättelse öfver Göteborgs och Bohus läns hafs-fisken under 1899—1900. Göteb. 1900. 8:o.
- NATHORST, A. G., Två somrar i norra Ishafvet. H. 8. Sthlm 1901. 8:o.
- Le loup polaire et le boeuf musqué dans le Grönland oriental. Paris 1901. 8:o.
- On the map of King Oscar fjord. Lond. 1901. 8:o.
- en småskrift. 8:o.
- NERMAN, G., Om Venerns hydrografi. Sthlm 1900. 4:o.
- NILSSON, A., Sydsvenska ljunghedar. Sthlm 1901. 8:o.
- NORDENSKIÖLD, A. E., Vätskeinnestlutningar i topas. Sthlm 1885. 8:o.
- RETZIUS, G., Ein neuer Fund von Schädeln aus dem Eisenzeitalter in Östergötland. Sthlm 1900. Fol.
- 7 separat ur Biologische Untersuchungen. N. F. Bd 9. Sthlm 1900. Fol.
- SVEDMARK, E., Klondikes guldfält. Sthlm 1900. 4:o.
- WALLENGREN, H., Studier öfver ciliata infusorier. 4. Lund 1900. 4:o.
- Zur Kenntniss des Neubildungs- und Resorptionsprocesses bei der Theilung der hypotrichen Infusorien. Jena 1901. 8:o.
- AGAMEMNONE, G., Nuovo tipo di sismometrografo. Roma 1900. 8:o.
- ARCHER DE LIMA, Pour la paix et pour l'humanité. Lisboa 1898. 8:o.
- ARCIDIACONO, S., Principali fenomeni eruttivi avvenuti in Sicilia nell'anno 1899. Modena 1900. 8:o.
- BINDO DE VECCHI, Sulla tubercolosi sperimentale delle capsule surrenali. Palermo 1900. 8:o.
- Sulla patogenesi dell'epatite suppurativa. Firenze 1899. 8:o.
- 2 småskrifter.
- COHN, PAULINE, Ferdinand Cohn, Blätter der Erinnerung zusammengestellt von seiner Gattin. Breslau 1901. 8:o.
- CZERMAK, P., Zur Structur und Form der Hagelkörner. Wien 1900. 8:o.
- Neue Beobachtungsmethode für Luftwirbelringe. Wien 1900. 8:o.
- DAVID, E. J., Le cuisinier-chimiste. San Francisco 1901. 8:o.
- FRITSCH, H., Die Elemente des Erdmagnetismus. Publ. 3. St. Petersburg. 1900. 8:o.
- HJELT, A., Det svenska tabellverkets uppkomst, organisation och tidigare verksamhet. Hfors 1900. 8:o.
- De första officiella relationerna om svenska tabellverket 1749—57. Hfors 1899. 8:o.
- KREUTZ, H., Untersuchungen über das System der Cometen 1843 I und 1882 II. Th. 3. Kiel 1901. 4:o.
- LAMBE, L. M., Catalogue of the recent marine sponges of Canada and Alasca. Ottawa 1900. 8:o.

Af författarne:

LOEWENTHAL, E., Die neue Lehre. Berl. 1901. 8:o.

MÜTTRICH, Ueber den Einfluss des Waldes auf die Lufttemperatur.
Lpz. 1900. 8:o.

SLABY, A., Abgestimmte und mehrfache Funkentelegraphie. Berl. 1901.
8:o.

VAUCHEZ, E., La terre. Évolution de la vie à sa surface, son
passé, son présent, son avenir. 5^e éd. Paris 1893. 8:o.



ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 58.

1901.

Nº 4.

Onsdagen den 10 April.

INNEHÅLL.

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 227.
DUSÉN, Zur Kenntnis der Gefäßpflanzen des südlichen Patagoniens	» 229.
Sekreterarens årsberättelse	» 265.
Skänker till Akademiens bibliotek	sidd. 228, 264, 290.

Tillkännagafs, att Enkefru Professorskan EMILIA RETZIUS, född WAHLBERG, som för fem år sedan till Akademien donerat en fond under namn af »Johan August Wahlbergs minnesfond» med ändamål att verka för främjande af naturhistorisk och geografisk forskning, genom ingifvet gåfvobref ytterligare donerat en fond af 3,000 kronor till utdelande för samma ändamål af en medalj i guld öfver samme man, Afrikaforskaren Ingeniören WAHLBERG.

Anmälades, att de föreskrifna inspektionsberättelserna för de under Akademien lydande särskilda institutioner blifvit i vederbörlig ordning afgifna.

Anmälades, att Adjunkten vid Ultuna Landtbruksinstitut P. E. ULLBERG, som af Akademien varit utsedd till Byzantinsk stipendiat för år 1900, afgifvit berättelse om den utländska resa, som han i denna egenskap utfört för studerande af kulturteknik i allmänhet och särskildt fältbyggnadslära m. m.

På tillstyrkan af komiterade antogos till införande i Akademiens skrifter följande inlemnade afhandlingar:

i Akademiens Handlingar: »Bidrag till en öfversigt af de inom Sverige iakttagna arterna af släktet Cyclops» af Professor W. LILLJEBORG;

i Bihanget till Handlingarne: »Some new Species of Snakes from Cameroons and South America» af Fil. Licentiaten GABR. ANDERSSON;

i Öfversigten: Den i innehållsförteckningen angifna afhandlingen af Ingeniören P. DUSÉN.

Genom anställda val kallade Akademien:

till inländska ledamöter: Universitetskansleren och f. d. Statsrådet GUSTAF FREDRIK GILLJAM, Professorn vid Kongl. Karolinska Institutet JOHN WILHELM BERG, Professorn vid Stockholms Högskola LARS EDVARD PHRAGMÉN samt Professorn och Föreståndaren för den växtfysiologiska afdelningen vid Kongl. Landtbruks Akademiens Experimentalfält JAKOB ERIKSSON; samt

till utländska ledamöter: Professorn i högre Geometri vid universitetet i Paris GASTON DARBOUX, Professorn i högre Matematik vid universitetet i Rom LUIGI CREMONA, och Vice Direktören för Pasteur'ska Institutet i Paris PIERRE PAUL ÉMILE ROUX.

Genom anställdt val utsågs Riksarkivarien ODHNER till Präses för det ingående akademiska året efter afgående Präses Professor RETZIUS, som nedlade presidiet.

Följande skänker anmälades:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Stookholm. *Statistiska centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. 1 häfte. 4:o.

— *Sveriges pomologiska förening.*

Årskrift. Årg. 1 (1900). 8:o.

— *Kongl. Kommerskollegium.*

Yrkesinspektionens verksamhet år 1899. 8:o.

— *Generalstab.*

Norrbottnens läns kartverk. 1 : 200,000. Bl. 84.

— *Kongl. Landtbruksstyrelsen.*

Meddelanden. 1901: N:o 2. 8:o.

— *Svenska trädgårdsföreningen.*

Tidskrift. N. F. 1901: N:o 3. 8:o.

Lund. *Astronomiska observatoriet.*

Meddelanden. N:o 13—18. 1900—1901. 8:o.

(Forts. å sid. 264.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1901. N:o 4.
Stockholm.

Zur Kenntniss der Gefässpflanzen des südlichen Patagoniens.

Von P. DUSÉN.

[Mitgetheilt am 13 März 1901 durch V. WITTRÖCK.]

Auf seiner Reise von Punta Arenas (an der Magellanstrasse) nach Ultima Esperanza und Sierra de los Baguales im südwestlichen Patagonien Ende 1896 und Anfang 1897 besuchte Dr. OTTO NORDENSKJÖLD eine grossartige Höhle, die kurz vorher unweit Eberhardt entdeckt worden war. In dieser Höhle fand er unter anderem ein Hautstück sowie auch andere Teile eines grossen, zu den Edentaten gehörenden Tieres, die sich als Reste des von AMEGHINO beschriebenen *Neomylodon Listai* herausstellten. Ausgrabungen der Ablagerungen dieser Höhle anzustellen, war ihm indessen nicht möglich.

Durch den Fund dieser Reste des *Neomylodon* wurde Herr Phil. Cand. ERLAND NORDENSKIÖLD veranlasst, sich nach der oben erwähnten Gegend zu begeben, um eine sorgfältige Untersuchung der Ablagerungen der genannten *Neomylodon*-Höhle zu bewerkstelligen. Ihn begleitete der Botaniker Dr. O. BORGE. Die Sammlung von Gefässpflanzen, die er auf die Reise zusammenbrachte, wurde von der botanischen Abteilung des Reichsmuseum zu Stockholm erworben. Herrn Professor Dr. V. B. WITTRÖCK verdanke ich den Auftrag, diese Sammlung zu bearbeiten und erlaube mir, ihm hierfür meinen tief gefühlten Dank auszusprechen.

Diese Sammlung, die hier unten näher besprochen wird, ist nicht besonders gross, weil Dr. BORGE seine Untersuchungen in erster Linie den Süsswasseralgen widmete, wozu noch kommt, dass die günstigste Jahreszeit für das Einsammeln von Gefässpflanzen schon vorüber war, als die Expedition ihre Untersuchungen beginnen konnte.

Am 11. Februar 1899 trafen die Reisenden in Punta Arenas ein. Am 19. Februar verliessen sie die Stadt und setzten ihre Reise über Kap Negro, Laguna Blanca, Mount Chico, Mayer und Eberhardt nach dem Cerro Neomyllodon fort, wo sie am 5. März eintrafen. Hier wurden nun an den folgenden Tagen botanische Untersuchungen der Umgegend gemacht. Am 10. März setzte Dr. BORGE seine Reise in nördlicher Richtung über Cerro Laura und Cerro Toro nach Sierra de los Baguales fort. Nachdem er hier die Bergabhänge oberhalb der Waldgrenze untersucht hatte, kehrte er fast denselben Weg nach Süden zurück und erreichte am 7. April Eberhardt. Nach mehreren Ausflügen in der Umgebung von Eberhardt bis zum 23. April kehrten die Reisenden mit dem Dampfer nach Punta Arenas zurück.

In Bezug auf die schon erwähnten Plätze und die hier unten angeführten Lokalitäten verweise ich auf die von Dr. O. NORDENSKJÖLD veröffentlichte Karte der Magellansländer.¹⁾ Die von Dr. BORGE angeführten Pflanzenlokalitäten sind zwar nicht alle in dieser Karte zu finden, und ich bemerke daher hier schon, dass die allermeisten derselben in dem Gebiete gelegen sind, das von den Breitengraden 50° 45' und 52° s. Br. und den Meridianen 72° und 73° w. L. Gr. begrenzt ist.

Die Sammlung ist, wie gesagt, nicht sehr gross und enthält fast ausschliesslich schon wohlbekannte Arten. Nur zwei sind für die Wissenschaft neu, nämlich der von Herrn Pastor O. HAGSTRÖM hier unten beschriebene und abgebildete *Potamogeton linguatus* und die von mir aufgestellte *Oxalis loricata*. Die Sammlung hat aber ihre grösste Bedeutung in pflanzengeo-

¹⁾ Geological Map of the Magellan Territories. (Svenska Expeditionen till Magellansländerna. Bd. I.)

graphischer Hinsicht, denn mehrere Arten, die vorher gegen Norden hin erst aus Nordpatagonien bekannt waren, sind nun auch für Südpatagonien nachgewiesen. Dies gilt besonders für folgende Arten: *Gunnera chilensis*, *Galium leucocarpum*, *Perezia linearis*, *Senecio chilensis*, *Mulinum spinosum*, *Daucus australis*, *Escallonia stricta*, *Ribes cucullatum*, *Myosilos oblongum* und *Myzodendron linearifolium*.

Den von Dr. BORGE angegebenen Pflanzenlokalitäten habe ich bei mehreren Arten meine eigenen Beobachtungen aus Nordpatagonien, und zwar im oberen Aysen-Thale und Lago Nahuelhuapi, hinzugefügt, jedoch nur in dem Falle, dass dieselben uns über die Verbreitung der betreffenden Arten irgendwie aufklären. Auch wird die geographische Verbreitung der hier unten aufgezählten Arten angegeben.

Verzeichnis der Arten.

Compositae.

Nardophyllum humile (HOOK fil.) A. GRAY.

Hab. Patagonia australis: Sierra de los Baguales (²⁵/3 1899).

Patagonia occidentalis: Lago Nahuelhuapi (¹⁶/7 1897).

Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: die Steppe Westpatagouiens; Südpatagonien; nördliches Feuerland.

In der Länge der Zweige und der Dichtigkeit der sekundären Zweige und deren Beblätterung variiert die Pflanze sehr. Auch die Dichtigkeit der wollenen Behaarung der Blätter schwankt. So zeigen die von O. NORDENSKJÖLD aus dem oberen Gallegos-Thale mitgebrachten Exemplare sehr kurze, nur 1,5 Cm lange, aber sehr dicht stehende und sehr dicht beblätterte sekundäre Zweige, deren Blätter kräftig wollig behaart sind. Die von O. BORGE sowie auch die von LECHLER im Magellangebiete gesammelten Exemplare haben gewöhnlich längere, etwa 4 Cm lange, und weniger dicht gestellte sekundäre Zweige, deren Blätter

nicht so dicht gestellt und weniger behaart sind als die der von NORDENSKJÖLD mitgebrachten Exemplare. Unter dem vorliegenden, von O. BORGE gesammelten Material finden sich Stauden, die bis 2,5 Dm lange, aufsteigende primäre Zweige besitzen, welche oben sehr dünn verzweigt, dünn beblättert und mit nur dünn wollig behaarten Blättern versehen sind. Die Exemplare aus der Umgegend des Nahuelhuapi-Sees besitzen nur ebensolche aufsteigende oder fast aufrechte Zweige mit dünn gestellten und dünn beblätterten sekundären Zweigen. Sonst stimmen diese Exemplare mit dem Typus überein.

Aster VahlII Hook. fil.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (¹⁸/₄ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle fluminis Aysen (²⁸/₁ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Lago Nahuelhuapi (¹⁷/₇ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Westpatagonien westlich von der Kordillera, von der Insel Chiloë bis nach der Magellanstrasse (nach GAY, Historia Fisica y Politica de Chile. Botánica. Vol. 4. pag. 27) und in der Steppe am östlichen Fuss der Kordillera durch ganz Patagonien; Südpatagonien; Feuerland.

Erigeron Myosotis PERS.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (⁶/₃ 1899).

Sierra de los Baguales (²⁵/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

Erigeron sordidus GILL.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (¹⁰/₃ 1899).

Tweedie (²⁷/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (¹/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Westpatagonien; Südpatagonien.

Chiliotrichum diffusum (FORST.).

Hab. Patagonia australis: Punta Arenas (¹⁵/₂ 1899).

Patagonia occidentalis: Sierra de los Baguales (²⁵/₃ 1899).

In valle fluminis Aysen (²³/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Südliches Chile; Westpatagonien; südliches Patagonien; Feuerland; Falkland-Inseln.

Baccharis patagonica HOOK. et ARN.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt ($\frac{6}{3}$ und $\frac{9}{4}$ 1899).
Cerro Toro ($\frac{18}{3}$ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

Gnaphalium spicatum LAM.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt ($\frac{10}{3}$ 1899).

Geogr. Verbreitung: Chile; die westpatagonische Steppe(?); Feuerland; Falkland-Inseln.

Cotula scariosa (CASS.) FRANCH.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt, in litore ($\frac{9}{4}$ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südliches Chile; das immergrüne Waldgebiet Westpatagoniens; Südpatagonien; Feuerland.

Senecio Danyaussii HOMBR. et JACQ.

Hab. Patagonia australis: Punta Arenas ($\frac{15}{3}$ 1899).

Eberhardt ($\frac{6}{3}$ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen ($\frac{17}{3}$ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: die Steppe von Westpatagonien; Südpatagonien; Feuerland.

Senecio miser HOOK. fil. var. **tehuelches** SPEG. form.

Hab. Patagonia australis: Sierra de los Baguales ($\frac{25}{3}$ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien.

Es liegt nur ein einziges Individuum vor, das von dem *S. miser* var. *tehuelches* so wenig abweicht, dass ich dasselbe nur für eine Form dieser Varietät halten kann. Der Blattlappen, bei dem Typus 2 an der Zahl, sind hier zuweilen 3 bis 4; die Zahl der Involucralblätter ist etwa 20, bei dem Typus 13; die Zahl der Blüten jedes Köpfchens steigt bis 50, bei dem Typus bis 30. Sonst sind keine Abweichungen zu entdecken.

Senecio chilensis LESS.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt ($\frac{6}{3}$ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen ($\frac{23}{3}$ 1899). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Südchile; Ostabhang der Kordillera von Südargentina; Ostabhang der Kordillera und die Steppe von Westpatagonien.

Die Art war bis jetzt aus Patagonien noch nicht bekannt. In dem oberen Aysen-Thale wurde sie erst in der Höhe von 800—1000 m über dem Meerespiegel gefunden. Sie hat eine ziemlich weite Verbreitung und erreicht im Süden fast die Magellanstrasse.

Senecio Smithii DC.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (⁴/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (¹⁷/₃ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

Nassauvia (Panargyrum) Darwinii (HOOK. et ARN.).

Hab. Patagonia australis: Laguna Blanca (²⁴/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

Nassauvia (Panargyrum) abbreviatum (HOOK. et ARN.).

Hab. Patagonia australis: Cerro Laura (¹⁶/₃ 1899).

Sierra de los Baguales (²⁵/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

Nassauvia revoluta GILL.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro, supra terminum silvae (¹⁹/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; nördliches Feuerland.

Nassauvia bryoides O. HOFFM.

Hab. Patagonia australis: inter Tweedie et Lago Sarmiento (²²/₃ 1899).

Die Art ist bis jetzt nur aus dieser Gegend bekannt, wo sie im Jahre 1897 von Dr. O. NORDENSKJÖLD entdeckt wurde.

Das vorliegende Material ist zwar steril, stimmt aber mit den von O. NORDENSKJÖLD gesammelten Exemplaren überein. Die Pflanze bildet ausserordentlich dichte, harte, niedrige, etwa 5 Dm weite Polster.

Nassauvia Nordenskjöldii O. HOFFM.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro, supra terminum silvae
(¹⁹/3 1899).

Die Art ist ausserhalb der erwähnten Gegend nur aus den
Gebirgen nördlich von dem Lago Fagnano im Feuerlande bekannt.

Nassauvia serpens GAUD.

Hab. Patagonia australis: Sierra de los Baguales (²⁵/3 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen
(²³/2 1897). Leg. P. DUSÉN. Det. O. HOFFMANN.

Geogr. Verbreitung: Ostabhang der patagonischen Kordillera;
Falkland-Inseln.

Nassauvia svaveolens WILLD.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro (¹⁹/3 1899).

Sierra de los Baguales (²⁵/3 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

Leuceria leontopodioides (O. KUNZE).

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro, supra terminum silvae
(¹⁹/3 1899).

Die Art ist bisjetzt nur aus dieser Gegend bekannt.

Perezia pilifera (DON) HOOK. et ARN.

Hab. Patagonia australis: Sierra de los Baguales (²⁵/3 1899).

Geogr. Verbreitung: die Kordillera des südlichen Chile; Süd-
patagonien; Feuerland.

Perezia linearis LESS.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (⁶/3 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen
(¹⁷/2 1897). Leg. P. DUSÉN.

Lago Nahuelhuapi (¹⁶/7 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: die Kordillera des südlichen Chile; die Steppe
am Ostabhang der Kordillera von Südargentina und von Westpatagonien.

Die Art ist im oberen Aysen-Thale nicht selten und wurde
sowohl in den hiesigen, im Waldgebiete der blattabwerfenden
Buchen zerstreuten kleinen Steppen sowie auch in der Höhe von
800—1000 m gefunden. Am Nahuelhuapi-See wurde sie eben-
falls in der Steppe nicht selten beobachtet. Sie besitzt eine weite
Verbreitung und erreicht im Süden fast die Magellanstrasse.

***Perezia recurvata* (VAHL) LAG.**

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (⁸/3 1899).

Sierra de los Baguales (²⁵/3 1899).

Geogr. Verbreitung: Ostabhang der südargentinischen Kordillera; Südpatagonien; Feuerland; Falkland-Inseln.

***Hypochoeris arenaria* GAUD.**

Hab. Patagonia australis: Cerro Dorothea (³/3 1899).

Eberhardt, in litore (⁷/3 1899).

Mayer, in terra arenosa (²/3 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland; ¹⁾ Falkland-Inseln.

***Taraxacum laevigatum* DC.**

Hab. Patagonia australis: Tweedie (²³/3 1899).

Inter Kark et Eberhardt (³¹/3 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland; Falkland-Inseln; Färöer.

***Sonchus asper* (L.) ALL.**

Hab. Patagonia australis: inter Eberhardt et Kark (²/4 1899).

Patagonia occidentalis: in valle fluminis Aysen. Leg.
P. DUSÉN.

Calyceraceae.

***Acicarpa rosulata* N. E. BROWN.**

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro, supra terminum silvae.
(¹⁹/3 1899).

Bisjetzt nur aus dieser Lokalität bekannt, wo die Art im Jahre 1897 von Dr. OTTO NORDENSKJÖLD entdeckt wurde.

Rubiaceae.

***Cruckshanksia glacialis* POEPP. et ENDL.**

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (¹⁴/4 1899).

Patagonia occidentalis: Lago Nahuelhuapi (¹⁶/7 1899).
Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: die chilenische Kordillera; die Steppe Westpatagoniens; Feuerland.

¹⁾ In meiner Schrift »Die Gefüßpflanzen der Magellansländer« (Svenska Expeditionen till Magellansländerna. Bd. III. N:o 5) wurde durch Versehen nicht erwähnt, dass die *H. arenaria* mehrmals im Norden und Osten der feuerländischen Steppe gefunden ist.

Galium leucocarpum DC.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro (¹⁸/3 1899).

Patagonia occidentalis: Lago Nahuelhuapi (¹⁶/7 1897).

Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: die Kordillera des südlichen Chile; die Steppe am Fuss der patagonischen Kordillera.

Die Art war bisjetzt aus Südpatagonien nicht bekannt. Sie besitzt eine weite Verbreitung und erreicht fast die Magellanstrasse.

Galium Aparine L.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (⁸/3 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (¹⁷/2 1897). Leg P. DUSÉN.

Es liegt nur ein einziges Exemplar vor, das aus mehreren zusammengewebten Individuen besteht. Die Früchte sind abgefallen, aber aufbewahrt. Nur zwei derselben sind mit hakenförmigen Stacheln bekleidet, die übrigen sind vollkommen kahl. Da das vegetative System der einzelnen Individuen in keiner Beziehung von dem des *Galium Aparine* L. verschieden ist, so muss das Exemplar ein, eventuel zwei Individuen des *Galium Aparine* L. enthalten; die übrigen gehören zu dessen Unterart *spurium* (L.).

A. GRISEBACH und R. A. PHILIPPI haben zwar die fragliche Pflanze als eine selbständige Art, *Galium pseudo-Aparine* GRIES., hingestellt. ¹⁾ Meiner Ansicht nach liegt hier nur das weit verbreitete *Galium Aparine* L. vor. Ich bin zu dieser Auffassung gelangt, nachdem ich meine aus Patagonien und dem Feuerlande mitgebrachten Exemplare mit sehr zahlreichen Stauden des *G. Aparine*, die in der Umgegend von Berg (Schweden) wuchsen, und mit zahlreichen in dem Reichsmuseum zu Stockholm aufbewahrten Exemplaren dieser Art verglichen habe.

Es lässt sich inzwischen nicht leugnen, dass sich die von GRISEBACH für *Galium pseudo-Aparine* angegebenen Charaktere, von den vorwärts gerichteten Randstacheln der Blätter abgesehen, nicht selten bei den aus Patagonien stammenden Individuen vorfinden. Die Pflanze variiert inzwischen und zwar folgendermassen. An

¹⁾ Vergl. PHILIPPI, R. A., Plantas nuevas chilenas. (Anales de la Universidad de Chile. Tom. 85. p. 735.

schattigen Plätzen sind die Blätter dünn mit deutlich hervortretenden Sekundärnerven, werden nach oben hin breiter, sind dabei fast keilförmig, ausserdem abgerundet und laufen in eine Stachelspitze aus. Die Bewaffnung ist verhältnismässig dünn und schwach. An der Rückenseite des Mittelnerves der Blätter kommen vereinzelte, rückwärts gebogene oder gar keine Stacheln vor. Die Oberseite der Blätter trägt vereinzelte, vorwärts gerichtete Stacheln. Die Randstacheln der Blätter sind rückwärts (nach GRISEBACH vorwärts) gerichtet. Die Knoten sind nicht oder nur wenig angeschwollen; behaarte Knoten habe ich nie gesehen.

An offenen, sonnigen Plätzen dagegen werden die Blätter dicker als die der beschatteten Pflanzen, sind ohne hervortretende Sekundärnerven, lineallanzettlich und stachelspitz. Die Bewaffnung wird ziemlich dicht und kräftiger als die der Schattenpflanze. Der Mittelnerv der Blätter trägt immer an seiner Rückenseite rückwärts gebogene Stacheln. Die Knoten sind nicht oder nur wenig angeschwollen und nie behaart.

Ich habe mich überzeugt, dass das *G. Aparine* in Schweden in derselben Weise variiert wie die patagonische und feuerländische Pflanze. Es ist mir auch unmöglich, ein einziges Merkmal zu entdecken, das die patagonische von GRISEBACH als *G. pseudo-Aparine* bezeichnete Pflanze von dem *G. Aparine* trennt.

Geogr. Verbreitung: die nördliche, gemässigte Zone; Westafrika (Kamerungebirge); Chile; Patagonien; Feuerland.

***Galium Aparine* L. **spurium* (L.).**

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (⁸/₃ 1899).

Die Verbreitung der Unterart ist mir nicht sicher bekannt.

Plantaginaceae.

***Plantago maritima* L.**

Hab. Patagonia australis: Punta Arenas (¹³/₂ 1899).

Eberhardt, in litore (¹/₃ 1899).

Inter Tweedie et Sierra de los Baguales (²⁶/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland; Nordamerika (Unalaschka, Kanada, Labrador); Nordsibirien; Skandinavien; Island; Färöer; mittleres Europa; Kap der guten Hoffnung.

***Plantago oxyphylla* SPEG.**

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro (¹⁸/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Patagonia australis.

Die Exemplare weichen dadurch von der Beschreibung der Art ab, dass die Blätter an der Oberseite mit vereinzelt, anliegenden Haaren versehen sind. Sonst ist die Übereinstimmung vollständig.

Scrophulariaceae.

***Euphrasia antarctica* BENTH.**

Hab. Patagonia australis: Punta Arenas (¹⁴/₂ 1899).

Cerro Laura (⁸/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: die Steppe von Westpatagonien; Südpatagonien; Feuerland.

***Calceolaria uniflora* LAM.**

Hab. Patagonia australis: Cerro Laura (⁴/₃ 1899).

Cerro Dorothea (¹⁶/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

***Calceolaria biflora* LAM.**

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (⁷/₃ 1899).

Mayer (²/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: Sierra de los Baguales (²⁵/₃ 1899).

In valle superiore fluminis Aysen (¹⁷/₇ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: die Steppe von Westpatagonien; Südpatagonien; Feuerland; wahrscheinlich auch in der Kordillera des südlichen Chile.

Labiatae.

***Scutellaria nummulariaefolia* HOOK. fil.**

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro (¹⁹/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

Nach der Mitteilung des Dr. O. NORDENSKJÖLD ist die Art in dem oberen Gallegos-Thal ebenso häufig wie im Osten des Feuerlandes, wo sie sich hier und da am Rande der ganzen Küste entlang reichlich findet.

***Satureia (Xenopoma) Darwinii* (BENTH.) BRIQUET.**

Hab. Patagonia australis: Sierra de los Baguales (²⁵/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

Verbenaceae.

Verbena tridens LAG.

Hab. Patagonia australis: Rio Baguales (¹⁷/₃ 1899).

Sierra de los Baguales (²⁵/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien.

Boraginaceae.

Amsinckia angustifolia LEHM.

Hab. Patagonia occidentalis: Cerro Laura (¹⁶/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: mittleres Chile; Westpatagonien in der Steppe am östlichen Fusse der Kordillera durch ganz Patagonien; südliches und östliches Patagonien; östliches Feuerland.

Myosotis albiflora BANKS et SOL.

Hab. Patagonia australis: Mayer (³/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

Hydrophyllaceae.

Phacelia circinata JACQ.

Hab. Patagonia australis: Mayer (²/₃ 1899).

Tweedie (²⁸/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (¹⁷/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Lago Nahuelhuapi (¹⁶/₇ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Peru; Bolivia; Chile; Argentina; die Steppe von Westpatagonien; Südpatagonien; Feuerland; Britisch Columbia; Kalifornien; Mexiko.

Polemoniaceae.

Collomia patagonica SPEG.

Hab. Patagonia australis: Mayer (²/₃ 1899).

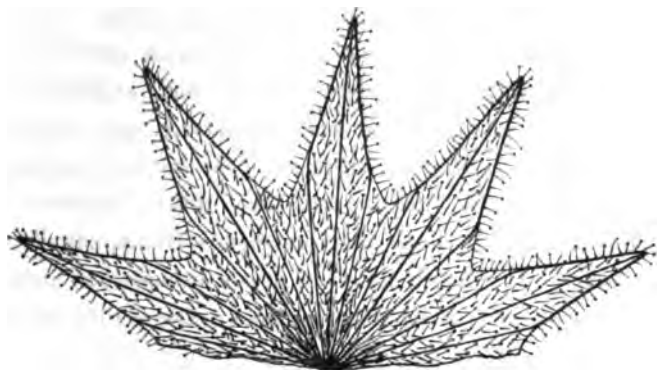
Eberhardt (¹⁰/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien.

SPEGAZZINI sagt in seiner Diagnose dieser Art: ¹⁾ »tota patentim hispido-glandulosa«, erwähnt jedoch in der hinzugefügten,

¹⁾ SPEGAZZINI, C., Plantae Patagoniae australis. (Revista de la Facultad de Agronomía y Veterinaria. Año III. La Plata. 1897. XXX y XXXI. p. 550.)

ausführlicheren Beschreibung der Art nur die Wurzelblätter als drusig behaart. Obschon sich hierdurch eine gewisse Unsicherheit über die Beschaffenheit der Behaarung dieser Pflanze geltend



a



b



c

Fig. a. Kelch, $\frac{5}{1}$. Fig. b. Längsteil der Blütenkrone, $\frac{8}{1}$. Fig. c. Teil eines Stengelblattes mit dem zurückgebogenen Rande, $\frac{64}{1}$.

macht, so hege ich kein Bedenken, das vorliegende Material zu dieser Art zu ziehen, da die anderen von SPEGAZZINI für dieser Art angegebenen Charaktere sich sämtlich bei den fraglichen Exemplaren fast vollständig wiederfinden.

Die vorliegende Exemplare haben eine Höhe von einigen Centimetern bis zu 2 Dm und sind gewöhnlich dicht verzweigt. Die Wurzelblätter sind schon verwelkt und abgefallen. Die Stengelblätter sind dicht und kurz steifhaarig, mit vorwärts gerichteten Haaren. Nur die obersten, dicht an den köpfchenartig zusammengedrängten Blüten stehenden Blätter besitzen auch, besonders am Rande, lange, hervorstehende Haare, zuweilen auch Drusenhaare. Der Kelch ist dicht drusig behaart und nicht ganz so tief geteilt wie SPEGAZZINI angiebt. Die Krone ist aussen fast bis an die Basis kurz behaart.

Die Kronenlappen sind breit zungenförmig, also nicht, wie SPEGAZZINI angiebt, triangulär.

Wie heraus hervorgeht, weicht die Pflanze etwas von der Beschreibung der *Collomia patagonica* SPEG. ab. Doch ist die Übereinstimmung im grossen und ganzen so vollständig, dass ich das vorliegende Material nicht für eine neue Art oder eine Varietät der *C. patagonica* SPEG. halten kann.

Plumbaginaceae.

Armeria chilensis BOISS. var. *magellanica* BOISS.

Hab. Patagonia australis: Punta Arenas (¹³/₂ 1899).

Patagonia occidentalis: inter Eberhardt et Rio Tres Pasos (¹¹/₃ 1899).

Eberhardt (¹⁴/₃ 1899).

In valle superiore fluminis Aysen (¹⁷/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Lago Nahuelhuapi (¹⁶/₇ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Westpatagonien in der Steppe am östlichen Fuss der Kordillera durch ganz Patagonien; Südpatagonien; Feuerland.

Die Art findet sich in dem mittleren Chile, in der Kordillera des südlichen Chile und im nördlichen und östlichen Patagonien.

Ericaceae.

Pernettya mucronata (LINN. fil.) GAUD.

Hab. Patagonia australis: Punta Arenas (¹⁵/₂ 1899).

Eberhardt (⁸/₃ 1899).

Moulet (²³/₄ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (²³/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Lago Nahuelhuapi (¹⁶/₇ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Südchile; ganz Westpatagonien, auch am Ostabhang der Kordillera; Südpatagonien; Feuerland.

Umbelliferae.

Azorella trifurcata (GAERTN.) HOOK.

Hab. Patagonia australis: Ultima Esperanza (²²/₄ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (¹³/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Westpatagonien in der Steppe am östlichen Fuss der Kordillera, wahrscheinlich durch ganz Patagonien; Südpatagonien; Feuerland.

Azorella caespitosa CAV.

Hab. Patagonia occidentalis: Eberhardt (⁷/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Chile (die Kordillera); Patagonien; Feuerland.

Azorella lycopodioides GAUD.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro, supra terminum silvae (¹⁹/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen c. 1300 metra supra mare (²³/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: die Kordillera des mittleren und südlichen Chile; die patagonische Kordillera; die Gebirge des Feuerlandes; südlicher Teil der feuerländischen Steppe (selten).

Bolax glebaria COMM.

Hab. Patagonia occidentalis: Cerro Laura (¹⁶/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: die Steppe des südwestlichen Patagoniens; Nordküste der Magellanstrasse; Feuerland; Falkland-Inseln.

Die Art ist in Dr. BORGE's Sammlungen nur durch Bruchstücke vorhanden, die mit *Empetrum rubrum* gefolgt waren.

Die Art variiert insofern, dass die Blätter mit mehr oder weniger dichten Sternhaaren bekleidet oder auch ganz kahl sein können.¹⁾ So sind die Exemplare, die ich selbst im Süden des Feuerlandes gesammelt habe, teils kahl, teils sternhaarig, was fast ausschliesslich von den jüngeren Blättern gilt. Die von Dr. O. NORDENSKJÖLD aus dem oberen Gallegos-Thale mitgebrachten Exemplare haben sämtlich ziemlich dicht sternhaarige Blätter.

Mulinum spinosum PERS.

Hab. Patagonia australis: inter Kark et Rio Tres Pasos (11/3 1899).

Patagonia occidentalis: in valle fluminis Aysen (13/2 1897.) Leg. P. DUSÉN.

Lago Nahuelhuapi (15/7 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Chile; die Steppe von Westpatagonien.

Die Art war aus Südpatagonien noch nicht bekannt, als Dr. O. NORDENSKJÖLD dieselbe im Jahre 1897 in dem Gallegos-Thale entdeckte. Sie erreicht also im Süden fast die Magellanstrasse.

In Nordpatagonien z. B. am Nahuelhuapi-See und am oberen Limay-Flusse ist die Art eine Charakterpflanze. Die etwa 2 Dm hohe, dicht verzweigte Pflanze, deren drei Blattlappen in harte Stackelspitzen enden, ähnelt einem kleinen, dichten, halbkugeligen Strauche.

Daucus australis POEPP.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (7/3 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (17/2 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Mittleres und südliches Chile; Steppe von Westpatagonien.

Im oberen Aysen-Thale fand sich die Art sowohl in der Steppe als auch an den Bergabhängen, wenigstens bis 800 M über dem Meeresspiegel. Die Art ist weit und im Süden fast bis nach der Magellanstrasse hin verbreitet.

¹⁾ Vergl. REICHE, C., Zur Kenntnis einiger chilenischen Umbelliferen-Gattungen. (ENGELER's Bot. Jahrb. Bd. 28. Heft. 1. S. 8.)

Apium graveolens L.

Hab. Patagonia australis: Cerro Laura (¹⁶/3 1899).

Patagonia occidentalis: Lago Nahuelhuapi (¹⁶/7 1897).

Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: mittleres und südliches Chile; Westpatagonien zu beiden Seiten der Kordillera; Südpatagonien; Feuerland.

Halorrhagidaceae.

Gunnera magellanica LAM.

Hab. Patagonia australis: Punta Arenas.

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (¹⁶/3 1897). Leg. P. DUSÉN.

Lago Nahuelhuapi (¹⁶/7 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: südliches Chile; Westpatagonien; Südpatagonien; Feuerland; Falkland-Inseln.

Gunnera chilensis LAM.

Hab. Patagonia australis: Ultima Esperanza (²¹/4 1899).

Patagonia occidentalis: In valle fluminis Aysen. Leg. P. DUSÉN.

Lago Nahuelhuapi. Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Westküste von Südamerika.

Die Art war bis jetzt aus dem Süden Patagoniens noch nicht bekannt. Sie erreicht fast die Magellanstrasse.

Onagraceae.

Epilobium glaucum PHIL. et HAUSKN.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (¹⁰/3 1899).

Geogr. Verbreitung: Chile; Westpatagonien.

Oenothera stricta LEDEB.

Hab. Patagonia australis: Kark (¹⁷/3 1899).

Tweedie (¹⁸/3 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (¹³/3 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Chile; Ostabhang d r Kordillera von Südargentina und von Westpatagonien.

Fuchsia magellanica LAM.

Hab. Patagonia australis: Cerro Neomylodon (⁶/₃ 1899).

Eberhardt. Leg. E. NORDENSKIÖLD.

Ultima Esperanza. (¹⁵/₄ 1899).

Geogr. Verbreitung: Westpatagonien (das immergrüne Waldgebiet); das Waldgebiet der Magellanländer.

Loasaceae.

Loasa volubilis JUSS.

Hab. Patagonia australis: Cerro Laura (¹⁶/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (¹⁷/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Lago Nahuelhuapi (¹⁶/₇ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Chile; Ostabhang der patagonischen Kordillera und die Steppe von Westpatagonien.

Violaceae.

Viola maculata CAV.

Hab. Patagonia australis: inter Eberhardt et Rio Tres Pasos (²/₃ 1899).

Cerro Dorothea (³/₃ 1899).

Eberhardt (⁸/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Ostabhang der patagonischen Kordillera; Südpatagonien; Feuerland; Falkland-Inseln.

Viola maculata CAV. var. **pubescens** REICHE.

Hab. Patagonia australis: inter Eberhardt et Rio Tres Pasos (²/₃ 1899).

Cerro Toro (¹⁹/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (¹⁷/₂ 1899). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Westpatagonien; Südpatagonien.

Rhamnaceae.

Discaria discolor (HOOK.).

Hab. Patagonia occidentalis: Eberhardt (¹⁹/₄ und ¹⁵/₄ 1899).

In valle fluminis Aysen (⁸/₁ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: die Kordillera des südlichen Chile; die Steppe von Westpatagonien; Südpatagonien; Feuerland.

Celastraceae.

Maytenus magellanica (LAM.) HOOK. fil.

Hab. Patagonia australis: Ultima Esperanza in litore (²¹/₄ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen
c. 700 m supra mare (²²/₂ 1890). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Westliches Argentina; Westpatagonien; Feuer-
land.

Empetraceae.

Empetrum rubrum VAHL.

Hab. Patagonia australis: Cerro Laura (¹⁶/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen
(²³/₂ 1899). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: südliches Chile; Westpatagonien; Südpatagonien; Feuerland; Falkland-Inseln.

Oxalidaceae.

Oxalis loricata DUSÉN n. sp.

Rhizoma durum, robustum, usque ad 12 mm crassum, superne pauciramosum, tota longitudine squamatum; squamae densissime imbricatae, fusco-brunneae, fere orbiculares, usque ad 4,5 mm longae et 4 mm latae, valde concavae, carnosae, glaberrimae, juniores saltem apicem versus subcarinatae, omnes minute apiculatae, supremae squamulis membranaceis, lanceolatis, glaberrimis, integerrimis, squamis carnosis sublongioribus vel plerumque subbrevioribus, late uninervosis intermixtae; folia radicalia, usque ad 12 apice rhizomatis fasciculatim egredientia, petiolis gracilibus, glaberrimis, usque ad 7 cm longis, apice rosulatum foliosis; foliola 8—12, conduplicata, emarginata, planefacta obcordata, usque ad 11 mm longa et 7 mm lata, utroque latere siccitate minutissime scrobiculata; pedicelli petiolis aequilongi glaberrimi, uniflori, circiter .15 mm infra florem bracteis binis breviter ovatis, subacutis, margine pilosis praediti; sepala lanceolata vel late lanceolata, glaberrima; cetera ignota.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro, supra terminum silvae
(¹⁹/3 1899).

Die Art steht der *Oxalis patagonica* SPERG. und der *Oxalis enneaphylla* CAV. nahe. Von *O. patagonica* unterscheidet sie sich leicht durch die nicht besonders tief ausgegagten Blättchen, die bei *O. patagonica* bis an die Basis gespalten sind, durch ihre kahlen



Oxalis loricata DUSÉN n. sp. $\frac{1}{2}$ der nat. Gr.

Blattstiele, die bei *O. patagonica* dicht behaart sind, und durch die sehr kurzen und kahlen membranösen Schuppen am oberen Teil des Rhizoms, die bei *O. patagonica* linealisch, bis 20 Mm lang und, wenigstens die inneren, wollig behaart sind. Sie unterscheidet sich von *Oxalis enneaphylla* durch ihre fast kreisrunden,

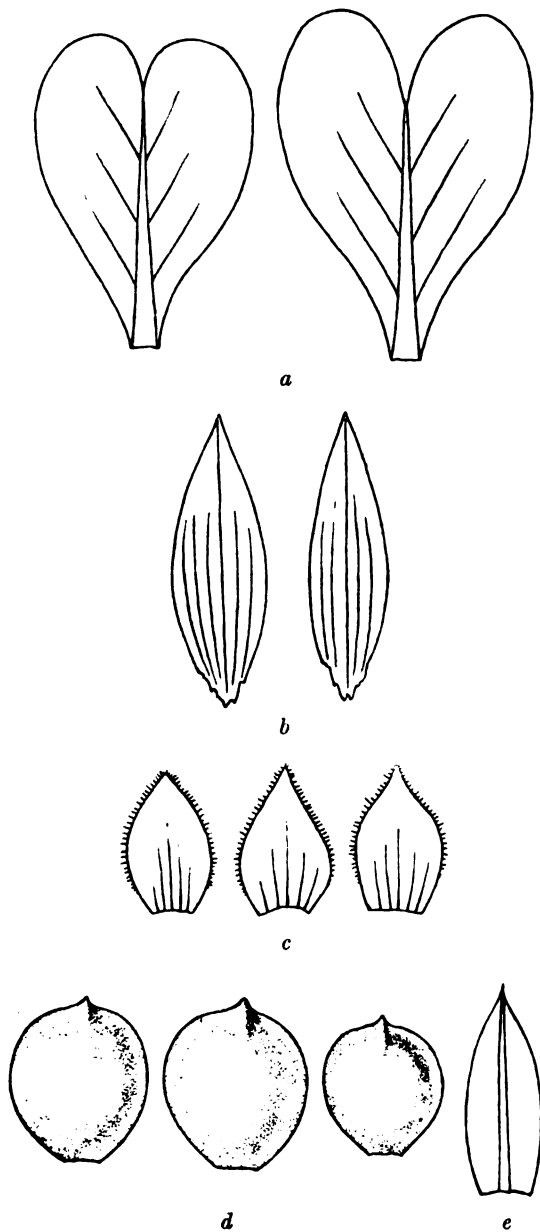


Fig. a. Blättchen, $\frac{4}{1}$. Fig. b. Lappan des Kelchs, $\frac{4}{1}$. Fig. c. Brakteen, $\frac{5}{1}$.
 Fig. d. Fleischige Schuppen des Rhizoms, $\frac{5}{1}$. Fig. e. Membranöse Schuppe
 aus dem oberen Teil des Rhizoms, $\frac{5}{1}$.

dunkelbraunen, dicken Schuppen des Rhizoms, die bei *O. enneaphylla* oval oder länglich oval und gelbrot sind und an der Rückenseite, wenigstens in trockenem Zustande, 3 deutliche Nerven zeigen, und durch ihre kurzen, kahlen, membranösen Schuppen, deren Nerv sich nicht über die Schuppenspreite erhebt, während die *O. enneaphylla* lange, linealische, randbehaarte, membranöse Schuppen am oberen Teil des Rhizoms besitzt, deren Nerv sich an der Rückenseite über die Schuppenspreite erhebt und an der mitte des Schuppen in drei dicht neben einander verlaufende Nerven gespalten ist, die sich oberhalb der Mitte der Schuppen wieder vereinigen.

Geraniaceae.

Geranium magellanicum Hook fil.

Hab. Patagonia australis: Cerro Laura (¹⁶/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (¹⁷/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: südliches Chile; die westpatagonische Steppe: Feuerland.

Leguminosae.

Anarthrophyllum desideratum (DC.) BENTH.

Hab. Patagonia australis: Cerro Laura (¹⁶/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: Lago Nahuelhuapi (¹⁵/₇ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Patagonien; nördliches Feuerland.

Adesmia lotoides Hook. fil.

Hab. Patagonia australis: Laguna Blanca (²⁴/₂ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

Die Art liegt nur als ein Bruchstück vor, das mit *Nassauria Darwinii* gekommen war.

Adesmia boronioides Hook. fil.

Hab. Patagonia occidentalis: Eberhardt (¹⁰/₃ 1899).

Lago Toro, in litore (²³/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Ostabhang der südargentinischen Kordillera; Westpatagonien, wo die Art in der Steppe am östlichen Fuss der Kordillera durch ganz Patagonien verbreitet ist; südliches und östliches Patagonien; die patagonischen Flussthäler; Nordpatagonien; nördliches Feuerland.

Vicia magellanica HOOK. fil.

Hab. Patagonia australis: Tweedie (²³/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

Lathyrus nervosus LAM.

Hab. Patagonia australis: Ultima Esperanza (²¹/₄ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südargentina; Patagonien.

Rosaceae.

Geum magellanicum COMM.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (¹⁰/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle fluminis Aysen. Leg.
P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: die westpatagonische Steppe; Südpatagonien; Feuerland.

Acaena splendens HOOK. et ARN.

Hab. Patagonia occidentalis: Eberhardt, in litore (⁷/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: mittleres (und südliches) Chile; Südargentina am Ostabhang der Kordillera; Westpatagonien, wo die Art in der Steppe am östlichen Fuss der Kordillera durch ganz Patagonien verbreitet ist; Nordküste der Magellanstrasse; nördliches und östliches Feuerland.

Acaena laevigata AIT.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro (¹⁸/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

Saxifragaceae.

Saxifraga Cordillerarum PRESL. var. **magellanica** (POIR.).

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (⁸/₃ 1899).

Sierra de los Baguales (²⁵/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

Escallonia serrata SM.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro (²⁷/s 1899).

Geogr. Verbreitung: südlicher Teil des immergrünen Waldgebietes von Westpatagonien; westlicher und südlicher Teil des magellanischen Waldgebietes.

Escallonia rosea GRIS.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro (²⁰/s 1899).

Eberhardt (⁸/s 1899).

Geogr. Verbreitung: Chile; Südpatagonien.

Escallonia rubra.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro (¹⁸/s 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (²³/s 1899).

Geogr. Verbreitung: Chile; Südargentina; östlicher Abhang der patagonischen Kordillera.

Escallonia stricta REMY.

Hab. Patagonia australis: Cerro Dorothea (³/s 1899).

Eberhardt (⁸/s 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (¹⁸/s 1897).

Geogr. Verbreitung: südliches Chile; Ostabhang der patagonischen Kordillera.

Die Art war bisjetzt aus Südpatagonien noch nicht bekannt. Sie erreicht im Süden fast die Magellanstrasse.

Ribes magellanicum POIR.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (¹¹/s 1899).

Cerro Dorothea (³/s 1899).

Geogr. Verbreitung: Westpatagonien; Feuerland.

Ribes cucullatum HOOK. et ARN.

Hab. Patagonia australis: Cerro Dorothea (³/s 1899).

Patagonia occidentalis: in valle fluminis Aysen (¹⁷/s 1899). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: die Kordillera des mittleren Chile; Ostabhang der Kordillera und die Steppe von Westpatagonien.

Die Art war bisjetzt aus Südpatagonien noch nicht bekannt.

Cruciferae.

Hexaptera Nordenskjöldi DUSÉN.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro, supra terminum silvae
(¹⁹/3 1899).

Die Art ist bisjetzt nur aus dieser Gegend bekannt, wo sie
im Jahre 1897 von Dr. O. NORDENSKJÖLD entdeckt wurde.

Lepidium bipinnatifidum DESV.

Hab. Patagonia australis: Mayer (²/3 1899).
Eberhardt (¹⁰/3 1899).

Geogr. Verbreitung: Chile; Südpatagonien; Feuerland.

Thlaspi magellanicum COMM.

Hab. Patagonia australis: Cerro Laura (¹⁶/3 1899).
Sierra de los Baguales (²⁵/3 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

Cardamine hirsuta L. var. magellanica PHIL.

Hab. Patagonia australis: inter Kark et Eberhardt (³¹/3 1899).
Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland; Falkland-Inseln(?).

Die Art ist bekanntlich kosmopolitisch.

Draba magellanica LAM.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (⁸/3 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen
c. 1300 metra supra mare (²³/2 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: die Kordillera und Steppe von Westpata-
gonien; Südpatagonien; Feuerland.

Die Art variiert rücksichtlich der Grösse, der Verzweigung
des Stengels und der Dichtigkeit der Behaarung. An feuchten
oder wenigstens nicht sehr trockenen Stellen ist die Pflanze etwa
2 Dm hoch mit mehr oder weniger verzweigten Stengel und ziem-
lich dünn sternhaarig. An trocknen Plätzen wird sie nur wenige
Centimeter hoch; der Stengel ist gewöhnlich unverzweigt und die
ganze Pflanze sehr dicht sternhaarig und daher grauweiss.

Descourainia canescens (NUTT.) PRANTL.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt ($2/3$ 1899).

Inter Eberhardt et Rio Tres Pasos ($10/3$ 1899).

Geogr. Verbreitung: Chile; Argentina; Patagonia; Feuerland; Kalifornien.

Arabis magellanica (PERS.).

Hab. Patagonia australis: Eberhardt ($8/3$ 1899).

Cerro Toro ($18/3$ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; das Steppengebiet des Feuerlandes.

Berberidaceae.

Berberis empetrifolia LAM.

Hab. Patagonia australis: Cerro Laura ($16/3$ 1899).

Eberhardt ($19/4$ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle fluminis Aysen ($17/2$ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Lago Nahuelhuapi ($16/7$ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: die Kordillera des mittleren und südlichen Chile; die Steppe von Westpatagonien; Südpatagonien; Feuerland.

Berberis microphylla FORST.

Hab. Patagonia australis: Punta Arenas ($12/2$ und $15/2$ 1899).

Patagonia occidentalis: Eberhardt ($27/4$ 1899).

In valle superiore fluminis Aysen ($17/2$ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: die Küstenkordillera und die Kordillera sowie auch das Tiefland des südlichen Chile, Westpatagonien westlich von der Kordillera (selten); die Steppe von Westpatagonien; Südpatagonien; Feuerland.

Berberis ilicifolia LINN. fil.

Hab. Patagonia australis: Punta Arenas ($15/2$ und $9/3$ 1899).

Patagonia occidentalis: Ultima Esperanza ($22/4$ 1899).

In valle superiore fluminis Aysen ($16/2$ 1899). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: der Süden des immergrünen Waldgebietes von Westpatagonien; das immergrüne Waldgebiet der Magellanländer; Ostabhang der patagonischen Kordillera.

Ranunculaceae.

Caltha sagittata CAV.

Hab. Patagonia occidentalis: Saunders (²⁷/₂ 1899).

Geogr. Verbreitung: die Kordillera des südlichen Chile; Südpatagonien; Feuerland; Falkland-Inseln.

Anemone multifida POIR.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro (¹⁸/₃ 1899).

Tweedie (¹⁸/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle fluminis Aysen (¹⁷/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Lago Nahuelhuapi (¹⁵/₇ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Südliches Chile; Westpatagonien in der Steppe am östlichen Fuss der Kordillera durch ganz Patagonien; Südpatagonien; im Süden von Ostpatagonien; die Flussthäler Patagoniens; Feuerland.

Hamadryas Kingii HOOK. fil.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro, supra terminum silvae (¹⁹/₃ 1899).

Bisjetzt nur aus dieser Gegend und vom Mount Tarn am Nordufer der Magellanstrasse bekannt.

Caryophyllaceae.

Cerastium arvense L.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro, supra terminum silvae (¹⁹/₃ 1899).

Tweedie (²⁷/₃ 1899).

Inter Kark et Eberhardt (³¹/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (¹⁷/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: fast ganz Chile; Westpatagonien; Südpatagonien; Feuerland; Falkland-Inseln; Nordamerika, Grönland, Spitzbergen; arktisches Russland; Skandinavien; die Alpen von Südeuropa; Pyrenäen; Kaukasus.

Colobanthus subulatus (D'URV.) HOOK. fil.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro, supra terminum silvae (¹⁹/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland; Falkland-Inseln.

Colobanthus polycnemoides HIERON.

Hab. Patagonia australis: Cerro Toro (¹⁸/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; nördliches Feuerland.

Chenopodiaceae.

Salicornia sp.

Hab. Patagonia australis: inter Tweedie et Sierra de los Baguales (²⁶/₃ 1899).

Tweedie (¹⁷/₃ 1898).

Ein nähere Bestimmung der Art ist wegen der Unvollständigkeit der Exemplare nicht möglich.

Polygonaceae.

Rumex decumbens DUSÉN.

Hab. Patagonia australis: Mayer, ad rivulum (⁸/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle fluminis Aysen. Leg.
P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: die Steppe am östlichen Fuss der patagonischen Kordillera; Feuerland.

Rumex maritimus L. var. **fueginus** (PHIL.).

Hab. Patagonia australis: Cerro Laura, in paludosis (¹⁶/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Patagonien; Feuerland.

Santalaceae.

Myosilos oblongum RUIZ et PAV.

Hab. Patagonia australis: inter Eberhardt et Rio Tres Pasos (¹¹/₃ 1899).

Eberhardt (²⁷/₄ 1899).

Geogr. Verbreitung: Chile; Westpatagonien.

Myzodendraceae.

Myzodendron punctulatum BANKS et SOL.

Hab. Patagonia australis: Punta Arenas (¹⁵/₃ 1899).

Cabo Negro (²⁰/₂ 1899).

Inter Eberhardt et Kark (³/₄ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle fluminis Aysen (¹³/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Südliches Chile; Westpatagonien; Feuerland.

***Myzodendron linearifolium* DC.**

Hab. *Patagonia australis*: Cabo Negro (²⁰/₂ 1899).

Prope Mayer (²/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: südliches Chile; Ostabhang der patagonischen Kordillera.

Die Art war bisjetzt aus Patagonien noch nicht bekannt. Sie erreicht im Süden die Magellanstrasse.

***Myzodendron quadriflorum* DC.**

Hab. *Patagonia australis*: inter Eberhardt et Kark (²/₄ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland.

Proteaceae.

***Embothrium coccineum* FORST.**

Hab. *Patagonia australis*: Eberhardt (⁶/₃ 1899).

Moulet (²¹/₄ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle fluminis Aysen (¹⁴/₁ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Lago Nahuelhuapi (¹⁶/₁ 1899). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: südliches Chile; Westpatagonien; Feuerland.

Urticaceae.

***Urtica magellanica* POIR.**

Hab. *Patagonia australis*: Cerro Toro (¹⁸/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle fluminis Aysen. Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Chile australis; Ostabhang der patagonischen Kordillera; Feuerland.

Fagaceae.

***Nothofagus antarctica* (FORST.) BLUME.**

Hab. *Patagonia australis*: Monte Chico (²⁶/₂ 1899).

Punta Arenas (⁹/₅ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (¹⁸/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Südhile; Ostabhang der Kordillera von Südargentina und von Westpatagonien; Feuerland.

Nothofagus pumilio (POEPP. et ENDL.) BLUME.

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (⁶/₃ 1899).

Ultima Esperanza (²¹/₄ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle fluminis Aysen usque ad alt. 1300 metra supra mare. Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Südliches Chile; Ostabhang der südargentinischen und der patagonischen Kordillera; Feuerland.

Nothofagus betuloides (MIRB.) BLUME.

Hab. Patagonia australis: Punta Arenas (⁹/₅ 1899).

Pars occidentalis territorii magellanici: Jacq Island, Puerto Angosto (⁴/₅ 1899).

Geogr. Verbreitung: Westpatagonien; Feuerland und die zahlreichen feuerländischen Inseln.

Iridaceae.

Sisyrinchium chilense HOOK.

Hab. Patagonia australis: Kark (¹⁷/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (¹⁷/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Lago Nahuelhuapi (¹⁶/₇ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: Chile; die Steppe von Westpatagonien; Südpatagonien; Feuerland.

Cyperaceae.

Carex Darwinii BOOTT.

Hab. Patagonia australis: Cerro Dorothea (³/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: Westpatagonien; Südpatagonien; Feuerland.

Gramineae.

Alopecurus alpinus SM.

Hab. Patagonia occidentalis: inter Kark et Eberhardt (³¹/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: südliches Chile; Westpatagonien in der Steppe am östlichen Fuss der Kordillera durch ganz Patagonien; Südpatagonien; Feuerland; Nordamerika; Grönland; Spitzbergen; Nordsibirien; Schottland.

***Stipa pogonathera* DESV.**

Hab. Patagonia australis: Cerro de los Baguales (²⁵/₃ 1899).

Geogr. Verbreitung: die Kordillera des nördlichen Chile; Südpatagonien.

Pinaceae.

***Libocedrus tetragona* (HOOK.) ENDL.**

Hab. Patagonia australis: Lago Errazuriz. Leg. E. NORDENSKIÖLD.

Pars occidentalis territorii Magellanici: Jacq Island ad Puerto Angosto (⁴/₆ 1899).

Geogr. Verbreitung: Westpatagonien; die westlichen und südwestlichen feuerländischen Inseln.

Potamogetonaceae.

***Potamogeton linguatus* HAGSTR. n. sp.**

Caulis 30—50 cm altus, rigidus, teres vel subteres, 3—4 mm crassus, ad folia floralia ramum spiciferum foliis vere coriaceis emittens, ceterum simplex vel vix ramosus; internodia fere aequilonga (4—5 cm); folia submersa tenuia, integerrima, lanceolato-lingulata, obtusa, lamina 9—10 cm longa et 2,5—3,5 cm lata, petiolo brevi (10—25 mm), nervis lateralibus principalibus fere ad medium folii cum costa centrali connexis; folia natantia coriacea, obtusa, ovalia-subcordata, longe petiolata, lamina c. 8 cm longa et 3,5 cm lata; stipulae 4—6 cm longae, persistentes, bicostatae, costis validis, ad basin stipularum valde prominentibus (costa altitudine crassitudinem stipulae 3—4: plo superans); pedunculus 7—10 cm longus; spica mediocris, 3 cm longa; stigma parvum, ovale; fructus 3,5—4 mm longus et 2—2,5 mm latus, apicem versus in parte dorsali siccus conspicue carinatus, lateribus convexis, apice inconspicue rostrato.

Hab. Patagonia australis: Kark (³⁰/₃ 1899).

Die Stengelanatomie dieser Art ist durch folgendes gekennzeichnet. Das kortikale Zellgewebe bildet längs der Epidermis



Potamogeton linguatus HAGSTR. n. sp. ¹/₃ der nat. Gr.

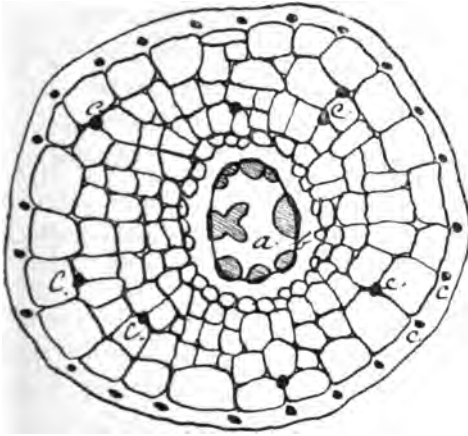


Fig. 1.

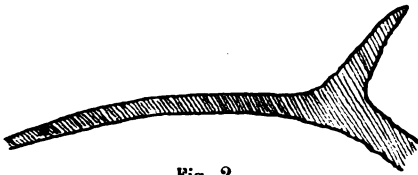


Fig. 2.

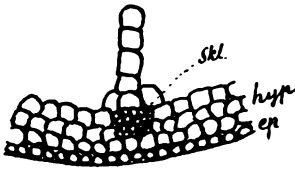


Fig. 4.

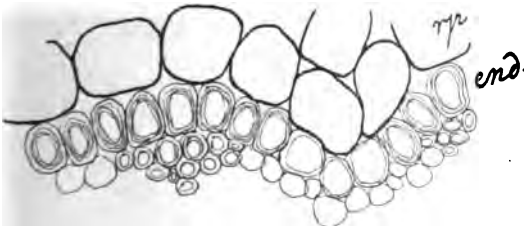


Fig. 5.



Fig. 3.



Fig. 6.

Fig. 1. Anatomisches Stengeldiagramm: a. Centralcylinder mit 9 Gefässbündeln; b. Endodermis; c. Bastbündel. Fig. 2. Querschnitt durch den Basalteil eines Nebenblattes. $\frac{2}{1}$. Fig. 3. Längsnerven eines untergetauchten Blattes. Nat. Gr. Fig. 4. Vergrößerter Teil der Epidermis (Ep) und des Hypoderms (Hyp) des Stengels mit einem Sklerenchymbündel (Skl), $\frac{75}{1}$. Fig. 5. Vergrößerter Teil der Endodermis (end); rp = Rindenparenchym, $\frac{250}{1}$. Fig. 6. Frucht, $\frac{5}{1}$.

2—3 Schichten (= Hypoderma) mit zahlreichen Bastbündeln. Innerhalb des Hypodermas treten nur vereinzelte Gefäß- oder Bastbündel in zwei Kreisen auf. Die Endodermis hat gleichförmig (oder wenigstens fast gleichförmig) verdickte Zellen unmittelbar ausserhalb der Gefäßbündel des Centralcyinders; die dazwischenliegenden Zellen sind weniger oder gar nicht verdickt. Der Centralcyylinder hat 8—11 Gefäßbündel und keine Sklerenchymzellen im Grundgewebe.

Die Art steht dem weit verbreiteten *P. nodosus* POIR. (= *P. fluitans* Auct.) sehr nahe, unterscheidet sich jedoch wesentlich durch das Hypoderma, das der obengenannten Art und ihren Verwandten (*P. polygonifolius* POURR., *P. pulcher* TUCK.) u. a. stets fehlt. Da auch das Blatthäutchen etc. sehr abweicht, thut man jedenfalls am besten daran, den *P. linguatus* einen eigenen Typus bilden zu lassen.

Isoëtaceae.

Isoëtes Savatieri FRANCH.

Hab. Patagonia australis: Lago Toro (²²/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: Puerto Bueno (³¹/₅ 1896). Leg. P. DUSÉN.

Lycopodiaceae.

Lycopodium magellanicum Sw.

Hab. Patagonia australis: inter Eberhardt et Kark. Leg. E. NORDENSKIÖLD.

Ultima Esperanza (²¹/₄ 1899).

Geogr. Verbreitung: Südpatagonien; Feuerland; Falkland-Inseln; Kerguelen.

Polypodiaceae.

Blechnum Pinna marina (POIR.).

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (⁸/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle superiore fluminis Aysen (²³/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Lago Nahuelhuapi (¹⁶/₇ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: südliches Chile; das Waldgebiet von Westpatagonien; Südpatagonien; die Magellansländer; Falkland-Inseln; Kerguelen.

***Asplenium magellanicum* KAULF.**

Hab. Patagonia australis: Ultima Esperanza, in terra silvosa (²²/₄ 1899).

Geogr. Verbreitung: südliches Chile; Westpatagonien westlich von der Kordillera; die Thäler der patagonischen Kordillera; der ganze bewaldete Teil der Magellansländer; die Insel Juan Fernandez.

***Polysticum elegans* REMY.**

Hab. Patagonia australis: Cerro Neomylodon (⁶/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle fluminis Aysen (¹⁷/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Geogr. Verbreitung: die Kordillera des mittleren und südlichen Chile; Ostabhang der patagonischen Kordillera; Feuerland.

***Cystopteris fragilis* BERNH.**

Hab. Patagonia australis: Eberhardt (⁶/₃ 1899).

Sierra de los Baguales (²⁵/₃ 1899).

Tweedie (¹⁸/₃ 1899).

Patagonia occidentalis: in valle fluminis Aysen (¹/₂ 1897). Leg. P. DUSÉN.

Die Art ist wahrscheinlich kosmopolitisch.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 228.)

- Adelaide.** *Public library, museum, and art gallery.*
Report. 1899/1900. Fol.
- Belgrad.** *Académie R. de Serbie.*
Glas (Bulletin). 59; 61. 1900. 8:o.
Godišnjak. 13 (1899). 12:o.
Geologija Srbije. 2: Text & Atlas. 1900. 4:o.
- Berlin.** *Deutsche entomologische Gesellschaft.*
Deutsche entomologische Zeitschrift. Jahrg. 1900: H. 2. 8:o.
— *Deutsche physikalische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Jahrg. 3 (1901): Nr 3. 8:o.
— *K. Preuss. meteorologisches Institut.*
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen 2. und 3. Ordnung
im Jahre 1900. 1900: H. 1. 4:o.
- Boston.** *American Academy of Arts and Sciences.*
Proceedings. Vol. 36 (1900/1901): N:o 9—15. 8:o.
— *Society of Natural History.*
Memoirs. Vol. 5: N:o 6—7. 1900—01. 4:o.
Proceedings. Vol. 29: N:o 9—14. 1900. 8:o.
Occasional papers. 4. 1900. 8:o.
- Brünn.** *Naturforschender Verein.*
Verhandlungen. Bd 38 (1899). 8:o.
Bericht der Meteorologischen Commission. 18 (1898). 8:o.
- Bruxelles.** *Académie R. de Belgique.*
Bulletin. Cl. des lettres. 1901: N:o 2. 8:o.
» Cl. des sciences. 1901: N:o 2. 8:o.
— *Musée R. d'histoire naturelle.*
Mémoires. T. 1: Extraits. 4:o.
SEWARD, A. C., La flore Wealdienne de Berpissart. 1900.
GILSON, G., Exploration de la mer sur les côtes de la Belgique en
1899. 1900.
— *Observatoire R. de Belgique.*
Bulletin mensuel du magnétisme terrestre. 1899: 1—10. 8:o.
- Budapest.** *K. Ungarische Geologische Anstalt.*
Földtani Közlöny (Geolog. Mittheilungen). K. 30 (1900): Füz. 8—9.
8:o.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd 12: H. 3—5. 1900—01. 8:o.
- Buenos Aires.** *Sociedad científica Argentina.*
Anales. T. 51 (1901): Entr. 1—2. 8:o.
- Calcutta.** *Indian museum.*
Annual report. 1899/1900. 8:o.
- Cambridge, Mass.** *Astronomical Observatory of Harvard College.*
Annals. Vol. 37: P. 1; 43: 1. 1900—01. 4:o.
- Cape Town.** *South African Museum.*
Annals. Vol. 2 (1900/01): P. 5—8. 8:o.

(Forts. å sid. 290.)

Berättelse om hvad sig tilldragit inom Kongl. Vetenskaps Akademien under året 1900—1901. Af Akademiens ständige Sekreterare afgifven på högtidsdagen den 30 Mars 1901.

Det år, som förflutit sedan Vetenskaps Akademien senast offentligen begick minnet af sin stiftelse och dervid enligt sina grundreglors föreskrift afgaf redogörelse för sin verksamhet i den allmänna och särskildt den fosterländska odlingens tjänst, har för Akademien fortlöpit under ostörd utöfning af denna verksamhet. Med tillfredsställelse kan hon se tillbaka på detta gångna tidskede, hvilket för öfrigt kännetecknas genom en inom vårt fädernesland fortfarande stegrad odling af de vetenskaper, som hufvudsakligen äro föremål för Akademiens verksamhet, hvilken stegring bland annat ådagalägges genom Akademiens egna till omfång och innehåll allt mer och mer tillväxande skrifter. Fortfarande har Akademien också haft tillfredsställelsen att under året se sin och henne underlydande statsinstitutioners verksamhet, äfvensom den vetenskapliga forskningen i allmänhet, omfattade med oförminskadt hägn från de höga statsmagternas sida, hvarför det är hennes främsta pligt att uttala sin djupa tacksamhet. Sålunda har Riksdagen på Kongl. Maj:ts derom gjorda nådiga framställningar beviljat:

på ordinarie riksstat 1,000 kronor till nödig förhöjning af det Naturhistoriska Riksmuseets expensmedels-anslag, samt

på extra stat för innevarande år:

dels 2,000 kronor till inköp och insamling af naturalier m. m. vid Riksmuseets afdelning för arkegoniater och fossila växter,

dels 4,500 kronor till vård, underhåll och förkofran af Riksmuseets etnografiska samling,

dels 9,350 kronor till upprätthållande af fullständigt ordnad väderlekstjänst vid Statens Meteorologiska Centralanstalt, hvaraf äro afsedda 500 kronor till personlig arfvodesförhöjning åt Anstaltens nuvarande Amanuens Dr. H. E. HAMBERG och 1,000 kronor till arvode åt en andre Amanuens, samt 300 kronor till upprätthållande af en meteorologisk station i Gellivare,

dels 144,000 kronor att med 7,200 kronor utgå årligen under 20 års tid för Meteorologiska Anstaltens förseende med dagliga meteorologiska telegram från Färöarne och Island.

För öfrigt har Riksdagen på Kongl. Maj:ts nådiga framställning och efter af Akademien afgifvet förord anvisat 3,000 kronor till fortsatt utgifvande under innevarande år af tidskriften *Acta mathematica*.

Af under hand hafvande medel har Kongl. Maj:t uppå Aka-
demiens underdåniga förord anvisat 2,000 kronor åt Professor
T. TULLBERG såsom bidrag för utgifvande från trycket af arbetet:
»Ueber das System der Nagethiere», samt för öfrigt reseunderstöd
till efter omständigheterna lämpade belopp åt 7 svenska veten-
skapsmän för bevistande i utlandet af internationella samman-
träden för vetenskapliga ändamål.

Under året har Akademien äfven haft tillfredsställelsen att
se sig ihågkommen med frikostiga donationer af enskilda personer.
Akademiens framlidne ledamot Bankofullmäktigen Doktor J. W.
ARNBERG har nämligen i efterlemnadt testamente donerat en summa
af 20,000 kronor att utgöra en stående fond, hvars årliga ränta
skall användas till belöning för något godt arbete inom de eko-
nomiska vetenskapernas område, och Konsul G. E. BROMS har
donerat en summa af 40,000 kronor för att vid Akademiens
zoologiska station Kristineberg dermed bekosta inrättandet af ett
tidsenligt vinter-laboratorium med dertill hörande reservoirer, rör-

ledning m. m., på det att stationens vetenskapliga verksamhet må oafbrutet kunna fortgå äfven under vintertid.

På Kongl. Maj:ts befallning har Akademien under året haft att afgifva utlåtanden i åtskilliga allmänna ärenden, såsom:

öfver förslag af Chefen för Sveriges Geologiska Undersökning om anställande af djupborrningar i södra Sverige;

öfver framställning af Kongl. Gradmättningskomitén om anslag för fullföljande af gradmätningen på Spetsbergen;

öfver af Väg- och Vattenbyggnads- samt Landtbruks-Styrelserna gemensamt uppgjort förslag om anställande af hydrografiska undersökningar inom landet;

öfver underdåniga ansökningar om understöd för utgifvande af vetenskapliga arbeten eller utförande af resor för vetenskapliga ändamål.

Om resor, som för vetenskapliga ändamål blifvit på bekostnad eller med understöd af Akademien utförda, har hon fått mottaga berättelser:

af Fil. Licentiaten A. HOLLENDER, som sökt att i Skåne bestämma strandkonturens läge under olika skeden af den förhistoriska tiden;

af Fil. Licentiaten O. EKSTAM, som i trakten af Syltopparne utfört fenologiskt-biologiska undersökningar;

Af Docenten B. LIDFORSS, som i nordvestra Skåne och södra Halland idkat anatomiskt-fysiologiska studier af floran på sandfälten derstädes;

af Läroverkskollegan W. A. ENGHOLM, som dels fortsatt föregående undersökningar af djurlifvet i och omkring sjön Tåkern i Östergötland och dels idkat zoologiska studier vid Kristinebergs station;

Af Docenten S. BENGTTSSON, som i södra och mellersta Sverige studerat insektgrupperna Ephemerider och Plecopterer;

af Docenten H. WALLENGREN, som fortsatt sina undersökningar öfver ciliata infusorier i Skåne;

af Fil. Kandidaten E. WAHLGREN, som i trakten af Torne träsk studerat Podurider, Myriapoder samt andra evertebrater;

af Fil. Kandidaten S. EKMAN, som i Torne Lappmark studerat högfjällens Entomostraceer.

Derjemte har Akademien mottagit berättelse af vagnmakaren A. A. SVENSSON öfver den utländska resa, som han såsom af Akademien utsedd Byzantinsk stipendiat utfört för studerande af vagnfabrikationen.

Tryckningen af Akademiens skrifter har under året oafbrutet fortgått och har framskridit i den mån deras starkt tillväxande omfång det medgifvit. Sålunda har utaf Akademiens Handlingar bandet 33, innehållande 5 mestadels mycket omfattande afhandlingar, äfvensom bandet 34, innehållande 8 afhandlingar fullständigt lemnat pressen, men hafva ännu icke kunnat utgifvas i anseende till den stora mängd dithörande plancher, tillsammans 111 stycken, hvilka ännu icke hunnit blifva fullt utförda och tryckta. — Af Bihanget till Handlingarne har det 25:te bandet, innehållande 34 afhandlingar, fullständigt utkommit, hvarjemte betydliga delar äfven af 26:te bandet lemnat pressen. — Af Öfversigten af Akademiens förhandlingar har 57:de årgången för år 1900, omfattande ej mindre än 66 större eller mindre afhandlingar, utkommit, hvarjemte tryckningen af 58:de årgången påbörjats. — Af arbetet »Meteorologiska iakttagelser i Sverige» har 37:de bandet utkommit.

Vid Akademiens *Observatorium* har verksamheten förträdesvis varit under året egnad dels åt observationerna med meridiancirkeln och dels åt vissa astrofotografiska undersökningar, hvilka förnämligast afsett bestämningen af det graderade nät, som skall å hvarje fotografisk plåt inkopieras i och för kontroll af möjliga distortioner i det ljuskänsliga skiktet. Desamma hafva ledt till upptäckt af ett nytt slags korrektioner, som härvid äro att iakttaga, nämligen kopieringsfelen. Ett antal astrofotografier hafva derjemte med den till equatorealet anbragta astrofotografiska

kameran blifvit utförda. — De i hufvudsak afslutade beräkningarna af gruppstöringar för asteroiderna af typen $\frac{1}{3}$ hafva förberedts för tryckning. En förberedande redogörelse för de under året utförda astrofotografiska undersökningarne har offentliggjorts i den franska tidskriften »Bulletin astronomique». — Såsom biträdande Astro-
nom har Docenten K. G. OLSSON tjenstgjort, hvarjemte Filos. Licentiaten H. VON ZEIPPEL innehaft Assistent-befattningen för astrofotografi intill utgången af sistlidne December månad, hvar-
efter Filos. Kandidaten E. A. NEANDER varit antagen till inne-
hafvare af samma befattning. — Regelbundna tidssignaler hafva i likhet med föregående år på elektrisk väg från Observatorium afsändts dels till Kongl. Flottans station i Karlskrona och dels till härvarande Central-telegrafstation. — Undervisning i ut-
förandet af astronomiska observationer och beräkningar har fort-
farande meddelats studerande vid Stockholms Högskola. — Almanackor och kalendrar hafva i behörig tid hållits allmänheten tillhanda.

Vid Akademiens *Fysiska Institution* hafva de undersökningar öfver Molybdens spectrum i elektriska ljusbågen, hvilka i före-
gående berättelse omförmäldes, blifvit under året fortsatta och tagit en stor del af föreståndarens tid i anspråk. Sedan de egentliga positionsbestämningarne i det närmaste afslutats, åter-
stod nämligen utmönstringen af främmande linier, hvilken vid denna metall befanns vida svårare och mer tidsödande än vid de förut undersökta metallerna. Den är likväl nu nära afslutad, då endast en mindre del af spectret i gult och grönt återstår att undersökas, äfvensom några kontrollundersökningar i afseende på det använda metallpreparatets renhet att utföras. — Den metod för bestämning af sferiska ytors krökningsradie, som i föregående berättelse omnämnts, har af föreståndaren närmare utarbetats och resultatet offentliggjorts i Bihaget till Akademiens Handlingar. Metoden har visat sig så noggrann, att ej blott den sökta krökningsradien kunnat bestämmas med ett sannolikt fel af endast $\pm 0,01$ m. m., utan äfven afvikelser från den geometriskt sferiska formen af så ringa belopp kunnat iakttagas, att de van-

liga undersökningsmetoderna ej på långt när äro i stånd att påvisa desamma. — Under två utländska resor, som föreståndaren sistlidne sommar på offentligt uppdrag utförde, dels till astronomkongressen i Heidelberg och dels i egenskap af ledamot i den internationella meterkomitén till Paris, kunde vid flera astronomiska och fysiska institutioner åtskilliga för här pågående arbeten särdeles viktiga erfarenheter och iakttagelser göras. Derunder besöktes nämligen de viktigaste sådana institutioner i Berlin, Potsdam, Heidelberg, Strassburg, Bonn, Köpenhamn, Paris och Breteuil. — Under året har färdigbyggandet af monteringen för det stora Rowlands comargitter, som institutionen sedan flere år besitter, så pass fortskridit, att detta mäktiga spektroskop snart torde blifva färdigt att kunna tagas i bruk för det dermed afsedda ändamålet, nämligen undersökningar af de yttersta ultraviolettera delarne af metallernas spectra. — Institutionens instrumentsamling har under året förökats med flera för dess verksamhet behöfliga apparater. — De Themiska föreläsningarne hafva i vanlig ordning hållits af Akademiens Fysiker under sistlidne Januari och Februari månader och haft till ämne: »Några hufvudepoker i Astronomiens historia under 16—18 seklen.»

Vid *Bergianska Stiftelsens* trädgårdsskola har antalet elever under året varit 16. Undervisningen har omfattat hortikulturens olika grenar samt botanik, geografi, fysik, kemi, aritmetik, fältmätning, trädgårdsritning, bokföring och svenska skriföfningar. — I trädgårdens botaniska afdelning har blifvit uppförd en mindre paviljong för att inrymma ömtåligare växtföremål, som ej lämpa sig för förvaring i musei-grottorna. I sammanhang härmed har den mest öppna af de tre musei-grottorna omskapats till en tjenlig lokal för experiment-kulturer med hänsyn till svagare och starkare belysnings inflytande på blad- och blombildning m. m. Bland öfriga nyanläggningar må nämnas ett parti nedom trädgårdens högsta punkt, afsedt att visa vegetationen på de berömda schweiziska ängarne ofvan trädgränsen, »Alpwiesen». — Stiftelsen har under året ihåggkommits med talrika gåfvor. Lefvande växter hafva lemnats af Docent G. ANDERSSON, Trädgårdseleven G. E.

ANDERSSON, Professor CHR. AURIVILLIUS, Adjunkt K. JOHANSSON, Professor G. LAGERHEIM, Lektor C. A. M. LINDMAN, Doktor K. LJUNGSTEDT, Professor CHR. LOVÉN, Doktor C. F. O. NORDSTEDT, Herr E. NORDSTRÖM, Ledamoten af Riksdagens 2:dra Kammare J. NYDAHL, Trädgårdsmästaren O. PETERSSON, Apotekaren C. PLEIJEL, Lektor A. SKÅNBERG, Apotekaren P. SVENDSEN (från Norge) och Öfverjägmästaren V. TH. ÖRTENBLAD. Frön hafva erhållits af Amanuens A. BEHM, Öfverkontrollör P. G. BORÉN, Amanuens H. DAHLSTEDT, Adjunkt K. JOHANSSON, Apotekaren C. PLEIJEL och Herr I. ÖRTENDAHL. Morfologiska föremål hafva förärats af Deras Kongl. Högheter Arffustarne GUSTAF ADOLF och WILHELM. Ytterligare sådana hafva blifvit skänkta af Ved-handlaren A. V. ANDERSSON, Slöjdaren C. A. BAGGE, Professor CHR. LOVÉN, Adjunkt P. M. LUNDELL, Amanuens G. O. MALME, Adjunkt A. P. SKOGLAR, Arkivarien Friherre C. E. B. TAUBE, Trädgårdseleven T. THORSELL, Professor N. WILLE och Öfverjägmästaren V. TH. ÖRTENBLAD. Till Stiftelsens botaniska tafvelsamling hafva gåfvor lemnats af Docent G. ANDERSSON, Professor A. BORZI (från Italien), Professor G. LAGERHEIM, Arkitekt J. O. LINDBERG, Lektor C. A. LINDHAGEN, Lektor C. A. M. LINDMAN, Amanuens G. O. MALME, Doktor C. F. O. NORDSTEDT samt Professor BERGIANUS. Genom byte med universitetets i Padua botaniska ikonotek har ett betydande antal porträtter af italienska botanister erhållits. — Stiftelsens bibliotek har afsevärdt tillvuxit, dels genom inköp och dels samt väsentligen genom byte förmedelst Stiftelsens publikation »Acta horti Bergiani». — Vid det internationella frö- och fruktbyte, som årligen eger rum, har Stiftelsens botaniska trädgård utsändt 5,161 fröportioner till 98 botaniska institutioner, samt mottagit 3,664 fröportioner från 90 institutioner. Med Förenta Staternas »Departement of Agriculture» har ett större byte egt rum, såväl af levande växter som af frön och frukter.

Akademiens *Bibliotek* har under året hållits tillgängligt på stadgade tider. Statistiken öfver dess begagnande utvisar, att under 257 tjenstgöringsdagar de besökandes antal varit 3,377,

att till begagnande framtagits 5,584 volymer, af hvilka 2,263 utlemnats till hemlån, samt att 2,507 låntagna volymer blifvit återställda. Vid årets slut voro omkring 11,000 band och häften utlånta. Genom inköp, gåfvor och byten har boksamlingen tillväxt med 6,496 band, häften och små skrifter. — Akademiens egna skrifter utdelas för närvarande till 960 institutioner och personer, af hvilka 277 inom och 683 utom landet.

Meteorologiska Centralanstaltens verksamhet har under året oförändradt fortgått efter samma utvidgade plan, som från början af år 1894 varit gällande. De dagligen under hela året inkommande morgontelegrammen innehålla afton- och morgonobservationer öfver väderleken vid 14 inländska och 47 utländska stationer. Med stöd af dessa telegram konstrueras dagligen två synoptiska kartor, af hvilka morgonkartan offentligen anslås å 4 ställen i hufvudstaden och i förminskad skala återgifves i 5 härstädes utkommande dagliga tidningar. Det viktigaste af de i morgontelegrammen upptagna iakttagelserna meddelas i 9 dagliga tidningar i hufvudstaden jemte en sammanfattning af väderlekstillståndet samt väderleksutsigter för det närmast följande dygnet, hvarjemte denna sammanfattning tillika med utsigter på telegrafisk väg öfversändes till 12 kommuner i riket, till de flesta af dem dock endast under sommarmånaderna. En mera kortfattad sammanfattning af väderlekstillståndet jemte utsigter öfversändes äfven till Styrelsen för statens jernvägstrafik, som på egen bekostnad låter anslå densamma å alla större jernvägsstationer. Denna anordning har äfven blifvit vidtagen på flera privata banlinier, af hvilka de flesta erhålla sina uppgifter från närmaste statsstation. Sistnämnda kortfattade sammanfattning meddelas äfven Svenska Telegrambyrån i Stockholm, hvilken ytterligare sprider densamma till sina kunder. — I öfverensstämmelse med hvad som egde rum under föregående år anordnades äfven under Juli—September månader vid anstalten en särskild väderlekstjänst till jordbrukets gagn. För detta ändamål erhöll anstalten under denna tid morgontelegram, innehållande afton- och morgonobservationer från ytterligare 6 inländska och en utländsk station samt eftermiddags-

telegram från 17 inländska och 18 utländska stationer. Med stöd af dessa telegram dels kompletterades de ofvannämnda synoptiska kartorna, dels upprättades en särskild karta öfver eftermiddagens väderlek, i enlighet med hvilken kl. 6 e. m. utfärdades särskildt för jordbruket afsedda väderleksutsigter beträffande nederbörd och nattfrost under påföljande dygn. — De till anstalten ankommande morgotelegrammen hafva fortfarande och till samma utsträckning som förut publicerats i »Bulletin du Nord», en tidskrift som bekostas af de tre Skandinaviska Anstalterna gemensamt. — Statens meteorologiska stationer äro för närvarande 34 till antalet. Dessförutom anställas observationer öfver nederbörd och temperatur med egna eller från Anstalten till läns bekomna instrumenter å flera privatstationer. Fullständiga observationsserier hafva till Anstalten inlemnats af Läroverksrektorn P. R. BILLMANSON i Nora, Jägmästaren J. J. C. VON DÖBELN i Björkholm, från Ronneby helsobrunn, Gysinge Bruk och Ulricehamns sanatorium samt från Landtbruks Akademiens Experimentalfält vid Stockholm, vidare från två stationer i Hallands och en i Upsala län, de tre sistnämnda inrättade och underhållna på de respektive Hushållningssällskapens bekostnad. — Det system af s. k. tredje klassens stationer för iakttagelser hufvudsakligen öfver nederbörden och delvis öfver lufttemperaturen, som 1878 anordnades med de Kongl. Hushållningssällskapens medverkan, är ännu i fortsatt verksamhet. Om till dessa stationer läggas Statens hithörande stationer, så väl de hvilka sortera under Centralanstalten som under Nautisk Meteorologiska Byrån samt de privata stationerna, vid hvilka alla nederbörder observeras efter en och samma plan, blir antalet af nederbördsstationer i riket inalles 445, således 22 flera än under föregående året. Alla dessa stationer, som äro fördelade på rikets alla län, insända sina iakttagelser till Centralanstalten vid hvarje månads utgång. Desamma publiceras i den månatliga tidskriften: »Månadsöfversigt af väderleken i Sverige», hvilken under Anstaltens inseende redigeras af dess Amanuens Dr. H. E. HAMBERG och uppehålls hufvudsakligen genom prenumeration af Hushållningssällskapen. Af denna tid-

skrift hafva hittills 20 årgångar utkommit, nämligen för åren 1881—1900. — Det system af iakttagelser öfver isförhållanden, åskväder och fenologiska företeelser, som Anstalten allt sedan år 1881 omhänderhaft, har fortgått efter oförändrad plan, och hafva till Anstalten inkommit journaler från 81 observatörer öfver isläggning och islossning, från 81 öfver iakttagna åskväder och från 95 öfver periodiska företeelser inom växt- och djurriket. — Synoptiska tabeller hafva upprättats för hvarje dag af året 1899, upptagande nederbördens art och mängd, åskväder, dimma, dagg, rimfrost, luftens genomskiuilighet, solrök, norrsken m. m. I dessa tabeller ingå samtliga stationer. — Under året har Amanuensen Dr. HAMBERG besökt och inspekterat följande stationer: Jockmock, Gellivara, Haparanda, Piteå, Hernösand, Örebro, Askersund, Vestervik, Kalmar, Vexjö och Göteborg. — Anstalten har under året fortfarande haft att meddela en mängd upplysningar åt så väl in- som utländska auktoriteter och enskilda personer.

Det *Naturhistoriska Riksmuseum* har under året på vanliga tider hållits tillgängligt för allmänheten, Onsdagar och Söndagar afgiftsfritt samt Lördagar mot en personlig afgift af 25 öre. De besökandes antal har varit ganska betydligt helst under de afgiftsfria dagarne och framför allt om Söndagarne, då mången gång salarne varit ända till trängsel fyllda af de besökande. Men äfven vid Lördags-föreläsningarne har frekvensen varit större än under närmast föregående år. Sålunda hafva under året 376 inträdesbiljetter blifvit sålda, hvilket antal under det föregående året uppgick till endast 229. Äfvenså har antalet skolelever, som under lärares eller lärarinnors tillsyn fått afgiftsfritt besöka museum, under året tilltagit, i det att ej mindre än 1,638 elever under ledning af 89 lärare hafva begagnat sig af detta tillstånd, hvarjemte, likasom förut under flera år, 200 rekryter från Svea Lifgarde under juldagarne haft fritt tillträde. — En ny upplaga, den adertonde, af »Handledning vid beseendet af de zoologiska samlingarne» har under året utgifvits.

Vid Riksmuseets *Mineralogiska* afdelning har förvärfvet af märkligare mineralfynd från de Skandinaviska länderna varit föga

betydande. I detta afseende kunna dock nämnas: en del stuffer Vanadinit från mangangrufvorna vid Böhlet; åtskilliga vackra kristaller af gul titanit från Skaatö i Norge; några stora vackra glimmerkristaller från Bamble, Braunit i synnerligen vackra kristaller från Långban; Barysit, Hydrocerussit, gediget bly, Richterit, Manganosit, Periklas m. m. från samma fyndort, samt framför allt en från Köpenhamns Universitet till skänks erhållen värderik samling af de märkvärdiga, oftast vackert kristalliserade och egenomligt sammansatta mineral, som Doktor FLINK under en från Danmark bekostad expedition för några år sedan upptäckte i Julianehaabs distrikt på Grönland. Bland skänker må vidare anföras en del mineral insamlade under den senaste svenska expeditionen till Beeren Eiland, skänkta af Herr J. G. ANDERSSON; en vacker och dyrbar samling af guld från olika ställen i Klondyke, skänkt till museum af Häradshöfding C. A. V. EK. — Bland genom köp förvärfvade mineral förtjenar att ytterligare anföras inköp hufvudsakligast af amerikanska mineral från ENGLISH i New York och från KRANTZ i Bonn; en större mängd delvis vackra mineral från Pargas, inköpta från en arbetare vid dervarande kalkbrott, diverse mineral och vackra reproduktioner i glas af de berömdaste diamanter inköpta i Karlsbad. — Samlingen af meteoriter har ökats dels genom inköp från Mr. WARD i Amerika af meteorjern från Charcas, Chupaderos, Rancho de la Pila och Misteea i Mexico, dels genom inköp från KRANTZ af en meteorsten från Long Island, Kansas. — Till föremål, som från verldsrymden nedfallit till jordytan, räknas af många forskare numera äfven de ända till hasselnöt stora bollar af ett glaslikt ämne, som någon gång träffas i sandlager i Böhmen, Indien, Australien och Japan. Från den Böhmiska fyndorten har ett rikligt urval af detta gåtfulla mineral förvärfvats för museum.

Riksmuseets *Botaniska* afdelning har under året vunnit betydande tillväxt, och detta dels genom skänker samt dels genom byten och köp, Akademien har till afdelningen öfverlätit den växtsamling, som Docent B. LIDFORSS, hvilken af Akademien åtnjutit reseunderstöd, under sin resa hopbragt. Bland öfriga

gåfvor må i främsta rummet nämnas en synnerligt värdefull samling fanerogamer, alger och lafvar från 1899 års expedition till Jan Mayen och Ost-Grönland af Professor A. G. NATHORST, fanerogamer från 1900 års expedition till Ost-Grönland af Konservator G. KOLTHOFF och Kandidat K. A. G. GREDIN, en samling lafvar, hopbragt af Thwaites på Ceylon, af Professor E. ALMQVIST, samt de under året utkomna *Lichenes exsiccati* och *Lichenes monacenses* af Obergerichtsrath Dr. F. ARNOLD i München. Vidare må nämnas fanerogamer af Lektor E. ADLERZ, Rektor S. ALMQVIST, Öfverkontrollör P. G. BORÉN, Kamrer C. H. BRANDEL, Grefve C. O. CRONHJELM, Amanuens H. DAHLSTEDT, Kyrkoherde S. J. ENANDER, Hofkamrer H. HAFSTRÖM, Adjunkterne T. O. B. N. KROK och E. KÖHLER, Magister H. LINDBERG (Finland), Amanuens G. O. MALME, Läraren O. NOTÖ (Norge), Apotekaren C. PLEIJEL, Direktör F. SVANLUND och Skolläraren M. ÖSTMAN. Morfologiska föremål hafva skänkts af Vaktmästaren J. ERIKSSON, Professor A. G. NATHORST och Apotekaren C. PLEIJEL. Genom byte hafva erhållits de under året utkomna delarne af »Cryptogamæ exsiccata» utgifna af K. K. Naturhistoriska Hofmuseum i Wien, samt exotiska fanerogamer från Königl. Botanisches Museum i Berlin. Bland samlingar, som genom köp förvärfvats, må anföras exsiccaturverken: BRIOSI & CAVARA: »Funghi parasiti» XIII och XIV; COLLINS-HOLDEN & SETCHELL »Phycotheca boreali-americana» XIII—XV; H. DAHLSTEDT »Herbarium Hieraciorum Scandinaviæ» XII och XIII; E. M. HOLMES »Algæ britannicæ rariores» X; E. W. LINTON »Set of British Hieracia» VI; F. PAX »Herbarium cecidiologicum» XI; T. VESTERGREN »Micromycetes rariores selecti» XI—XV; E. WOLOCZSAK »Flora polonica exsiccata», och J. E. TILDEN »American Algæ» IV. Vidare hafva inköpts J. A. BJÖRLINGS efterlemnade samling arktiska växter, patagoniska och kilenska fanerogamer af P. DUSÉN, G. A. LINDBERGS efterlemnade samling afbildningar af Ripsalidéer och andra Cactacéer, fanerogamer och alger från Patagonien af E. NORDENSKIÖLD och O. F. BORGE, fanerogamer från Eldlandet af O. NORDENSKIÖLD och P. DUSÉN, fanerogamer från Sibirien af N. H.

NILSSON, mexikanska växter af C. G. PRINGLE, Plantæ Brasilie meridionalis af E. REINECK, växter från Sydafrika af R. SCHLECHTER, växter från Porto Rico af P. SINTENIS samt fanerogamer och svampar från Kamerun af G. ZENKER. — Delar af de skandinaviska, arktiska, allmänna och Regnellska herbarierna hafva för bearbetning varit utlemnade till specialister i Sverige, Danmark, Finland, Tyskland, Österrike, Holland, Belgien och Schweiz. För vetenskapliga ändamål hafva samlingarna varit på museum anlitade af Lektor E. ADLERZ, Rektor S. ALMQVIST, Adjunkt J. BERGGREN, Öfverkontrollör P. G. BORÉN, Kamrer C. H. BRANDEL, Amanuens H. DAHLSTEDT, Kyrkoherde S. J. ENANDER, Hofkamrer H. HAFSTRÖM, Adjunkt T. O. B. N. KROK, Professor G. LAGERHEIM, Kyrkoherde J. G. LAURELL, Lektor C. A. M. LINDMAN, Amanuens G. O. MALME, Kandidat N. H. NILSSON, Kandidat L. ROMELL, Amanuens C. SKOTTSBERG och Kyrkoherde A. TORSSANDER. — Såsom Regnellsk Amanuens har Doktor G. O. MALME varit anställd.

Riksmuseets *Vertebrat-afdelning* har under året hugnats med gåfvor af värderika föremål från Läroverksadjunkten L. KOLMODIN, Studerandene ADELSSON och G. WINBORGH, Ingeniör I. HÖK, Baron A. E. NORDENSKIÖLD och Amanuens P. E. C. ECKHOFF. Främst bland gåfvorna ställa sig dock de skäldjur, foglar och fiskar från Grönland, insamlade under Konservator KOLTHOFFS expedition, hvilka blifvit af Konsul G. E. BROMS, som bekostat denna expedition, till museum förärade. — Det vetenskapliga arbetet vid afdelningen har företrädesvis utgjorts af bestämning, beskrifning och katalogisering af de vertebrater, hvilka inköpts från Kandidat E. NORDENSKIÖLDs expedition till Patagonien, och hvaröfver en afhandling om Patagoniens färskvattensfiskar blifvit införd i Bihaget till Akademiens Handlingar, samt af bearbetning och beskrifning af de fiskar utaf släktet Lycodes, som hemförts genom den ofvannämnda Kolthoffs-expeditionen, och hvaröfver en afhandling jemväl blifvit i nämnda Bihang offentliggjord. Dessutom har en systematisk förteckning upprättats öfver de i afdelningens magasin förvarade lösa skelettdelar. — I museum har genom åt-

skilliga omflyttningar plats kunnat beredas för ett prydligt exponerande af de från 1899 års Grönlands-expedition hemförda 3 myskoxar och en polar-varg. — Vid konservators-verkstaden hafva, förutom åtskilliga smärre arbeten, fem af de från 1900 års Grönlands-expedition till museum förärade skäldjuren blifvit uppstoppade, färdiga att jemte fyra andra, som lagts under arbete, bilda en grupp i museum.

Riksmuseets *afdelning för lägre Evertebrater* har under året haft att glädja sig öfver ganska viktiga tillökningar, bland hvilka följande här böra omnämnas. Bland skänker må framhållas: i första rummet en samling borstmaskar, kräftdjur och ophiurider insamlade under Konservator G. KOLTHOFFS ishafsexpedition, bestämda af Professor A. WIRÉN och Docenten E. LÖNNBERG samt frikostigt öfverlemnade af Konsul G. E. BROMS; vidare ett antal typer af Actinier från Afrikas ostkust öfverlemnade af museet i Hamburg; en samling djur från sjön Tåkern af Läroverkskollegan W. A. ENGHOLM; några intestinalmaskar och en parasitkräfta af Ingeniör SUNDHOLM; några sällsynta typer af Trematoder och Nematoder af Docent L. JÄGERSKJÖLD; några stycken af korallstocken *Lophohelia protifera* med utsträckta djur af Licentiat H. ÖSTERGREN; några mollusker från sjön Tanganjika i Afrika af Löjtnant K. G. STÅLHAMMAR m. m. Genom byte har afdelningen förvärfvat ett antal Oligochæter, Nemertiner och andra maskar från Naturhistoriska Museum i Hamburg, samt några Bryozoeer från Rev. A. M. NORMAN i England. — Bland större inköp må nämnas hela den värdefulla evertibratsamling, som hemförts af framlidne Docenten C. AURIVILLIUS från Indiska arkipelagen, samt en samling lägre evertebrater från Patagonien hopbragt af Kandidat E. NORDENSKIÖLD. — För vetenskaplig bestämning och bearbetning hafva suiter af samlingar varit utlånade till Professorna W. LILLJEBORG, P. T. CLEVE, RAY LANKESTER vid British Museum, E. EHLERS i Göttingen, H. LUDWIG i Bonn, PAUL MAYER i Neapel, A. WIRÉN i Upsala och D. BERGENDAL i Lund, Dr. I. TIELE i Berlin, Dr. W. MICHAËLSEN i Hamburg, Dr. H. I. HANSEN i Köpenhamn, Lektor L. JOHANSSON i Upsala. Docenterne A. H.

HENNIG och A. OHLIN, Fil. Licentiaten HJ. ÖSTERGREN, Fil. Kandidaterne I. ARWIDSON, TH. ODHNER och W. SANDBERG samt Studeranden J. GUNNAR ANDERSSON. Af dessa utlånade samlingar hafva Borstmaskarne från Eldlandet, Ascidierna från samma trakter samt Caprellider och Amphipoder från nordiska haf återkommit i oskadadt skick. Bestämda af utlandets förnämste specialister äro de nu af synnerligen stort värde för museum. — Arbetet med samlingarnes ordnande och inregistrerande har under året oafbrutet fortgått. Vetenskapliga undersökningar hafva vid afdelningen utförts af Docenterna O. CARLGREN och E. LÖNNBERG, Filos. Licentiaten I. ARWIDSON samt Filos. Kandidat E. NORDENSKIÖLD och R. HÄGG. Slutligen bör nämnas, att en större utrustning öfverlemnats till Docenten L. JÄGERSKJÖLD, som åtagit sig att under sin resa i Egypten för Riksmuseum insamla naturföremål.

Den *Zoologiska stationen Kristineberg* har under året för studier och vetenskapliga undersökningar varit begagnad, utom af föreståndaren, af Professorerne G. RETZIUS och E. MÜLLER, Med. Doktor W. MÖLLER från Helsingfors, Docenten O. CARLGREN, Fil. Kandidaten A. M. BERGMAN, Herr A. D'AILLY, Läroverkskollega V. A. ENGHOLM, samt Fil. Kandidaterne L. RIBBING, K. A. ANDERSSON, A. ROMAN, C. O. NORÉN, R. HÄGG, E. NORDENSKIÖLD och N. HOLMGREN. — De ämnen, som hufvudsakligen utgjort föremål för vetenskapliga undersökningar, hafva varit: nervändningar i huden och finare nervstruktur hos evertebrater, huden hos Myxine, könsorgan hos Holothurier, den postembryonala utvecklingen hos Echinodermer, spermatogenesen, Bryozoernas organisation och utveckling, samt djurlifvet i smärre från hafvet tidtals afstängda vattensamlingar. — Såsom gäfvat har stationen fått af Professor G. RETZIUS mottaga ett antal faunistiska arbeten utgifna af Liverpools biologiska hafsstation m. fl. — Under året hafva flera nödvändiga ehuru rätt dyrbara förbättringar utförts å stationen. Sålunda har en vågbrytare uppförts till skydd för brygga och båtar. Dessutom har stationen, för att förekomma brist på dricksvatten, delat kostnaden med Fiskebäckskils kommun för att få en

större vattenreservoir på lämplig plats i närheten iordningställd. — Slutligen har, såsom vanligt, arbetsmateriel insamlats, behörigen konserverats och öfverlemnats till Rikets zootomiska institutioner, högskolor och museer.

Riksmuseets *Entomologiska* afdelning har under året emottagit följande gåfvor: en samling centralamerikanska *Hemiptera* från Museum GODMAN & SALVIN i London; en samling *Lepidoptera* från Congo hemförd af Hr. F. HALLING och skänkt till museum af Kandidat A. ROMAN i Upsala; några *Noctuidæ* och *Geometræ* från Boma vid nedre Congo, öfverlemnade af L. CANDÈZE i Liège; ett par afrikanska *Termit*arter från museet i Leyden; en samling sydafrikanska *Corallider* från L. PÉRINGUEY i Capstaden; tre arter *Termiter* från Dr. A. MAELTZKOW i Strassburg; en samling svenska insektslarver af Kandidat I. TRÄGÅRDH; några sällsynta afrikanska *Lepidoptera* från J. ERTL i Landshut; en större samling insekter från A. L. MONTANDON i Bukarest; flere exemplar af *Dorylus Wilverthi* Em. från E. WASMANN; några sydafrikanska *Paussider* och andra *Coleoptera* från L. PÉRINGUEY; fem arter bin och getingar från Sydamerika jemte biologiska anteckningar om dem af Lektor C. A. LINDMAN; några *Formicider* från museet i Greifswald; talrika larvceller af *Trachusa serratulæ* från Östergötland och Medelpad af Lektor G. ADLERZ; en samling af sällsynta och synnerligen intressanta svenska mätarefjärilar från Medelpad af Bataljonsläkaren L. TRAFVENFELT i Liden; af Konservator G. KOLTHOFF och Konsul E. BROMS alla under 1900-års svenska polar-expedition insamlade insekter och spindeldjur; några sällsynta skalbaggar från Ingeniör J. FAUST i Libau; en samling af 33 arter *Diptera* från Egypten af TH. BECKER i Liegnitz; en större samling af sällsynta och för museum nya *Lepidoptera* från Mashunalandet i Brittiska Sydafrika samt en mycket vacker och synnerligt värdefull samling af dagfjärilar från Stefansort i Tyska Ny Guinea, skänkt af Hr. F. WANDRES och hemsänd af framlidne Dr. E. NYMAN. — Genom inköp har afdelningen förvärfvat en samling hufvudsakligen afrikanska *Lepidoptera* från E. HEYNE i Leipzig; de af Kandidat E. NORDENSKIÖLD i Patagonien och under

den svenska expeditionen under Kandidat G. ANDERSSON på Beeren Eiland insamlade insekter och spindeldjur, samt en samling insekter från nedre Congo hemförd af missionär E. LAMAN. — För vetenskaplig granskning och bestämning hafva samlingar utlånats till Professor O. M. REUTER i Helsingfors, W. W. FOWLER i Lincoln (England), Mr. L. PERINGUEY i Kapstaden, Mr. W. L. DISTANT i London, Kandidat I. TRÄGÅRDH i Upsala, Ingeniör J. FAUST i Libau, Disponenten J. B. ERICSON i Mölndal, Dr. W. SÖRENSEN i Köpenhamn, Dr. O. STAUDINGER i Blasewitz, Oberlehrer P. STEIN i Genthin, Mr. G. F. HAMPSON i London, Dr. H. SCHÖTT i Linköping, Dr. FRANZ SPOETH i Wien, Mr. M. BURR i London, Dr. L. MELICHOR i Wien, Dr. H. FRIESE i Jena, Mr. G. C. CHAMPION i London, Mr. T. TSCHITSCHERINE i Sima (Ryssland), Konservator SIG THOR i Kristiania och Docenten SIMON BENGTTSSON i Lund. — Vid afdelningen hafva samlingarne för studier och forskningar begagnats af Professor S. LAMPA, Dr. C. J. E. HAGLUND, Dr. Y. SJÖSTEDT, Dr. H. NORDENSTRÖM, Hr. G. HOFGREN, Kandidat A. ROMAN, Dr. H. SCHÖTT, Förste Fiskeriasistenten F. TRYBOM, Kandidat A. TULLGREN, Öfverjägmästaren J. H. WERMELIN, Lektor G. ADLERZ, m. fl. — Intendenten har under året genomgått och provisoriskt efter familjer ordnat museets material af obestämda orthoptera och hymenoptera samt definitivt den allmänna samlingen af bin (Apidæ) och getingar (Vespidæ) uti tillsammans 36 lådor. Vidare hafva museets Pierider granskats och ordnats i 27 lådor, hvarjemte årets förvärf och skänker insatts på sina platser samt delvis granskats och bearbetats. Dessutom hafva vissa grupper af exotiska Cerambycider och Lepidoptera blifvit bestämda. — Doktor Y. SJÖSTEDT, som delvis med understöd från Regnells zoologiska gäfvomedel tjenstgjort som biträde vid afdelningen från 1 Januari till 1 April samt från 1 Oktober intill årets slut, har fortsatt bearbetningen af de Orthoptera, som han för museets räkning hemfört från Kamerun, samt preparerat de under året tillkomna samlingarne. — Professor S. LAMPA och Hr. G. HOFGREN hafva under året gjort afdelningen stora tjenester, den förre genom att fortsätta ordnandet af de svenska Tortriciderna,

den senare genom att fullständigt hafva preparerat, ordnat och bestämt samlingen af svenska Pyralider. — Doktor E. HAGLUND har äfven under en del af detta år varit sysselsatt med att ordna afdelningens stora samling af exotiska Hemiptera och dervid medhunnit Conciderna och en del af Lygdiderna. — Afdelningens samlingar hafva helt och hållet eller delvis legat till grund för 10 afhandlingar, som under året blifvit offentliggjorda dels i Akademimens skrifter, dels i Entomologisk Tidskrift och dels i Entomologische Nachrichten.

Riksmuseets *Paleontologiska* afdelning har under det förflutna året såsom gifva fått mottaga af Deras Kongl. Högheter Prinsarne GUSTAF ADOLF och WILHELM en samling marlekor från trakten af Tullgarn, af Professor CHR. AURIVILLIUS undersiluriska fossil från ön Ramsan vid Singön, af Doktor C. GRÖNVALL i Köpenhamn två arter sällsynta fossil från Danmarks kritformation, af Kapten J. HAGLUND en Megalaspis från Westergötland, af Professor A. G. NATHORST värdefulla fossilsamlingar från Beeren Eiland samt från Frans Josefs fjord på Grönland, af Professor C. D. WALCOTT i Washington några försteningar ur Nordmerikas Cambriska formation. Bland större genom inköp förvärfvade samlingar må främst nämnas en art- och formrik samling från Beeren Eilands Permo-Carbonformation, en större samling geologiska och paleontologiska fotografibilder öfver Gotlands silurfauna genom Doktor G. HOLM, försteningar från Östergötland, Gotland och Gotska Sandön, samt genom särskilda undersökningar viktiga bidrag till kännedomen om silurformationen vid Borensult. Samlingar af utländska trilobiter och koraller hafva erhållits från tyska och franska naturalie-handlare. — Samlingarne hafva för vetenskapliga arbeten anlitats, utom af Intendenten sjelf, af Studeranden J. G. ANDERSSON, Doktor C. GRÖNVALL, Doktor FR. VON HEUNE i Tübingen samt Kandidaten E. NORDENSKÖLD. — De ordinarie museiarbetena hafva fortgått såsom vanligt, och de under föregående år af Intendenten påbörjade vetenskapliga undersökningarne öfver trilobiternas synorganer hafva forsatts och afslutats.

Riksmuseets *afdelning för arkegoniater och fossila växter* har under året såsom gåfvor fått mottaga: en större värderik samling växtförsteningar från Skånes kolförande aflagringar, hvilken samling blifvit från Sveriges Geologiska Undersökning till afdelnngen öfverlemnad; de under de svenska polarexpeditionerna 1898 och 1899 med »Antarctic» på Beeren Eiland, Spetsbergen, Kung Karls land, Jan Mayen och Östra Grönland insamlade drifvedsprofven, af Professor A. G. NATHORST; hvarjemte från Riksmuseets Botaniska afdelning öfverlemnats några inom densamma förvarade drifvedssamlingar; vidare diverse andra föremål från de Botaniska. Mineralogiska och Paleontologiska afdelningarne. Genom inköp hafva förvärfvats: en af Ingeniör P. DUSÉN hopbragt samling bladmassor från Patagonien och Chile, kalktuff från Skåne och bäfvergnagade stammar från Wermland. — För vetenskapliga studier hafva samlingarne anlitats af Docenten G. ANDERSSON, Lektor K. W. ARNELL, Ingeniör P. DUSÉN, Apotekaren C. JENSEN i Hvalsö (Danmark), Lektor C. LINDMAN samt Hr. F. STEPHANI i Leipzig.

Riksmuseets *Etnografiska afdelning* har under det gängna året vunnit en högst betydande tillökning genom gåfvor. Från sin musei-afdelning har Professor A. G. NATHORST öfverlemnats två kinesiska gudabilder skurna i trärot. Vidare hafva öfverlemnats: af Löjtnant K. G. STÅLHANDSKE en samling vapen och prydnader från trakten af Tanganjika i Afrika; af Chefen för Tyska N. Guineakompaniet i Hongkong Hr. F. WANDRES, som redan förtut upprepade gånger ihågkommit museum med gåfvor, en dyrbar samling af vapen m. m. från Borneo, Java m. fl. Malajiska öar; af Med. Doktor E. SEDERHOLM ett med menniskohud öfverdraget hufvud från Ashantes; af Generalkonsul C. G. BELINFANTE ÖSTBERG en samling vapen från Sudan och silfverprydnader m. m. från Chile; af Doktor C. BOVALLIUS dels ett antal fornsaker från Nicaragua, dels en större samling föremål från det inre af Venezuela; af Sjökapten C. HITZWEBEL i Hamburg en höfdingestol från Somali-landet; af Hr. C. V. HARTMAN föremål från Mexico; af Professor H. V. ROSENDAHL en samling

Lappska saker; af Hotellégaren L. LEVIN en större stenyxa från Australien; af Grefve E. VON ROSEN ett dyrbart, i brons gjutet människohufvud från Benin i V. Afrika. Professor G. RETZIUS har såsom gåfva öfverlemnat samtliga sina hittills i museum förvarade deposita, omkring 200 till antalet, från skilda delar af jorden; och slutligen har Svenska Sällskapet för Antropologi och Geografi definitivt öfverlätit hela sin stora och dyrbara etnografiska samling, omkring 1,500 nummer, af hvilken hittills en mindre del varit deponerad. — Den ojemförligt största tillökningen har museum dock erhållit derigenom, att Ingeniör ÅKE SJÖGREN anhållit att museum redan nu måtte mottaga de förut genom gåfvobref utlofvade storartade centralamerikanska samlingar, hvilka på hans bekostnad hopbragts af Hr. C. V. HARTMAN och som hittills förvarats på Mälsåkers slott, — en anhållan, som Föreståndaren på giltiga grunder ansett sig böra tillmötesgå, hvarför dessa samlingar blifvit mottagna och med Hr. HARTMANS biträde systematiskt uppställda. Såsom depositioner har afdelningen fått mottaga dels från Vetenskaps Societeten i Upsala en värdefull samling äldre hufvudsakligen kinesiska föremål, antagligen härrörande från C. P. THUNBERGS resa, dels från Vitterhets- Historie- och Antiquitets Akademien en samling af 29 Lappska spåtrummor från 16- och 1700-talen. Vidare hafva i Museum deponerats och derstädes katalogiserats dels framlidne Dr. E. NYMANS stora och dyrbara samling från Nya Guinea och Malajiska öarne, dels Missionärerne M. BÄCKLUNDS och L. E. HÖGBERGS samlingar från Central Asien och Kandidat F. R. MARTINS hufvudsakligen japanska samling. Genom köp har afdelningen under året riktats med 110 föremål. Totala tillökningen genom gåfvor, köp och depositioner uppgår sedan början af år 1900 till 10,500 nummer. — Från den afdelning af samlingarne, hvilken benämnes Afdelning I, hafva under året afskilts de rikhaltiga samlingarne från Sibirien (Tschuktscher, Ostjaker, Samojeder m. fl.), hvilka öfverförts till den andra afdelningen, benämnd Afdelning II, som, sedan förut derstädes uppställda fornamerikanska samlingen blifvit till den förra afdelningen öfverflyttad, numera uteslutande omfattar de

asiatiska folken. Vid denna afdelning har, till jemförelse med öfriga der representerade mongoliska ren-nomader, en Lappsksamling börjat anläggas. Den förra afdelningen, I, skall numera omfatta Australien, Amerika och Afrika, och derstädes har en genomgående revision af hela materialet försiggått för åstadkommande af något etnografiskt system i samlingarnes uppställning. — Vid katalogisering har ett nytt system införts, som efter hand skall tillämpas äfven på hela den äldre delen af samlingarne. Under året hafva i allt 2,346 nummer katalogiserats och signerats. — Samlingarne hafva för vetenskapliga studier under året besökts af Direktören för »Pitt Rivers Museum» i Oxford Mr. H. BALFOUR, Direktören för Danska Nationalmuseets etnografiska och arkeologiska afdelningar Dr. SOPHUS MÜLLER, Assistenten vid samma museum T. THOMSEN och Fil. Kandidaten A. RUDNEFF från St. Petersburg, hvilken senare gjort museum stora tjänster genom tydandet af en mängd inskrifter å de kinesiska föremålen.

De medel, öfver hvilka Akademien på grund af donationer under året egt att förfoga, hafva för sina föreskrifna ändamål blifvit på efterföljande sätt använda.

Den *Letterstedtska* donationens årsränta har blifvit fördelad i enlighet med donators föreskrifter. Sålunda har *Letterstedtska* resestipendiet, öfver hvilket Akademien varit i tur att förfoga för främjande af tekniska eller ingenjörstudier, blifvit tilldeladt *Civilingenjören* ERIK DELIN med uppgift att i utlandet och särskildt i Norra Amerika inhemta praktiska insigter i skeppsbyggnadskonsten. — De *Letterstedtska* räntemedlen till pris för förtjenstfulla originalarbeten eller viktiga upptäckter har tillerkänts f. d. Professorn W. LILLJEBORG för hans under nästlidne år utgifna arbete »*Cladocera Sueciæ*». — *Letterstedtska* priset för förtjenstfulla öfversättningar till svenska språket har tilldelats Doktorinnan ANNA GEETE, född HAMILTON, för hennes under en följd af år utgifna förtjenstfulla öfversättningar af de bästa engelska och amerikanska författares skönliterära arbeten. — *Letterstedtska*

medlen för maktpåliggande undersökningar hafva blifvit ställda till Docentent A. HAMBERGS förfogande såsom understöd för fortsättning af hans föregående undersökningar angående de glaciala och meteorologiska förhållandena i Sarjeks fjelltrakter i nordliga Sverige. — Letterstedtska slägtstipendiet har fortfarande med 2,000 kronor utgått till donators dotterson ynglingen YVES GABRIEL LETTERSTEDT DE MONTMORT. — Utaf donationens årsränta hafva föreskrifna andelar blifvit öfverlemnade till Domkapitlet i Linköping för utdelande af belöningar åt förtjenta folkskolelärare inom detta stift, till Pastorsembetet i Wallerstads församling af samma stift för utdelande af premier i församlingens folkskola och bildandet af ett sockenbibliotek m. m., äfvensom till Direktionen öfver Serafimer-Lasarettet i Stockholm för nödlidande sjuka resandes vård derstädes.

Letterstedtska Föreningens fonder, som äro ställda under Akademiens förvaltning, uppgingo vid 1900 års slut till ett sammanlagdt kapital af 735,008 kronor 26 öre, hvarjemte vid samma tidpunkt fanns en disponibel räntebehållning af 15,578 kronor 4 öre, som blifvit till Föreningens Styrelses förfogande öfverlemnad.

Den *Wallmarkska* donationens årsränta har blifvit fördelad i två lika stora belöningar, af hvilka den ena tillerkänts Professorn K. ÅNGSTRÖM för hans i Upsala Vetenskaps societets »Acta» införda afhandling: »Intensité de la radiation solaire à différentes altitudes, recherches faites à Teneriffa 1895 et 1896», och den andra belöningen t. f. Professorn vid Tekniska Högskolan I. O. BENDIXSON för hans i tidskriften »Acta mathematica» offentliggjorda afhandling: »Sur les couches définies par les Equations différentielles.»

Den *Edlundska* belöningen har tilldelats Professor O. WIDMAN för fyra af honom författade och i Bihang till Akademiens Handlingar införda afhandlingar af kemiskt innehåll.

Den *Ferrnerska* belöningen har tilldelats Fil. Kandidaten H. H. VON ZEIPPEL för en i nyssnämnda Bihang intagen afhandling: »Recherches sur l'existence des séries de Mr. Lindstedt».

Den *Lindbomska* belöningen har Akademien detta år icke

funnit anledning att bortgifva, utan kommer donationens årsränta att läggas till donationens kapital.

Den *Flormanska* belöningen har tilldelats Docenten O. CARLGREN för ett af honom under året utgifvet arbete: »Ostafrikanische Actinien gesammelt von Doctor R. STUHLMANN.»

Det *Berzeliska* stipendiet har fortfarande innehaft af Docenten W. PALMÆR.

Det *Beskowska* stipendiet, som äfven denna gång skulle bortgifvas för idkande af fysiskt-matematiska studier, har tilldelats Fil. Licentiaten KNUT WINGE med uppgift att vid Stockholms Högskola bearbeta insamladt material rörande Dalformationen.

Regnelliska resestipendiet har tilldelats Amanuensen vid Riksmuseum Dr. G. O. MALME med uppgift att i Brasilien och angränsande länder idka botaniska forskningar.

Af *Regnells zoologiska gåfvomedel* hafva följande understöd blifvit anvisade:

åt Docenten O. CARLGREN 500 kronor för fortsatt bearbetning af Riksmuseets Actinier;

åt Fil. Doktor Y. SJÖSTEDT 500 kronor för fortsatt bearbetning af Riksmuseets samling af Orthoptera från Kamerun;

åt Filos. Licentiaten GABR. ANDERSSON 500 kronor för bearbetning af skeletter magasinerade vid Riksmuseets Vertebrat-afdelning, och

åt Filos. Kandidaten I. ARWIDSSON 250 kronor för bearbetning af Riksmuseets Maldanider.

Årsräntan af *Hahnska* donationen har tilldelats Fysiske Laboratorn Dr. P. G. D. GRANQVIST såsom understöd för fortsatta undersökningarne öfver katodstrålarne.

Öfver det *Wahlbergiska stipendiet* är Akademien närmast i tur att förfoga, hvarför detsamma kommer att af Akademien i vederbörlig ordning kungöras till ansökning.

Årsräntan af *Scheelefonden*, öfver hvilken Akademien varit i tur att förfoga, har anvisats åt Ingeniören J. KÖHLER såsom understöd för fullgörande af redan påbörjade undersökningar öfver grankådan i kemiskt afseende.

För utförande af resor inom landet med ändamål att undersöka dess naturförhållanden har Akademien anvisat understöd åt följande 11 yngre naturforskare:

åt Friherre C. KURCK 125 kr. för att i Skåne fortsätta undersökningen af kalktuffaunan och floran;

åt Redaktör W. BÜLOW 125 kr. för idkande af mykologiska studier i Skåne och Blekinge;

åt Amanuensen C. J. SKOTTSBERG 125 kr. för att i löfängar i Stockholms skärgård studera insekternas förhållande till pollinations-arbetet;

åt Docenten R. SERNANDER 150 kr. för biologiska och utvecklingshistoriska studier öfver vegetationen i Uplands yttersta skärgård;

åt Kandidaten H. HESSELMAN 150 kr. för slutförande af hans biologiskt-fysiologiska forskningar inom löfängar i Stockholms norra skärgård;

åt Docenten A. OHLIN 125 kr. för att vid Kristinebergs zoologiska station utföra systematiska och embryologiska studier öfver Malacostraca;

åt Kandidaten K. A. ANDERSSON 100 kr. för studier öfver Bryozoeer vid Kristineberg;

åt Kandidaten E. WAHLGREN 125 kr. för studier af våra sydliga provinser apterygot-fauna;

åt Licentiaten I. ARWIDSSON 100 kr. för studium af Maldanider vid Gullmaren;

åt Docenten H. WALLENGREN 125 kr. för studium af ciliata infusorier i norra Skåne och Småland; och

åt Kandidat N. HOLMGREN 100 kr. för anatomiska och biologiska studier öfver insekterna i Stockholms skärgård.

Statsanslaget för instrumentmakeriernas uppmuntrande har fortfarande blifvit lika fördeladt mellan matematiska och fysiska instrumentmakarne P. M. SÖRENSEN och G. SÖRENSEN.

Den minnespenning, som Akademien till denna sin högtidsdag låtit prägla, är egnad åt minnet af hennes framlidne ledamot Professorn i zoologi vid Lunds universitet SVEN NILSSON.

Genom döden har Akademien bland sina inländska ledamöter förlorat: Brukspatronen GÖRAN FREDRIK GÖRANSON, Bankofullmäktigen Doktor JOHAN WOLTER ARNBERG, f. d. Chefen för Sveriges geologiska undersökning Professor OTTO MARTIN TORELL, Professorn JAKOB GEORG AGARDH, Lektorn CHRISTIAN FREDRIK LINDMAN, f. d. Utrikes Ministern Grefve ALBERT EHRENSVÄRD, Professorn CARL JAKOB ROSSANDER och Kanslirådet Friherre ALFRED FOCK; samt bland sina utländska ledamöter: Professorn vid Collège de France JOSEPH LOUIS BERTRAND, Professorn vid universitetet i Heidelberg WILLY KÜHNE, Professorn vid Jardin des plantes i Paris ALPHONSE MILNE-EDWARDS, Professorn vid Medicinska Fakulteten i Lyon LEOPOLD OLLIER, Professorn vid universitetet i Paris CHARLES HERMITE, f. d. Professorn vid universitetet i München MAX VON PETTENHOFER och f. d. Professorn vid Polytekniska Institutet i Dresden OSCAR SCHLÖMILCH.

Med sitt samfund har Akademien deremot såsom nya ledamöter förenat, inom Sverige och Norge: Professorn vid universitetet i Lund KNUT FREDRIK SÖDERVALL, Akademiens Bibliotekarie Dr. ERIK WILHELM DAHLGREN, Professorn vid universitetet i Kristiania GEORG OSSIAN SARS, Direktören för Norges Statistiska Centralbyrå ANDERS NICOLAI KJÆR, Disponenten för Stora Kopparbergs Bergslag ERIK JOHAN LJUNGBERG och Öfverläkaren vid Sabbatsbergs sjukhus FRANS WILHELM WARFVINGE; samt i utlandet: Chefen för Engelska mariningeniör-staten WILLIAM HENRY WHITE, Professorn vid universitetet i Paris HENRI POINCARÉ, Professorn och Chefen för den paleontologiska afdelningen af Naturhistoriska Museum i Paris ALBERT GAUDRY, Professorn vid universitetet i Heidelberg VINCENZ CZERNY och Professorn vid Polytekniska skolan i Zürich LUDVIG TETMAJER. Dessutom har förutvarande inländska ledamoten Professor ROBERT TIGERSTEDT blifvit öfverflyttad till utländsk ledamot, sedan han, såsom utnämnd Professor vid universitetet i Helsingfors, upphört att vara svensk undersåte.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 264.)

Catania. *Accademia Gioenia di scienze naturali.*

Atti. Anno 77 (1900). 4:o.

Bollettino delle sedute. Fasc. 44—45. 1900. 8:o.

— *R. Osservatorio.*

7 st. småskrifter.

Chambésy. *Herbier Boissier.*

Bulletin. (2) T. 1 (1901): N:o 4. 8:o.

Chemnitz. *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*

Jahrbuch. Jahrg. 16 (1898): Abth. 1. 4:o.

Frankfurt a. M. *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*

Abhandlungen. Bd 25: H. 2. 1901. 4:o.

Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*

Nachrichten. Math.-phys. Kl. 1900: H. 4. 8:o.

» Phil.-Hist. Kl. 1900: H. 3. 8:o.

Hamburg. *Deutsche Seewarte.*

Deutsches meteorologisches Jahrbuch. Jahrg. 22 (1899). 4:o.

Karlsruhe. *Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogthum Baden.*

Niederschlagsbeobachtungen der meteorologischen Stationen. Jahrg. 1900: Halbjahr 2. 4:o.

Kharkow. *Université Impériale.*

Annales. 1901: Kn. 1. 8:o.

Kjöbenhavn. *Naturhistorisk Forening.*

Videnskabelige Meddelelser. Aarg. 1900. 8:o.

— *Kgl. danske Videnskabernes Selskab.*

Oversigt. 1900: Nr 6; 1901: 1. 8:o.

— *Meteorologisk Institut.*

Bulletin météorologique du Nord. Année 1900. 4:o.

Krakau. *Académie des sciences.*

Bulletin international. 1900: 12. 8:o.

Kristiania. *Det norske Justervæsen.*

Aarsberetning. 24 (1900). 8:o.

Leon. *Observatorio meteorologico.*

Boletin mensual. 1900: 1—12. 4:o.

Liége. *Société géologique.*

Annales. T. 25: Livr. 1; 27: 4; 28: 1. 4:o & 8:o.

London. *Nautical Almanac Office.*

Nautical almanac. Year 1904. 8:o.

— *Meteorological Office.*

Monthly Pilot charts. 1901: 4. Fol.

— *R. Astronomical society.*

Monthly notices. Vol. 61 (1900, 1901): N:o 4. 8:o.

— *Chemical Society.*

Journal. Vols. 77—78 (1900): Suppl.; 79—80 (1901): 4. 8:o.

Proceedings. Vol. 17 (1900/01): N:o 234. 8:o.

- London.** *R. Meteorological society.*
 Quarterly Journal. 1901: 1. 8:o.
 — *The Royal Society.*
 Proceedings. Vol. 68 (1901): N:o 443. 8:o.
 Year-book. 1901. 8:o.
 Reports to the malaria committee. Ser. 4. 1901. 8:o.
- London, Ontario.** *Entomological society of Ontario.*
 The Canadian Entomologist. Vol. 33 (1901): N:o 3. 8:o.
 Annual report. 1900. 8:o.
- Luxembourg.** *Société botanique.*
 Recueil des mémoires et des travaux. N:o 14 (1897/99). 8:o.
- Madison.** *Wisconsin Academy of sciences, arts, and letters.*
 Transactions. Vol. 12 (1899): P. 2. 8:o.
- Manchester.** *Literary and philosophical society.*
 Memoirs and proceedings. Vol. 45 (1900/01): P. 1. 8:o.
- Mexico.** *Instituto geológico.*
 Boletín. Num. 14: P. 1. 1900. 4:o.
 — *Instituto médico nacional.*
 Anales. T. 4 (1900): Num. 15. 8:o.
- Montevideo.** *Observatorio meteorológico del Colegio Pio de Villa Colón.*
 Boletín mensual. Año 12 (1901): N:o 4—6. 8:o.
- Moskva.** *Observatoire météorologique de l'université.*
 Observations. 1898: 12. 8:o.
- Mount Hamilton.** *Lick observatory.*
 Bulletin. 1 (1900). 4:o.
- München.** *K. B. Akademie der Wissenschaften.*
 Sitzungsberichte. Math.-phys. Cl. 1900: H. 3 & Inhaltsverzeichniss 1886—99. 8:o.
 , Philos.-philol. Cl. 1900: H. 4 & Inhaltsverzeichniss 1886—99. 8:o.
 — *K. Meteorologische Central-Station.*
 Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern. 1901: 1. 4:o.
- New Haven.** *Connecticut academy of arts and sciences.*
 Transactions. Vol. 10: P. 2. 1900. 8:o.
- Ottawa.** *Geological survey of Canada.*
 Relief map of Canada and the U. S. 1900. Fol.
- Paris.** *Bureau des longitudes.*
 Connaissance des temps . . . pour les années 1902—1903. 8:o.
 , , , Extrait à l'usage des écoles d'hydrogr. . . . 1901—1902. 8:o.
 Annuaire. 1901. 12:o.
- LOEWY, M.,** Ephémérides des étoiles de culmination lunaire et de longitude pour 1901—1902. 4:o.
- *Observatoire.*
 Carte photographique du ciel. 1900. 18 bl. Fol.
- Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh.* 1901. Årg. 58. N:o 4.

Paris. *Société de géographie.*

La Géographie. Année 1901: N:o 3. 8:o.

— *Société géologique de France.*

Bulletin. (3) T. 28 (1900): N:o 7. 8:o.

Pisa. *Società Toscana di Scienze Naturali.*

Atti. Processi verbali. Vol. 12 (1900/1901): p. 138—168. 8:o.

Pola. *K. K. Hydrogr. Amt der K. u. k. Kriegs-Marine.*

Meteorologische Termin-Beobachtungen. 1901: 2. Fol.

Prag. *K. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*

Sitzungsberichte. Math.-naturw. Cl. 1900. 8:o.

» Cl. f. Philos., Gesch. . . 1900. 8:o.

Jahresbericht. 1900. 8:o.

NĚMEC, B., Studie o dráždivosti rostlinné plasmy. Prag 1900. 8:o.

Puebla. *Colegio catolico del Sagrado Corazón de Jesús.*

Observaciones meteorológicas. 1900. Fol.

Rio de Janeiro. *Directorio de meteorologia da marinha.*

Boletim semestral. 6. 1900. 8:o.

» mensaes. Anno 5 (1900): 7—9. 4:o.

Roma. *R. Accademia dei Lincei.*

Cl. di scienze morali . . .

Rendiconti. (5) Vol. 9 (1900): Fasc. 9—12. 8:o.

Cl. di scienze fisiche . . .

Rendiconti. (5) Vol. 10 (1901): Sem. 1: Fasc. 5—6. 8:o.

— *Ministero di agricoltura.*

Rivista meteorico-agraria. Anno 21 (1900): N. 1—20, 22—25, 27—33, 35—36. 8:o.

S:t Petersburg. *Comité géologique.*

Bulletins. 1900: 1—6. 8:o.

Mémoires. Vol. 13 (1900): N:o 3. 4:o.

— *Institut Imp. de médecine expérimentale.*

Archives. T. 8: N:o 2. 1900. 4:o.

— *Laboratoire biologique.*

Bulletin. T. 4: B. 4. 1901. 8:o.

— *Musée zoologique.*

Annuaire. T. 5 (1900): N:o 4. 8:o.

San Francisco. *Astronomical society of the Pacific.*

Publications. Vol. 13 (1901): N:o 77. 8:o.

Tacubaya. *Observatorio astronómico nacional.*

Anuario. Año 21 (1901). 8:o.

Tōkyō. *Earthquake Investigation Committee.*

Publications in foreign languages. N:o 5—6. 1901. 8:o.

— *Central meteorological observatory.*

Weather chart. 1901: 1. Fol.

Torino. *R. Accademia delle scienze.*

Atti. Vol. 26 (1900/01): Disp. 1—5. 8:o.

Memorie. (2) T. 50. 1901. 4:o.

— *Osservatorio astronomico.*

Osservazioni meteorologiche. 1900. 8:o.

Toronto. University.

- Studies. Anat. Ser. N:o 1. 1900. 8:o.
 » Psychol. Ser. N:o 4. 1900. 8:o.
 » Geol. Ser. N:o 1. 1900. 8:o.

Washington. Academy of sciences.

Proceedings. Vol. 3 (1901): pp. 1—138. 8:o.

— Bureau of american ethnology.

Annual report. 17 (1895—96): P. 2. 8:o.

— U. S. Weather bureau.

Monthly weather review. 1900: 1—12 & Annual summary. 4:o.

Weather map. 1900: 11—12. Fol.

— U. S. Department of agriculture.

Publications. 1901: Jan. & Febr. 8:o & 4:o.

Zürich. Sternwarte

WOLFER, A., Sur l'existence, la distribution et le mouvement de principaux centres présumés de l'activité solaire. 1901. 8:o.

Af Dr. J. Bergstedt:

BRODÉN, T., Bemerkungen über Mengenlehre u. Wahrscheinlichkeitstheorie ... Malmö 1901. 8:o.

Af Dr. C. Lindman:

UHR, D., Handledning vid insamling af medicinalväxter ... Sthlm 1900. 8:o.

Af Prof. A. G. Nathorst:

Karta öfver van Mijens bay och Belsund upprättad under 1898 års svenska polarexped.

MADSEN, J., Moskusoksen og det danske Klima. Khvn 1901. 8:o.

Af utgifvarne:

Svensk kemisk tidskrift, utg. af Å. G. EKSTRAND. Årg. 13 (1901): H. 3. 8:o.

Svenska jägareförbundets nya tidskrift, utg. af A. WAHLGREN. Årg. 30 (1901): H. 1. 8:o.

Le Devoir. Revue des questions sociales. Publ. par M:me V:ve GODIN. T. 25 (1901): 3. 8:o.

La Feuille des jeunes naturalistes. Publ. par M. A. DOLLFUS. 1901: N:o 366 & Cat. de la bibl. Fasc. 30. 1901. 8:o.

Af författarne:

EKHOLM, N., On the variations of the climate of the geological and historical past and their causes. London 1901. 8:o.

— 3 st. småskrifter.

MURBECK, SV., Parthenogenetische Embryobildung in der Gattung Alchemilla. Lund 1901. 4:o.

— 6 st. småskrifter 8:o & 4:o.

NATHORST, A. G., Två somrar i Norra Ishafvet. H. 9. Sthlm 1901.

ALBANESE DI BOTERNO, V., In commemorazione di Umberto I. Modena 1901. 8:o.

Af författarne:

- ARNOLD, F., Die Lichenen des fränkischen Jura. Regensburg 1885. 8:o.
- Lichenes exsiccati 1859—1893. München 1894. 8:o.
- BERTHELOT, M., Les carbures d'hydrogène 1851—1901. Paris 1901. 8:o.
- GADOT, A., Les unités de la force. 1—3. Paris 1900. 8:o.
- LINDROTH, J. I., Beiträge zur Pilzflora Finlands. Hfors 1899. 8:o.
- 4 st. småskrifter. 8:o.
- MALAISE, C., État actuel de nos connaissances sur le silurien de la Belgique. Liège 1900. 4:o.
- 2 st. småskrifter.
- ROYER, CL., La constitution du monde. Paris 1900. 8:o.
- SCHUBERT, J., Vergleichende Temperatur- u. Feuchtigkeitsbestimmungen. Berlin 1901. 4:o.
- SOCOLOW, S., Corrélations régulières. Suppl. 1901. 8:o.
- WARNER, W. R., A few astronomical instruments. Cleveland 1900. 4:o.
- WILLE, N., Studien üb. Chlorophyceen. I—VII. Kra 1901. 8:o.
- Algologische Notizen. 7, 8. Kra 1901. 8:o.
- GEHSNER DE CONINCK, M., La chimie de l'Uranium. Montpellier 1901. 8:o.



ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 58.

1901.

N^o 5.

Onsdagen den 8 Maj.

INNEHÅLL:

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 295.
PETRINI, Ueber Functionen die ein algebraisches Additionstheorem besitzen	» 297.
OSEEN, Ueber einige irreduciblen Gruppen von Berührungstransformationen im Raume	» 307.
NORDENSKIÖLD, Beiträge zur Kenntnis des Molybdänsemipentoxyds	» 343.
HELLSTRÖM, Om grundämnenas uppkomst	» 351.
Skänker till Akademiens Bibliotek	sidd. 296, 306, 350, 366.

Herr LOVÉN redogjorde för innehållet af den berättelse, som afgifvits af Adjunkten vid Ultuna Landtbruksinstitut P. E. ULLBERG om den utländska resa, som han, i egenskap af utaf Akademien utsedd Byzantinsk stipendiat, utfört för studerande af kulturteknik i allmänhet och särskildt för fältbyggnadslära.

Friherre NORDENSKIÖLD förevisade och beskref åtskilliga radioaktiva mineral och prof på de från dem utsända radiumstrålarnes inverkan på fotografistrålar.

Herr DUNÉR redogjorde för en af Observatorn Ö. BERGSTRAND å observatorium i Upsala utförd bestämning af parallaxen för en stjärna i stjernbilden Svanen, samt lemnade några meddelanden öfver den nya stjernan i stjernbilden Perseus.

Herr BOHLIN redogjorde för de observationer, som vid Stockholms observatorium utförts öfver variationerna i ljusstyrkan hos ofvannämnda nya stjärna i Perseus.

Herr ROSÉN lemnade meddelanden om ordnandet af de pendel-iakttagelser, hvilka komma att under instundande sommar utföras på Spetsbergen.

På tillstyrkan af komiterade antogos följande inlemnade afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter:

i Akademiens Handlingar: »Plankton from the Indian Ocean and the Malay Archipelago» af Professor P. T. CLEVE;

i Bihaget till Handlingarne: 1:o »On a singular case of hermaphroditism in the Holothurids» af Professor HJ. THEEL, 2:o »On the Ethiopian Genera of the families Striphnostes rigidæ» af Professor CHR. AURIVILLIUS, 3:o »Asclepiodaceæ paraguayenses a D:re E. HASSLER collectæ» af Doktor G. O. MALME, 4:o »Ascomyceten der ersten Regnellschen Expedition. II.» af Adjunkten K. STARBÄCK, 5:o »Süsswasseralgen aus Süd-Patagonien» af Doktor O. BORGÉ;

i Öfversigten: de i innehållsförteckningen angifna 4 uppsatser.

Genom anställt val kallades Rektorn och Professorn vid Stockholms Högskola SVANTE AUGUST ARRHENIUS till ledamot af Akademien.

Följande skänker anmälades:

Till Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *K. Ecklesiastik-Departementet.*

Allmänna konst- och industriutställningen i Stockholm 1897. Officiel berättelse. D. 1—2. Sthlm 1899—1900. 8:o.

Svenska konstninnen från medeltiden och renässansen. H. 7. Sthlm 1897. Fol.

Svenska skriftprof. H. 1: Text & Pl.; 2: Text & Pl. 1894—1900. 8:o & Fol.

Meddelanden fr. Svenska riksarkivet. 24. 1900. 8:o.

Det 15:de Skandinaviska naturforskaremötet i Stockholm d. 7—12 Juli 1898. Förhandlingar. 8:o.

MONTELIUS, O., Typologien eller utvecklingsläran tillämpad på det menskliga arbetet. Sthlm 1899. 8:o.

— *K. Statistiska Centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. 2 häften. 4:o.

— *Karolinska mediko-kirurgiska institutet.*

Inbjudningsskrift. 1901. 4:o.

Dissertation 1. 1901. 8:o.

— *Svenska sällskapet för antropologi och geografi.*

Ymer. 1901: H. 1. 8:o.

— *Svenska turistföreningen.*

Årsskrift. 1901. 8:o.

(Forts. å sid. 306.)

Ueber Functionen die ein algebraisches Additions- theorem besitzen.

VON HENRIK PETRINI.

[Mitgetheilt am 8 Mai 1901 durch E. PHRAGMÉN.]

Einleitung.

Bei dem Studium von Functionen pflegt man gewöhnlicher-
weise voraussetzen, dass dieselben analytisch sind um nachher
andere Eigenschaften abzuleiten. Jedoch kann die Frage gestellt
werden, ob nicht anderweitige Definitionen als Potenzreihen von
prinzipiellerer Natur sind, indem dieselben nicht voraussetzen,
dass die Functionen analytisch sind. Im Folgenden wollen wir
ein Beispiel geben von solcher Behandlung von Functionen, wo
dieselben nicht analytisch vorausgesetzt werden, und zwar wollen
wir die Functionen durch eine Functionalgleichung definieren.

Es sei

$$F(u, v, w)$$

ein rationales Polynom der Veränderlichen u, v, w und $\varphi(x)$
irgend eine Lösung der Functionalgleichung

$$(1) \quad F[\varphi(x), \varphi(y), \varphi(x+y)] = 0.$$

Wenn $\varphi(x)$ analytisch vorausgesetzt wird, so ist bekanntlich $\varphi(x)$
eine algebraische Function von $u(x)$, wo $u(x)$ entweder $= x$ oder
eine eindeutige periodische Function von x ist. Es ist jetzt
von Interesse die Gleichung (1) zu studieren ohne irgend welche

Beschränkung der Function $\varphi(x)$ aufzulegen, und es wird sich dabei zeigen, dass $\varphi(x)$ analytisch sein muss, wenn es irgend ein Gebiet giebt, innerhalb welches $\varphi(x)$ eindeutig ist, und wenn $\varphi(x)$ in einem einzigen Punkte desselben Gebietes continuierlich ist, vorausgesetzt dass $F(u, v, w)$ nicht gewisse singuläre in sich selbst transformirbare Formen annimmt.

Allgemeines.

Wenn man in (1) $y = x$ setzt, so erhält man eine algebraische Gleichung zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(2x)$. Setzt man in (1) $y = 2x$ und eliminirt $\varphi(2x)$ zwischen der so erhaltenen Gleichung und der vorigen, so bekommt man eine Gleichung zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(3x)$. Führt man auf diese Weise fort, kann man für jedes ganzzahlige n eine algebraische Gleichung zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(nx)$ finden. Auf dieselbe Weise erhält man eine Gleichung von der Form

$$(2) \quad F_1[\varphi(mx), \varphi(nx)] = 0,$$

wo $F_1(u, v)$ eine algebraische Gleichung zwischen u und v ist und wo m und n beliebige ganze Zahlen sind. Aus (2) ergibt sich folgender

Satz: Wenn $\varphi(x) = a$ für $x = \alpha$, so kann man mittels einer algebraischen Gleichung $\varphi(\mu\alpha)$ bestimmen, wo μ rational ist.

Bemerkung. Man kann *a priori* nicht behaupten, dass die Werthe von $\varphi(x)$ unabhängig von der Weise sind, in welcher sie sind abgeleitet worden. Auch sind solche Functionsformen F denkbar, für welche die genannte Methode für gewisse Werthe von $\varphi(\alpha)$ unanwendbar ist.

Beispiel. Es sei

$$(3) \quad [\varphi(x) + \varphi(y)]\varphi(x + y) = [\varphi(x) - \varphi(y)]^2.$$

Schliessen wir solche Lösungen von (3) aus, welche unendliche Werthe von $\varphi(x)$ in jeder Umgebung von dem Punkte $x = 0$ ergeben, so wird für $y = x$

$$\varphi(x)\varphi(2x) = 0.$$

Es sei x' diejenige Mannigfaltigkeit, für welche $\varphi(x') = 0$ ist und x'' diejenige, für welche $\varphi(x'') \neq 0$ ist; \therefore wenn x'_1 zur Mannigfaltigkeit x'' gehört, welches wir

$$(4) \quad x'_1 \cong x''$$

zeichnen wollen, so folgt

$$(5) \quad 2x'_1 \cong x'.$$

Ferner erhält man aus (3), wenn $x'_1 \cong x'$ ist,

$$\begin{aligned} \varphi(2x'_1) \cdot \varphi(3x'_1) &= \varphi(2x'_1)^2, \quad (x = 2x'_1, y = x'_1), \\ [\varphi(4x'_1) + \varphi(2x'_1)] \cdot \varphi(6x'_1) &= [\varphi(2x'_1) - \varphi(4x'_1)]^2. \end{aligned}$$

Wäre $2x'_1 \cong x''$, so wäre $\varphi(2x'_1) \neq 0$ und $4x'_1 \cong x'(5) \therefore \varphi(4x'_1) = 0$.
 $\therefore \varphi(3x'_1) = \varphi(2x'_1) = \varphi(6x'_1) \therefore 3x'_1 \cong x'' \therefore 6x'_1 \cong x'(5) \therefore \varphi(6x'_1) = 0$
 $\therefore \varphi(2x'_1) = 0 \therefore 2x'_1 \cong x'.$

Es muss daher

$$(6) \quad 2x'_1 \cong x'$$

sein und also, da x entweder $\cong x'$ oder $\cong x''$, allgemein

$$2x \cong x'$$

d. h., da man $\frac{1}{2}x$ statt x schreiben kann, für alle x

$$(7) \quad \varphi(x) = 0.$$

Im Folgenden wollen wir nur solche Lösungen von (1) betrachten, in welchen $\varphi(x)$ endlich und eindeutig ist innerhalb eines gewissen Gebietes in der Umgebung eines endlichen Werthes x_1 . Man kann dann $\varphi(x)$ auf eine gewisse Function $\psi(x)$ reduciren, welche in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes endlich und eindeutig ist und für welche $\psi(0) = 0$ ist.

Denn es sei $x = x_1 + \alpha + \xi$, $y = x_1 + \alpha + \eta$, $\varphi(x) = \psi(\xi)$

$$(8) \quad \therefore F\{\psi(\xi), \psi(\eta), \psi(x_1 + \alpha + \xi + \eta)\} = 0. \quad (1).$$

Wenn man $\xi + \eta$ statt ξ und 0 statt η schreibt, so erhält man

$$(9) \quad F\{\psi(\xi + \eta), \psi(0), \psi(x_1 + \alpha + \xi + \eta)\} = 0.$$

Durch Elimination von $\psi(x_1 + \alpha + \xi + \eta)$ zwischen (8) und (9) erhält man die algebraische Gleichung

$$(10) \quad F_1\{\psi(\xi), \psi(\eta), \psi(\xi + \eta)\} = 0.$$

Wenn $\psi(0) \neq 0$ ist, kann man $\psi(\xi) = \psi_1(\xi) + \psi(0)$ schreiben. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Untersuchung im Folgenden voraussetzen, dass die zu betrachtende Lösung der Gleichung (1) derart sei, dass $\varphi(x)$ endlich und eindeutig in einer gewissen Umgebung des Punktes $x = 0$ ist, und dass $\varphi(0) = 0$ ist.

Continuität.

Nach (1) ist

$$F\{\varphi(x), \varphi(y + \delta y), \varphi(x + y + \delta y)\} - F\{\varphi(x), \varphi(y + \delta y), \varphi(x + y)\} + F\{\varphi(x), \varphi(y + \delta y), \varphi(x + y)\} - F\{\varphi(x), \varphi(y), \varphi(x + y)\} = 0,$$

welcher Ausdruck durch algebraische Operationen auf die Form gebracht werden kann

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &H\{\varphi(x), \varphi(x + y), \varphi(y + \delta y), \varphi(x + y + \delta y)\} \cdot [\varphi(x + y + \delta y) - \varphi(x + y)] + \\ &+ H_1\{\varphi(x), \varphi(y), \varphi(x + y), \varphi(y + \delta y)\} \cdot [\varphi(y + \delta y) - \varphi(y)] = 0, \end{aligned} \right.$$

wo H und H_1 ganze Polynome sind. Oder man kann schreiben

$$(12) \quad \delta_y \varphi(x + y) = I \delta \varphi(y) \\ I = - \frac{H_1}{H},$$

und es ist diese Gleichung (12), welche den Ausgangspunkt unserer folgenden Untersuchung über die Continuität der Funktion $\varphi(x)$ bildet.

Es sei $\varphi(x)$ in einem gewissen Punkte α discontinuirlich $\therefore \delta \varphi(x + \alpha) = I_\alpha \delta \varphi(\alpha) \therefore \delta \varphi(x + \alpha)$ kann nicht unendlich klein werden wenn nicht H_1 unendlich klein wird \therefore folgenden

Satz: Wenn $\varphi(x)$ in einem einzigen Punkte discontinuirlich ist, so ist $\varphi(x)$ discontinuirlich in allen Punkten, wo H_1 nicht unendlich klein mit δy wird; und umgekehrt wenn $\delta \varphi(x)$ in einem einzigen Punkte continuirlich ist, so ist $\varphi(x)$ continuirlich in

Die Lösungen der Functionalgleichungen (13), (15) und (16) erhält man folgendermaassen. Aus (13) ergibt sich durch Wiederholungen

$$\begin{aligned}\varphi(mx) &= m\varphi(x) \\ \varphi\left(\frac{1}{n}x\right) &= \frac{1}{n}\varphi(x) \\ \varphi\left(\frac{m}{n}x\right) &= \frac{1}{n}\varphi(mx) = \frac{m}{n}\varphi(x) \\ \therefore \varphi(\alpha x) &= \alpha\varphi(x), \quad \alpha = \frac{m}{n}.\end{aligned}$$

Für $\alpha = \xi$ erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(\xi)}{\xi} &= \frac{\varphi(x)}{x} = c_1, \text{ wo } c \text{ eine Constante ist,} \\ (18) \quad \therefore \varphi(\xi) &= c\xi.\end{aligned}$$

Da $\varphi(\xi)$ continuirlich ist, so muss (18) für jedes ξ gelten. Die Lösung von (15) giebt dann sofort

$$(19) \quad \varphi(x) = c^x$$

und (16) giebt

$$(20) \quad \varphi(x) = \frac{1}{a}(c^x - 1).$$

Bemerkung. Dieses letzte Resultat hätte man auch direct aus (16) folgern können, indem man durch Induction

$$\varphi(nx) = \frac{(1 + a\varphi(x))^n - 1}{a}$$

findet und $nx = \xi$ setzt

$$\therefore a \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{[1 + a\varphi(\xi)]^{x/\xi} - 1}{x}.$$

Für $\lim x = 0$ folgt dann

$$\frac{1}{\xi} \log [1 + a\varphi(\xi)] = c, \quad c = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Differentierbarkeit.

Aus der Formel (12) folgt

$$(21) \quad \varphi'(x+y) = I_0 \varphi'(y),$$

wo $I_0 = \lim_{y \rightarrow 0} I$ ist. Aus (21) ergibt sich folgender

Satz. Wenn $\varphi'(x)$ in einem einzigen Punkte y existirt, so existirt $\varphi'(x)$ in allen Punkten mit Ausnahme von denjenigen, welche eine endliche Anzahl von $\varphi(x)$ -Werthe bestimmen, nämlich diejenigen, für welche I_0 unendlich oder unbestimmt wird.

Es kommt also jetzt darauf an zu beweisen, dass in einem Punkte $\varphi'(y)$ existirt ohne dass I_0 unendlich wird. Wir können annehmen, dass $\varphi(0) = 0$ ist. Von der Gleichung (1) wollen wir annehmen, dass bei der Reduction (S. 299) ein α so gewählt werden kann, dass bei Auflösung der Gleichung (1) in Bezug auf $\varphi(x+y)$ man eine Gleichung von der Form bekommt

$$\varphi(x+y) = a_0 + a_1 \varphi(x) + a_2 \varphi(y) + a_{11} \varphi^2(x) + a_{12} \varphi(x) \varphi(y) + a_{22} \varphi^2(y) + \dots$$

Da $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x+y) = \varphi(y+x)$ und $\varphi(x+0) = \varphi(x)$ ist, so ist

$$(22) \quad \begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(x) \cdot \varphi(y) \cdot \mu \\ \mu = a + P(\varphi(x), \varphi(y)), \end{cases}$$

wo a eine Constante ist und $P(0, 0) = 0$ ist. Da $\varphi(x)$ in der Umgebung von dem Punkte 0 als continuirlich angenommen werden kann, so kann man x und y so klein annehmen, dass μ zwischen zwei beliebig engen Grenzen liegt. Gesetzt

$$\begin{aligned} \mu_r &= a + P[\varphi(x), \varphi(rx)] \\ \alpha_r &= 1 + \mu_r \varphi(x), \end{aligned}$$

$\therefore |\mu_r \varphi(x)| < 1$ für hinlänglich kleine Werthe von x .

Ferner kann man die Schwankung von μ_r beliebig klein machen, wenn man x hinlänglich klein nimmt. Also kann gesetzt werden

$$0 < \alpha' < |\alpha_\nu| < \alpha'', \quad |\alpha'' - \alpha'| < \sigma, \quad \sigma \text{ beliebig klein.}$$

Aus (22) ergibt sich dann successive

$$\begin{aligned} \varphi(nx) &= \varphi(x) + \overline{\varphi(n-1x)} + \varphi(x)\overline{\varphi(n-1x)\mu_{n-1}} \\ &= \varphi(x) + \alpha_{n-1}\overline{\varphi(n-1x)} \\ &= \varphi(x) + \alpha_{n-1}[\varphi(x) + \alpha_{n-2}\overline{\varphi(n-2x)}] \\ &\dots\dots\dots \\ &= \varphi(x)[1 + \alpha_{n-1} + \alpha_{n-1}\alpha_{n-2} + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\dots\alpha_1]. \end{aligned}$$

Für reelle Quantitäten wird $\alpha_\nu > 0$ und

$$(23) \quad \frac{\alpha'^n - 1}{\alpha' - 1} < \frac{\varphi(nx)}{\varphi(x)} < \frac{\alpha''^n - 1}{\alpha'' - 1},$$

∴ wenn man $\varphi(x) > 0$ annimmt und

$$\alpha' - 1 = \varphi(x)\alpha' < \varphi(x)\mu_\nu < \varphi(x)\alpha'' = \alpha'' - 1; \quad |\alpha'' - \alpha'| < \sigma$$

setzt, so wird

$$\frac{(1 + \varphi(x)\alpha')^n - 1}{\alpha'} < \varphi(nx) < \frac{(1 + \varphi(x)\alpha'')^n - 1}{\alpha''},$$

woraus sich ergibt, falls $\alpha' > 0$ ist,

$$\frac{[1 + \alpha'\varphi(nx)]^{1/n} - 1}{\alpha'} > \varphi(x) > \frac{[1 + \alpha''\varphi(nx)]^{1/n} - 1}{\alpha''}.$$

Für

$$nx = \xi$$

erhält man

$$n \frac{[1 + \alpha'\varphi(\xi)]^{1/n} - 1}{\alpha'\xi} > \frac{\varphi(x)}{x} > \frac{[1 + \alpha''\varphi(\xi)]^{1/n} - 1}{\alpha''\xi} n,$$

wo ξ so klein gewählt werden kann, dass $|\alpha'\varphi(\xi)| < 1$ ist. Durch Entwicklung nach dem binomischen Satze erhält man

$$(24) \quad \frac{\varphi(\xi)}{\xi} > \frac{\varphi(x)}{x} > \frac{\varphi(\xi)}{\xi} (1 - \frac{1}{2}\alpha''\varphi(\xi)), \quad x = \frac{1}{n}\xi.$$

Falls man ξ so wählt, dass $\varphi(\xi) > 0$ wird, und $x = \frac{1}{n}\xi$ setzt, so sieht man, dass die Grenzen von $\frac{\varphi(x)}{x}$ beliebig nahe an einander kommen. Wenn man ξ festhält und x beliebig klein macht, so

kann die Schwankung von $\varphi(x)$ als beliebig klein angesehen werden, wenn n gross angenommen wird. Man ersieht, dass man allgemein folgenden Satz aussprechen kann:

Satz. Wenn alle Quantitäten reel sind und die Gleichung (1) in der Form (22) gesetzt werden kann, so ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x}$ endlich und bestimmt, und die Function $\varphi(x)$ hat überall einen endlichen und bestimmten Differentialquotienten — mit eventueller Ausnahme von denjenigen Punkten, wo $\varphi(x)$ eine gewisse endliche Zahl von Werthen annimmt.

Bemerkung. Der Fall $a' < 0$ ist auf dieselbe Weise zu behandeln.

Beispiel 1.

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin x = \varphi(x)$$

$$\therefore \varphi(x + y) = \varphi(x) \sqrt{1 - \varphi(y)^2} + \varphi(y) \sqrt{1 - \varphi(x)^2}$$

$$\therefore \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) - \frac{1}{2} \varphi(x) \varphi(y) [\varphi(x) + \varphi(y) + \dots].$$

Beispiel 2.

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{tg} x = \varphi(x)$$

$$\varphi(x+y) = \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{1 - \varphi(x) \varphi(y)} = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(x) \varphi(y) [\varphi(x) + \varphi(y) + \dots].$$

Beispiel 3.

$$\operatorname{sn}(x+y) = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} y \operatorname{dn} y + \operatorname{sn} y \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y}$$

$$\operatorname{sn} x = \varphi(x)$$

$$\therefore \varphi(x+y) = \frac{\varphi(x) \sqrt{1 - \varphi(y)^2} \cdot \sqrt{1 - k^2 \varphi(y)^2} + \varphi(y) \sqrt{1 - \varphi(x)^2} \sqrt{1 - k^2 \varphi(x)^2}}{1 - k^2 \varphi(x)^2 \varphi(y)^2}$$

$$\therefore \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) - \frac{1}{2} \varphi(x) \varphi(y) [1 + k^2 (\varphi(x) + \varphi(y)) + \dots].$$

Beispiel 4.

$$\varphi(x)^2 + \varphi(y)^2 + \varphi(x + y)^2 - 2[\varphi(x) + \varphi(y)] \varphi(x + y) = 0.$$

Diese Gleichung ist von singulärer Form, indem sie sich nicht auf die Normalform bringen lässt.

Skänker till Vetenskaps-Akademins Bibliothek.

(Forts. från sid. 296.)

- Upsala.** *Observatoire météorologique.*
Bulletin mensuel. Vol. 32 (1900). 4:o.
- Allegheny.** *Observatory.*
Extract from the report. 1900. 8:o.
- Baltimore.** *Johns Hopkins University.*
Circulars. Vol. 20 (1901): N:o 150—151. 4:o.
- Basel.** *Naturforschende Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd 13 (1901): H. 1. 8:o.
- Batavia.** *R. Magnetical and Meteorological Observatory.*
Observations. Vol. 22 (1899): P. 1. 4:o.
Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Jaarg. 21 (1899). 8:o.
- Berkeley.** *University of California.*
Bulletin. Vol. 2 (1900): N:o 1, 3. 8:o.
Bulletin of the Department of Geology. Vol. 2 (1900): N:o 7. 8:o.
Chronicle. Vol. 3 (1900): N:o 1—6. 8:o.
Småskrifter. 2 st. 1900. 8:o.
College of agriculture. Report 1897—98. 8:o.
» » » Bulletin. N:o 127—130. 1900. 8:o.
- Berlin.** *K. Botanischer Garten und Museum.*
Notizblatt. N:o 25. 1901. 8:o.
- Bern.** *Naturforschende Gesellschaft.*
Mittheilungen. 1898—1899. 8:o.
- Boston.** *American Academy of arts and sciences.*
Proceedings. Vol. 36 (1900/1901): N:o 16—19. 8:o.
— *American Association for the advancement of science.*
Proceedings. Vol. 49 (1900). 8:o.
- Bruxelles.** *Académie R. de Belgique.*
Bulletin. Cl. des lettres ... 1901: N:o 3. 8:o.
» Cl. des sciences ... 1901: N:o 3. 8:o.
— *Société Belge de géologie.*
Bulletin. T. 11 (1897): Fasc. 5; 15 (1901): 2. 8:o.
— *Société Royale malacologique de Belgique.*
Annales. T. 34 (1899): pp. 17—28; 129—175. 8:o.
— *Société Belge de microscopie.*
Annales. Année 26 (1899—1900). 8:o.
- Budapest.** *K. Ungarische Geologische Anstalt.*
Jahresbericht 1898. 8:o.
— *K. Ungarische Reichs-Anstalt f. Meteorologie u. Erdmagnetismus.*
Jahrbücher. Bd 29 (1899): Th. 1. 4:o.
Bericht. 1 (1900). 8:o.
- Buitenzorg.** *'s Lands plantentuin.*
Bulletin. N:o 7. 1900. 8:o.
Mededeelingen. 45. 1901. 8:o.
- Calcutta.** *Geological survey of India.*
Memoirs. Vol. 33: P. 1. 8:o.

(Forts. å sid. 350.)

Ueber einige irreduciblen Gruppen von Berührungs- transformationen im Raume.

Von C. W. OSEEN.

(Mitgeteilt am 8. Mai 1901 durch A. LINDSTEDT.)

Bekanntlich giebt es in der Ebene nur drei verschiedene Typen von endlichen, continuierlichen, irreducibeln Berührungstransformationsgruppen. Dagegen ist die Zahl der verschiedenen Typen im Raume beträchtlich grösser. Von diesen Gruppen im Raume hat man zuerst drei, von LIE entdeckte, mit den Gruppen der Ebene analoge kennen gelernt.¹⁾ Von diesen Gruppen ist eine primitiv. Ferner hat Herr SCHEFFERS in seiner Dissertation alle Gruppen bestimmt, bei denen eine Schar von ∞^1 partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \text{const.}$$

invariant bleibt.²⁾ Weiterhin hat Herr ENGEL eine merkwürdige, 14-gliedrige, primitive Gruppe aufgestellt.³⁾ Endlich hat Herr KOWALEVSKY gezeigt, dass die beiden genannten primitiven Gruppen die einzigen primitiven Gruppen von Berührungstransformationen im Raume sind.⁴⁾

¹⁾ LIE-ENGEL: Theorie der Transformationsgruppen II, S. 461 f. Im Folgenden wird dieses Werk kurz »Transformationsgruppen« genannt.

²⁾ »Bestimmung einer Klasse von Berührungstransformationsgruppen«. Acta Mathematica 14. 1890.

³⁾ »Transformationsgruppen« III, S. 763 f.

⁴⁾ »Die primitiven Transformationsgruppen in fünf Veränderlichen«, Ber. über die Verh. d. Kgl. Sachs. Gesellschaft d. Wiss. 1899.

Der vorliegende Aufsatz enthält die Bestimmung einiger anderen Klassen von endlichen, continuierlichen, irreduciblen Gruppen von Berührungstransformationen im Raume. Zu den untersuchten Klassen gehören die zwei von LIE aufgestellten imprimitiven Gruppen und ausserdem vier, wie es scheint, neue Gruppen. Ihre Gliederzahlen sind 8, 9, 11 und 12. Sie sind mit vier Untergruppen der LIE'schen, primitiven Gruppe ähnlich.

1.

Klassifikation der noch nicht untersuchten Gruppen.

Es seien x_1, x_2, z die Koordinaten eines Punktes im Raume, y_1, y_2 die Koordinaten einer durch diesen Punkt hindurchgehenden Ebene. x_1, x_2, z, y_1, y_2 sind also die Koordinaten eines Flächenelementes in R_3 . Gelegentlich werden wir sie auch als Koordinaten eines Punktes in einem fünfdimensionalen Raume auffassen. Da von den Gruppen von Berührungstransformationen, kurz B. T. Gruppen, im Raume schon die primitiven und die, welche eine Schar von Gleichungen von der Form

$$\Phi(x_1, x_2, z, y_1, y_2) = \text{const.}$$

in sich überführen, bekannt sind, müssen die noch übrigen Gruppen ein System von Gleichungen von der Form

$$\Phi_1(x_1, x_2, z, y_1, y_2) = \text{const.}$$

$$\Phi_2 = \text{const.} \dots \Phi_r = \text{const.}$$

invariant lassen. r ist hier > 1 und < 5 . Es soll zunächst unsre Aufgabe sein, die Gruppe dadurch zu vereinfachen, dass wir ein bei der Gruppe invariantes System auf eine möglichst einfache Form bringen. Zu dem Zwecke führen wir homogene Koordinaten des Flächenelementes ein, setzen also

$$y_1 = -\frac{p_1}{p_3}, \quad y_2 = -\frac{p_2}{p_3}$$

und schreiben ausserdem x_3 statt z . Die B. T. Gruppe in R_3 geht dann in eine Gruppe von homogenen Berührungstransforma-

tionen in $x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$ über. Natürlich bleibt bei dieser neuen Gruppe das Gleichungensystem

$$\Phi_1\left(x_1, x_2, x_3, -\frac{p_1}{p_3}, -\frac{p_2}{p_3}\right) = \text{const.}$$

$$\Phi_2 = \text{const.} \dots \Phi_r = \text{const.}$$

invariant. Greifen wir also aus der Gruppe eine endliche Transformation heraus

$$x'_1 = X_1(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3), \quad x'_2 = X_2, \quad x'_3 = X_3$$

$$p'_1 = P_1, \quad p'_2 = P_2, \quad p'_3 = P_3,$$

so bekommen wir durch Ausführung dieser Transformation auf $\Phi_i (i = 1, 2 \dots r)$

$$\Phi_i(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = F_i(\Phi_1(x'p')\Phi_2 \dots).$$

Also folgt

$$(\Phi_i \Phi_k)_{xp} = (F_i F_k)_{x'p'} = \sum_{\mu\nu}^r \frac{\partial F_i}{\partial \Phi_\mu} \frac{\partial F_k}{\partial \Phi_\nu} (\Phi_\mu \Phi_\nu)_{x'p'}^1)$$

$$(i, k = 1, 2 \dots r).$$

Von den Ausdrücken $(\Phi_i \Phi_k)$ wird es im Allgemeinen gewisse geben, die nicht als Funktionen von $\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_r$ darstellbar sind. Diese Ausdrücke seien mit $K_1, K_2 \dots K_s$ bezeichnet. Die abgeleitete Formel zeigt dann, dass auch das Gleichungensystem

$$\Phi_i = \text{const.} \quad K_j = \text{const.} \quad (i = 1, 2 \dots r, j = 1, 2 \dots s)$$

bei der Gruppe invariant bleibt. Zu den Functionen Φ_i, K_j können wir nun wieder die Ausdrücke $(\Phi_i K_j), (K_j K_k)$ hinzufügen, welche nicht als Funktionen von Φ_i, K_j darstellbar sind u. s. w. Durch dieses Verfahren erreicht man, dass in dem invarianten Gleichungensysteme

$$\Phi_i = \text{const.} \quad K_j = \text{const.} \dots$$

die Functionen $\Phi_i, K_j \dots$ eine Functionengruppe, und zwar natürlich eine homogene, bilden. Man kann also annehmen,

¹⁾ Transformationsgruppen. II. S. 178.

dass die Functionen $\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_r$ von vornherein so gewählt sind, dass $\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_r$ eine Functionengruppe bilden. Wenn eine Gruppe mehrere invariante Gleichungssysteme von dieser Beschaffenheit hat, betrachten wir das Gleichungssystem, welches die wenigsten Gleichungen, etwa r' , enthält. Durch eine homogene B. T. kann man dann die Functionengruppe $\Phi_1, \dots \Phi_r$ in die durch gewisse von den Functionen $x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$ definierte Functionengruppe überführen.¹⁾ Wir wollen die sich hier darbietenden Möglichkeiten durchmustern. Die transformierte Functionengruppe enthalte von den Functionen x eine Zahl $\kappa (\leq 3)$, von den Functionen p eine Zahl $\pi (\leq 3)$. Die Functionengruppe enthält ferner eine gewisse Anzahl, etwa s , von Functionen nullter Ordnung. Dieses System von Functionen bleibt offenbar bei der Gruppe für sich invariant. Es geht bei Einführung nicht-homogener Koordinaten in ein bei der ursprünglichen Gruppe invariantes System über. Also folgt, dass s entweder gleich 2, 3, 4 oder 5 ist. s ist übrigens gleich $\kappa + \pi - 1$, wenn $\pi > 0$, und gleich κ , wenn $\pi = 0$.

- 1). $s = 2$. Hier ist entweder a) $\kappa = 2, \pi = 0$,
 oder b) $\kappa = 2, \pi = 1$,
 oder c) $\kappa = 1, \pi = 2$,
 oder d) $\kappa = 0, \pi = 3$.

Wir betrachten zuerst die Fälle a) und b). Das bei der homogenen Gruppe invariante System sei im Falle a) $x_1 = \text{const.}$ $x_2 = \text{const.}$; im Falle b) entweder $x_1 = \text{const.}$ $x_2 = \text{const.}$ $\pi_2 = \text{const.}$ oder $x_1 = \text{const.}$ $x_2 = \text{const.}$ $\pi_3 = \text{const.}$

In allen Fällen bleibt bei der nicht homogenen Gruppe das Gleichungssystem $x_1 = \text{const.}$ $x_2 = \text{const.}$ invariant. Dann muss aber die Gruppe reducibel sein. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Reducibilität einer B. T. Gruppe im Raume ist ja,²⁾ dass es ein 2-gliedriges vollständiges System von linearen, part. Differentialgleichungen erster Ordnung giebt, welches die Gruppe gestattet, und dessen Lösungen ausserdem

¹⁾ Transformationsgruppen II, S. 227.

²⁾ L. c. II, S. 377.

je zwei in Involution liegen. Man kann auch, statt das System von part. Differentialgleichungen zu betrachten, das zugehörige System von Pfaffschen Gleichungen ins Auge fassen und die Bedingungen folgendermassen formulieren. Es muss ein 3-gliedriges, unbeschränkt integrables System von Pfaffschen Gleichungen geben, welches die Gruppe gestattet und ausserdem die Pfaffsche Gleichung

$$dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 = 0$$

umfasst. Ein solches System giebt es nun in der That in unserem Falle nämlich $dx_1 = 0$, $dx_2 = 0$, $dz = 0$.

c) $\kappa = 1$, $\pi = 2$.

Das bei der homogenen Gruppe invariante System kann

$x_1 = \text{const.}$ $p_2 = \text{const.}$ $p_3 = \text{const.}$ oder

$x_2 = \text{const.}$ $p_2 = \text{const.}$ $p_3 = \text{const.}$ sein.

Im ersten Falle lässt die nicht-homogene Gruppe das Gleichungssystem $x_1 = \text{const.}$ $y_2 = \text{const.}$ invariant. Die Gruppe ist dann reducibel, denn das invariante System von Pfaffschen Gleichungen

$$\begin{aligned} dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 &= 0 \\ dx_1 &= 0, \quad dy_2 = 0 \end{aligned}$$

ist unbeschränkt integrabel. Das invariante System muss also, falls die Gruppe irreducibel sein soll, auf die Form $x_2 = \text{const.}$ $p_2 = \text{const.}$ $p_3 = \text{const.}$ zurückführbar sein. Die nicht-homogene Gruppe lässt das System $x_2 = \text{const.}$ $y_2 = \text{const.}$ invariant.

d) $\kappa = 0$. $\pi = 3$.

Das invariante System muss $p_1 = \text{const.}$ $p_2 = \text{const.}$ $p_3 = \text{const.}$ sein. Man sieht leicht ein, dass die Gruppe reducibel sein muss.

2) $s = 3$.

Wir haben die Möglichkeiten:

a) $\kappa = 3$. $\pi = 0$.

b) $\kappa = 3$. $\pi = 1$.

c) $\kappa = 2$. $\pi = 2$.

d) $\kappa = 1$. $\pi = 3$.

Ebenso wie im vorigen Falle sieht man, dass in den Fällen a) und b) die Gruppe reducibel sein muss. Im Falle c) kann das invariante System entweder auf die Form: $x_2 = \text{const.}$ $x_3 = \text{const.}$ $p_2 = \text{const.}$ $p_3 = \text{const.}$ oder auf die Form $x_1 = \text{const.}$ $x_2 = \text{const.}$ $p_2 = \text{const.}$ $p_3 = \text{const.}$ gebracht werden. Die entsprechende nichthomogene Gruppe hat also entweder das invariante System.

$$\alpha) x_2 = \text{const.}, z = \text{const.}, y_2 = \text{const.}$$

oder

$$\beta) x_1 = \text{const.}, x_2 = \text{const.}, y_2 = \text{const.}$$

Im Falle d) kann das invariante System der homogenen Gruppe so geschrieben werden: $x_2 = \text{const.}$ $p_1 = \text{const.}$ $p_2 = \text{const.}$ $p_3 = \text{const.}$ Das entsprechende invariante System der nicht-homogenen Gruppe ist

$$\gamma) x_2 = \text{const.} \quad y_1 = \text{const.} \quad y_2 = \text{const.}$$

$$3) s = 4.$$

Die einzigen Möglichkeiten sind

$$a) \kappa = 3, \pi = 2.$$

$$b) \kappa = 2, \pi = 3.$$

a) Das invariante System der homogenen Gruppe sei:

$$x_1 = \text{const.} \quad x_2 = \text{const.} \quad x_3 = \text{const.} \quad p_2 = \text{const.} \quad p_3 = \text{const.}$$

Das entsprechende System der nicht-homogenen Gruppen ist:

$$z = \text{const.} \quad x_1 = \text{const.} \quad x_2 = \text{const.} \quad y_2 = \text{const.}$$

b) Das invariante System der homogenen Gruppe sei:

$x_1 = \text{const.}, x_2 = \text{const.}, p_1 = \text{const.}, p_2 = \text{const.}, p_3 = \text{const.},$
mit dem entsprechenden invarianten Systeme der nicht-homogenen Gruppe:

$$x_1 = \text{const.}, x_2 = \text{const.}, y_1 = \text{const.}, y_2 = \text{const.}$$

$$4) s = 5.$$

Hier ist $\kappa = \pi = 3$. Bei diesen Gruppen gibt es also kein invariantes System von der verlangten Beschaffenheit mit der Gliederzahl < 6 . Bei den nicht-homogenen Gruppen gibt es kein anderes invariantes System von der hier betrachteten Beschaffenheit als, $z = \text{const.}, x_1 = \text{const.}, x_2 = \text{const.}, y_1 = \text{const.}, y_2 = \text{const.}$

Im Folgenden untersuche ich die Fälle 1, der zwei neue Gruppen umfasst, 2, der keine neuen Gruppen ergibt, 3 a) von welchem Falle dasselbe gilt. Endlich bestimme ich von den Gruppen des Falles 3 b) die, welche x_1 , x_2 , y_1 , y_2 primitiv transformieren.

2.

Erledigung des ersten Falles.

Wie oben gezeigt ist, ist es in diesem Falle, wenn die Gruppe irreducibel ist, immer möglich das invariante System durch eine Berührungstransformation auf die Form

$$x_2 = \text{const.} \quad y_2 = \text{const.}$$

zu bringen. Dieses System soll also bei der Gruppe invariant sein. Es sei nun $W(x_1, x_2, z, y_1, y_2)$ die charakteristische Function einer inf. Transformation der Gruppe. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass es für alle in Betracht kommenden Functionen W ein gemeinsames Gebiet giebt, innerhalb dessen sie reguläre, analytische Functionen sind. Die Incremente, welche x_2 und y_2 durch die inf. Transformation erhalten, sollen nach der Voraussetzung nur von x_2 und y_2 abhängen. Also muss

$$\frac{\partial W}{\partial y_2} = \varphi(x_2, y_2), \quad \frac{\partial W}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial W}{\partial z} = \psi(x_2, y_2)$$

wo φ und ψ irgend zwei Functionen ihrer Argumente sind. Also folgt

$$W = h(x_2, y_2) + \chi(x_1, x_2, z, y_1) \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial \chi}{\partial z} = \psi - \frac{\partial h}{\partial x_2}.$$

Da das rechte Glied von x_1 , z , y_1 unabhängig ist, muss auch das linke Glied nur von x_2 und y_2 abhängen. Da ferner χ nicht y_2 enthält, so folgt

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial x_2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial x_1} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial y_1} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2 \partial y_1} = 0$$

also

$$\chi = cz + u(x_2) + g(x_1, y_1).$$

Also endlich

$$W = cz + g(x_1, y_1) + h(x_2, y_2),$$

indem $u(x_2)$ in $h(x_2, y_2)$ eingelegt ist.

Aus dieser allgemeinen Form der char. Functionen der Gruppe geht zunächst hervor, dass auch das System: $x_1 = \text{const.}$ $y_1 = \text{const.}$ in sich transformiert wird.¹⁾ Ferner ist es klar, dass wir voraussetzen können, dass höchstens eine der charakteristischen Functionen von z abhängt. Wir können also das System der charakteristischen Functionen folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} W_1 &= g_1(x_1, y_1) + h_1(x_2, y_2) \\ W_2 &= g_2(x_1, y_1) + h_2(x_2, y_2) \\ &\dots \dots \dots \\ W_r &= \varepsilon(z + g_r(x_r, y_r) + h_r(x_r, y_r)) \end{aligned}$$

wo ε entweder gleich 0 oder gleich 1 angenommen werden kann. Die Functionen g und h sind natürlich nur bis auf Constanten bestimmt. Sie brauchen ausserdem nicht alle von 0 verschieden sein. Damit die durch die Functionen W definierten inf. Transformationen eine Gruppe erzeugen, ist nothwendig und hinreichend, dass:

$$\{W_i W_k\} = \sum_s^r c_{iks} W_s, \quad (i, k = 1, 2, \dots, r),$$

wo

$$\{W_i W_k\} = [W_i W_k] - W_i \frac{\partial W_k}{\partial z} + W_k \frac{\partial W_i}{\partial z}.$$

Also folgt

$$(g_i g_k) + (h_i h_k) = \sum_s^{r-1} c_{iks} (g_s + h_s), \quad (i, k = 1, 2 \dots r-1)$$

und

$$(g_r g_k) + (h_r h_k) - y_1 \frac{\partial g_k}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial h_k}{\partial y_2} + g_k + h_k = \sum_s^{r-1} c_{rks} (g_s + h_s) \\ (k = 1, 2 \dots r-1).$$

¹⁾ Dies geht auch aus der Bemerkung hervor, dass mit der Functionsgruppe: x_2, p_1, p_2 (S. 311) auch ihre Polargruppe: x_1, p_1, p_2 invariant bleiben muss.

Also

$$1. \begin{cases} (g_i g_k) = \sum_1^{r-1} c_{ik} g_s + d_{ik} \quad (i, k = 1, 2 \dots r-1) \\ (g_r g_k) - y_1 \frac{\partial g_k}{\partial y_1} + g_k = \sum_1^{r-1} c_{rk} g_s + d_{rk} \quad (k = 1, 2 \dots r-1), \end{cases}$$

wo d_{ik} ($i = 1, 2 \dots r, k = 1, 2 \dots r-1$) Constanten sind, und

$$2. \begin{cases} (h_i h_k) = \sum_1^{r-1} c_{ik} h_s - d_{ik} \quad (i, k = 1, 2 \dots r-1) \\ (h_r h_k) - y_2 \frac{\partial h_k}{\partial y_2} + h_k = \sum_1^{r-1} c_{rk} h_s - d_{rk} \quad (k = 1, 2 \dots r-1). \end{cases}$$

Ich vertheile jetzt die zu behandelnden Gruppen in zwei Klassen. Zu der ersten Klasse sollen die Gruppen gehören, die eine charakteristische Function $W = \text{const.} (\geq 0)$ besitzen, zu der zweiten die, welche keine constante charakteristische Function besitzen. Es sei nun gegeben eine Gruppe der zweiten Klasse mit den charakteristischen Functionen $W_1, W_2 \dots W_r$, wo die W die oben angegebene Form haben. Ich betrachte die durch die charakteristischen Functionen $W_1, W_2 \dots W_r, W_{r+1} = 1$ definierten inf. B. T. Die Formeln

$$\begin{aligned} \{W_{r+1}, W_i\} &= 0, \quad (i = 1, 2 \dots r), \\ \{W_{r+1}, W_r\} &= -\varepsilon \end{aligned}$$

zeigen, dass diese inf. B. T. eine Gruppe erzeugen und zwar eine Gruppe der ersten Klasse. Aus diesem Grunde werde ich zunächst nur die Gruppen der ersten Klasse behandeln. Nachher wird es leicht sein, die Frage von den Gruppen der zweiten Klasse zu erledigen. Es kann also jetzt vorausgesetzt werden, dass eine der Functionen W , etwa $W_{r-1} = \text{const.} = 2$ ist. Ich setze dann $g_{r-1} = h_{r-1} = 1$.

Unter den Functionen $g_1, g_2 \dots g_{r-1} = 1, \varepsilon(z + g_r)$ giebt es eine gewisse Zahl linear unabhängigen: $g_1, g_2 \dots g_s, g_{r-1}$,

$\varepsilon(z + g_r)$, aus denen die Übrigen durch lineare Combination erhalten werden können. Diese Functionen betrachte ich als charakteristische Functionen von inf. Berührungstranf. in der zx_1 -Ebene. Die Formeln 1 zeigen, dass diese inf. Transformationen eine Gruppe erzeugen. Diese Gruppe wird im Folgenden g genannt. Ebenso erhält man aus den Functionen $h_1, h_2 \dots \varepsilon(z + h_r)$ eine B. T. Gruppe in der zx_2 -Ebene, die ich mit h bezeichne.

Unsere Aufgabe soll zunächst die sein, diese Gruppen g und h zu bestimmen und auf eine möglichst einfache Form zu bringen. Das Mittel zu dieser Reduction bieten natürlich die Berührungstransformationen im Raume. Da wir natürlich wünschen, dass die invarianten Systeme immer die einfache Form $x_1 = \text{const.}$ $y_1 = \text{const.}$ und $x_2 = \text{const.}$ $y_2 = \text{const.}$ behalten, so muss die angewandte Transformation entweder von der Form

$$z' = Az + \Omega(x_1, x_2, y_1, y_2), \quad x'_1 = X_1(x_1, y_1), \quad x'_2 = X_2(x_2, y_2), \\ y'_1 = Y_1(x_1, y_1), \quad y'_2 = Y_2(x_2, y_2)^1)$$

oder von der Form sein, die man erhält, wenn man in dieser Formel x_1 mit x_2 , y_1 mit y_2 vertauscht. Man braucht natürlich nur Transformationen von der ersten Form zu benutzen. Aus der Identität

$$dz' - y'_1 dx'_1 - y'_2 dx'_2 \equiv A(dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2)$$

folgt u. a.

$$\frac{\partial z'}{\partial y_1} - y'_1 \frac{\partial x'_1}{\partial y_1} = 0$$

oder

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = Y_1 \frac{\partial X_1}{\partial y_1}.$$

Also

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial y_2} = 0.$$

Ebenso findet man

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_2 \partial x_1} = 0.$$

¹⁾ Transformationsgruppen II, S. 130.

Ferner ist

$$\frac{\partial z'}{\partial x'} - y'_1 \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} = -Ay_1$$

oder

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = Y_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - Ay_1.$$

Also

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\Omega = \varphi(x_1, y_1) + \psi(x_2, y_2),$$

wo φ und ψ irgend zwei Functionen der Argumente bezeichnen. Die Transformation hat also die Form

$$z' = Az + \varphi(x_1, y_1) + \psi(x_2, y_2), \quad x'_1 = X_1(x_1, y_1), \quad X'_2(x_1, y_1), \\ y'_1 = Y_1(x_1, y_1), \quad y'_2 = Y_2(x_2, y_2).$$

Die Functionen z' , x'_1 , x'_2 , y'_1 , y'_2 müssen dabei bekanntlich den partiellen Differentialgleichungen

$$[z', x'_i] = 0, \quad [y'_i, z'] = Ay'_i, \quad (y'_i x'_i) = A \quad (i=1, 2) \\ (y'_1 x'_2) = (y'_1 y'_2) = (y'_2 x'_1) = (x'_1 x'_2) = 0$$

genügen.

Die allgemeinste Transformation der obigen Form kann durch Zusammensetzung dreier Transformationen von noch speciellerer Form erhalten werden, nämlich

$$\text{I. } z' = z + \varphi(x_1, y_1), \quad x'_1 = X_1(x_1, y_1), \quad y'_1 = Y_1(x_1, y_1) \\ x'_2 = x_2, \quad y'_2 = y_2$$

wo

$$[z' X_1]_{x_1, y_1} = 0, \quad [Y_1 z']_{x_1, y_1} = Y_1, \quad [Y_1 X_1]_{x_1, y_1} = 1$$

$$\text{II. } z' = z + \psi(x_2, y_2), \quad x'_1 = x_1, \quad y'_1 = y_1, \quad x'_2 = X_2(x_2, y_2), \\ y'_2 = Y_2(x_2, y_2)$$

$$[z' X_2]_{x_1, x_2, y_2} = 0, \quad [Y_2 z']_{x_1, x_2, y_2} = Y_2, \quad [Y_2 X_2]_{x_1, x_2, y_2} = 1$$

$$\text{III. } z' = Az, \quad x'_1 = Ax_1, \quad y'_1 = y_1, \quad x'_2 = Ax_2, \quad y'_2 = y_2.$$

Die Transformation I stellt eine Berührungstransformation in den Veränderlichen x_1, z, y_1 dar, indem die PFAFF'sche Gleichung

$$dz - y_1 dx_1 = 0$$

bei ihr invariant bleibt. Ebenso ist natürlich die Transformation II eine Berührungstransformation in x_2, z, y_2 . Endlich ist III eine Ähnlichkeitstransformation im Raume. Durch Zusammensetzung von I und der aus III durch Verkürzung erhaltenen

$$IV. \quad z' = Az, \quad x'_1 = Ax_1, \quad y'_1 = y_1$$

bekommt man die allgemeinste Berührungstransformation in der zx_1 -Ebene, welche x_1 und y_1 unter sich transformiert.

Ich gehe jetzt zu der Bestimmung der Gruppe g über. Diese Gruppe transformiert x_1 und y_1 unter sich. Sie hat also eine verkürzte Gruppe, γ , welche angiebt, wie x_1 und y_1 transformiert werden. Man kann annehmen, dass γ primitiv ist. Wäre sie nämlich imprimitiv, würde es ein System von Gleichungen

$$\Phi(x_1, y_1) = \text{const.}$$

geben, dass bei der Gruppe invariant bliebe. Nun werden x_1 und y_1 durch γ genau so transformiert, wie durch die ursprüngliche Gruppe $W_1, W_2 \dots W_r$, kurz die Gruppe G . Also würde es ein System von Gleichungen

$$\Phi(x_1, y_1) = \text{const.}$$

geben, dass bei G invariant bliebe. Dann würde aber G zu dem von Herrn SCHEFFERS behandelten Falle gehören.

Es seien jetzt

$$\xi_i p_1 + \eta_i q_1 \quad \left(p_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad q_1 = \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad i = 1, 2 \dots \right)$$

die inf. Transformationen der Gruppe γ . Ich denke mir die Functionen ξ_i, η_i nach Potenzen von $x_1 - x_0^1, y_1 - y_0^1$ entwickelt, wo x_0^1, y_0^1 die Koordinaten eines Punktes allgemeiner Lage sind. Die Gruppe besitzt dann eine gewisse Zahl von inf. Transformationen nullter, erster u. s. w. Ordnung. Da sie primitiv sein

soll, müssen die Transformationen von nullter und erster Ordnung von der folgenden Form sein: ¹⁾

1) Nullter Ordnung: $p_1 + \dots, q_1 + \dots$, wo die weggelassenen Glieder von erster oder höherer Ordnung sind.

2) Erster Ordnung: entweder

$$\text{a) } (x_1 - x_1^0)q_1 + \dots, (x_1 - x_1^0)p_1 - (y_1 - y_1^0)q_1 + \dots, \\ (y_1 - y_1^0)p_1 + \dots$$

oder

$$\text{b) } (x_1 - x_1^0)q_1 + \dots, (x_1 - x_1^0)p_1 - (y_1 - y_1^0)q_1 + \dots, \\ (y_1 - y_1^0)p_1 + \dots, (x_1 - x_1^0)p_1 + (y_1 - y_1^0)q_1 + \dots,$$

wo in beiden Fällen die weggelassenen Glieder von zweiter oder höherer Ordnung sind. Aus diesen inf. Transformationen der Gruppe γ , kann man die Anfangsglieder der entsprechenden charakteristischen Functionen der Gruppe g , nach Potenzen von $x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0$ geordnet, berechnen. x_1^0, y_1^0, z_1^0 soll ein Punkt allgemeiner Lage des Raumes x_1, y, z sein. Aus den char. Functionen kann man wieder die inf. Transformationen von g berechnen. Wenn man $x_1^0 = y_1^0 = z_1^0 = 0$ setzt, eine Annahme, die keine Specialisierung mit sich bringt, ²⁾ kann man das Ergebnis der Rechnung in folgender Form aussprechen. Die Gruppe g muss nothwendig inf. Transformationen besitzen, welche in Potenzen von x_1, y_1, z entwickelt, von der folgenden Form sind:

$$1) p_1 + c_1 r + \dots, q_1 + c_2 r + \dots$$

$$2) \text{ Entweder a) } x_1 q_1 + c_3 r + \dots, x_1 p_1 - y_1 q_1 + c_4 r + \dots, \\ y_1 p_1 + c_5 r + \dots,$$

oder

$$\text{b) Dieselben und dazu: } x_1 p_1 + y_1 q_1 + 2zr + c_6 r + \dots$$

Hinzu kommt noch die inf. Transformation

$$r,$$

da ja 1 eine charakteristische Function in g ist. Nach zwei Sätzen von LIE folgt, dass die Gruppe g entweder 6-gliedrig ist und mit der Gruppe

¹⁾ Transformationsgruppen III. S. 35.

²⁾ Transformationsgruppen II. S. 403.

$$A. \quad \overline{p_1, q_1 + x_1 r, r, x_1 q_1 + \frac{1}{2} x_1^2 r, x_1 p_1 - y_1 q_1, y_1 p_1 + \frac{1}{2} y_1^2 r}$$

durch eine B. T. der zx_1 -Ebene ähnlich; oder 7-gliedrig und mit der Gruppe

$$B. \quad \overline{p_1, q_1 + x_1 r, r, x_1 q_1 + \frac{1}{2} x_1^2 r, x_1 p_1 - y_1 q_1, y_1 p_1 + \frac{1}{2} y_1^2 r, x_1 p_1 + y_1 q_1 + 2zr}$$

ähnlich.¹⁾ Nach den citierten Sätzen kann man durch eine B. T. in z, x_1, y_1 die Gruppe in eine von diesen Gruppen überführen. Wir können nun zwar nur solche B. T. in z, x_1, y_1 anwenden, welche durch Zusammensetzung von I und IV erhalten werden. Man kann doch leicht zeigen, dass diese Transformationen ausreichen, um die Überführung zu bewerkstelligen.

Die Gruppe g transformiert in sich das Gleichungssystem $x_1 = \text{const. } y_1 = \text{const.}$ Dieses System geht bei Ausführung der Transformation, welche g in A. (oder B.) überführt, in ein Gleichungssystem $\varphi_1(z, x_1, y_1) = \text{const. } \varphi_2(z, x_1, y_1) = \text{const.}$ über, das bei A. (in jedem Falle) invariant bleibt. Wenn wir nun zeigen, dass bei A. kein anderes derartiges System giebt, als $x_1 = \text{const. } y_1 = \text{const.}$, so ist also bewiesen, dass die angewandte B. T. x_1 und y_1 unter sich transformiert, und das ist eben die Behauptung, die wir beweisen wollen. Es sei jetzt

$$\varphi_1(z, x_1, y_1) = \text{const. } \varphi_2 = \text{const.}$$

ein bei A. invariantes Gleichungssystem. Bei A. bleibt also invariant das zweigliedrige PRAFF'sche System

$$d\varphi_1 = 0 \cdot d\varphi_2 = 0,$$

das wir so schreiben wollen

$$\begin{aligned} a(z, x_1, y_1)dz + bdx_1 + cdy_1 &= 0 \\ edx_1 + fdy_1 &= 0. \end{aligned}$$

Ich betrachte jetzt einen Punkt allgemeiner Lage, z^0, x_1^0, y_1^0 und die Untergruppe A' von A., welche diesen Punkt festhält. Durch A' werden die Richtungen durch z^0, x_1^0, y_1^0 , mit den

¹⁾ L. c. II. S. 421 und 425.

Koordinaten dz , dx_1 , dy_1 , transformiert. Dabei werden dx_1 und dy_1 natürlich unter sich transformiert, und zwar 3-gliedrig, wie man aus den S. 319 angegebenen inf. Transformationen erster Ordnung sieht. Bei dieser 3-gliedrigen Gruppe muss nun

$$edx_1 + fdy_1 = 0,$$

wo jetzt e und f als Constanten aufzufassen sind, invariant bleiben. Das ist unmöglich, denn die 3-gliedrige Gruppe einer 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit hat kein invariantes Element.

Ebenso wie die Gruppe g ist auch die Gruppe h entweder 6- oder 7-gliedrig. Um sie auf die einfache Form A. oder B., mit x_2 statt x_1 u. s. w., zu bringen muss man Transformationen II und III anwenden. Durch die Transformationen III werden zwar auch z , x_1 , y_1 transformiert. Man überzeugt sich doch leicht, dass die Gruppen A. und B. dabei ungeändert bleiben. Man kann also annehmen, dass sowohl g als h auf diese kanonische Form gebracht ist.

Die charakteristischen Functionen von g sind also entweder

$$A') \quad 1, x_1, y_1, x_1^2, x_1y_1, y_1^2$$

oder

$$B') \quad 1, x_1, y_1, x_1^2, x_1y_1, y_1^2, z - \frac{1}{2}x_1y_1 - \frac{1}{2}x_2y_2$$

und die charakteristischen Functionen der Gruppe h dieselben mit x_2 statt x_1 , y_2 statt y_1 . Es ist klar, dass der erste Fall, A', der Annahme $\varepsilon = 0$ entspricht, der zweite, B', der Annahme $\varepsilon = 1$. Ich unterscheide jetzt diese beiden Fälle. Es sei also zuerst

$$I. \quad \varepsilon = 0.$$

Die Gruppe g ist

$$1, x_1, y_1, x_1^2, x_1y_1, y_1^2$$

und die Gruppe h

$$1, x_2, y_2, x_2^2, x_2y_2, y_2^2.$$

Die Aufgabe ist jetzt die, die Gruppe G aus diesen beiden zusammenzusetzen. Die charakteristischen Functionen in G seien

w_1, w_2, \dots, w_r . Man kann die Functionen w in folgender Weise schreiben:

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1(x_1 y_1) + v_1(x_2 y_2) \\ w_2 &= u_2 + v_2 \\ &\dots \dots \dots \\ w_s &= u_s + v_s \\ w_{s+1} &= u_{s+1} \\ &\dots \dots \dots \\ w_t &= u_t \\ w_{t+1} &= v_{s+1} \\ &\dots \dots \dots \\ w_{r-1} &= v_p \\ w_r &= 2. \end{aligned}$$

Die Functionen $u_1, u_2, \dots, u_t, 1$ sollen hier linear unabhängig sein. Ebenso die Functionen $v_1, v_2, \dots, v_p, 1$. Die durch die Functionen $u_1, u_2, \dots, u_t, 1$ definierte ebene B. T. Gruppe ist mit der Gruppe g identisch. u_1, u_2, \dots, u_t sind also lineare Combinationen von $x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1, y_1, 1$. Ebenso sind v_1, v_2, \dots, v_t lineare Combinationen von $x_2^2, x_2 y_2, y_2^2, x_2, y_2, 1$. Man kann natürlich immer so einrichten, dass die Functionen u , von der Reihenfolge abgesehen, mit den Functionen $x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1, y_1$ übereinstimmen. Aus den obigen Ausdrücken für die w folgt, dass die Functionen $w_{s+2}, w_{s+2}, \dots, w_t, w_r$ eine invariante Untergruppe von G definieren. Also müssen die folgenden Gleichungen bestehen

$$(u_i + v_i, u_k) = (u_i u_k) = \sum_{s=1}^t c_{ipk} u_p + d_{ik} \\ (i = 1, 2, \dots, s; k = s + 1, \dots, t).$$

Also müssen die Functionen $u_{s+1}, \dots, u_t, 1$ auch eine invariante Untergruppe von g bestimmen. Ferner bemerken wir: wenn die Functionen u_1, u_2, \dots, u_s , als charakteristische Functionen aufgefasst, eine B. T. Gruppe in z, x_1, y_1 definieren, und

ebenso die Functionen $v_1, v_2 \dots v_i$ in z, x_2, y_2 , so werden diese beiden Gruppen holoëdrisch isomorph auf einander bezogen, wenn man jeder Function u_i die Function v_i zuordnet.

Die Gruppe g hat nur zwei invariante Untergruppen nämlich

$$1, x_1, y_1$$

und

$$1. 1)$$

Dazu kommt natürlich die Gruppe g selbst. Wir müssen also drei Fälle unterscheiden.

a) $s = 0$.

Die Gruppe ist

1.

$$\begin{array}{c} x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2 \\ x_2, y_2, x_2^2, x_2 y_2, y_2^2 \\ 1 \end{array}$$

b) $s = 3$.

Die invariante Untergruppe von g ist $1, x_1, y_1$. Man kann also $u_{i+1} = x_1, u_{i+2} = y_1$ setzen und ebenso natürlich $v_{i+1} = x_2, v_{i+2} = y_2$. Ferner sei $u_1 = x_1^2, u_2 = x_1 y_1, u_3 = y_1^2$. Zu Bestimmung von v_1, v_2, v_3 kann man den folgenden Ansatz machen

$$v_1 = a_1 x_1^2 + b_1 x_2 y_2 + c_1 y_2^2$$

$$v_2 = a_2 x_1^2 + b_2 x_2 y_2 + c_2 y_2^2$$

$$v_3 = a_3 x_1^2 + b_3 x_2 y_2 + c_3 y_2^2.$$

Die Koeffizienten a, b, c sollen nach der obigen Bemerkung so bestimmt werden, dass

$$(v_1 v_2) = -2v_1$$

$$(v_1 v_3) = -4v_2$$

$$(v_2 v_3) = -2v_3.$$

Die erste Gleichung giebt ausgeführt

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1$$

$$a_1 c_2 - a_2 c_1 = \frac{1}{2} b_1$$

$$b_1 c_2 - b_2 c_1 = c_1$$

¹⁾ Transformationsgruppen II. S. 437.

also

$$b_1^2 - 4a_1c_1 = 0.$$

Ebenso bekommt man natürlich

$$b_3^2 - 4a_3c_3 = 0.$$

Man kan also setzen

$$\begin{aligned} v_1 &= (\alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2)^2 \\ v_3 &= (\alpha_3 x_2 + \beta_3 y_2)^2 \\ \alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1 &= \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Durch eine B. T. II

$$z' = z + \frac{\alpha_1 \alpha_3 x_2^2 + \beta_1 \beta_3 y_2^2 + 2\alpha_3 \beta_1 x_2 y_2}{2\mathcal{A}}.$$

$$x'_2 = \frac{1}{\mathcal{A}}(\alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2)$$

$$y'_2 = \alpha_3 x_2 + \beta_3 y_2$$

kann man dann v_1 und v_3 in die folgenden Functionen überführen

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathcal{A}^2 x_2'^2 \\ v_3 &= y_2'^2. \text{ } ^1) \end{aligned}$$

Aus der Formel

$$(v_1 v_3) = -4v_2$$

folgt dann

$$v_2 = \mathcal{A}^2 x_2' y_2'.$$

Also

$$\begin{aligned} 2v_1 &= -(v_1 v_2) = 2\mathcal{A}^2 v_1 \\ \mathcal{A}^2 &= 1. \end{aligned}$$

Die Functionen v_1 , v_2 und v_3 sind jetzt völlig bestimmt. Mit Weglassung der Accent sind sie

$$v_1 = x_2^2, \quad v_2 = x_2 y_2, \quad v_3 = y_2^2.$$

Die Gruppe ist

$$\text{II.} \quad \boxed{\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2, \quad x_1 y_1 + x_2 y_2, \quad y_1^2 + y_2^2, \\ &x_1, \quad y_1, \quad x_2, \quad y_2; \quad 1 \end{aligned}}$$

¹⁾ Transformationsgruppen II. S. 271.

c) $s = 5$.

Es sei $u_1 = x_1^2$, $u_2 = x_1 y_1$, $u_3 = y_1^2$, $u_4 = x_1$, $u_5 = y_1$, $u_6 = 1$, $v_6 = 1$. Von den Functionen $v_1, v_2 \dots v_5$ können wir annehmen, dass sie von $x_1^2, x_2 y_2, y_2^2, x_2, y_2$ linear zusammengesetzt sind. Die Coefficienten in $v_1 \dots v_5$ sollen so bestimmt werden, dass die Gruppe $v_1, v_2 \dots v_6$, wenn man der Function v_i die Function u_i zuordnet, holoëdrisch isomorph auf die Gruppe $u_1, u_2 \dots u_6$ bezogen wird. Die noch übrigen unbestimmten Coefficienten muss man durch B. T. II specialisieren suchen. Da bei der holoëdrischen Isomorphismus eine invariante Untergruppe der einen Gruppe einer invarianten Untergruppe der anderen Gruppe entspricht, so muss die 3-gliedrige Untergruppe $1, x_1, y_1$ der Gruppe g (oder $u_1, u_2 \dots u_6$) der 3-gliedrigen Untergruppe $1, x_2, y_2$ der Gruppe h entsprechen. Wir können also setzen

$$\begin{aligned} v_4 &= ax_2 + by_2, \quad v_5 = a'x_2 + b'y_2, \\ v_1 &= a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{14}x_2^2 + a_{15}x_2y_2 + a_{16}y_2^2 \\ v_2 &= a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{24}x_2^2 + a_{25}x_2y_2 + a_{26}y_2^2 \\ v_3 &= a_{31}x_2 + a_{32}y_2 + a_{34}x_2^2 + a_{35}x_2y_2 + a_{36}y_2^2. \end{aligned}$$

Die Coefficienten sollen so bestimmt werden, dass

$$(v_1 v_2) = -2v_1^2, \dots (v_4 v_5) = -1.$$

Man findet, dass die Functionen v folgende Form haben müssen:

$$\begin{aligned} v_6 &= 1, \quad v_4 = ax_2 + by_2, \quad v_5 = a'x_2 + b'y_2 \\ ab' - a'b &= 1 \\ v_1 &= v_2^2, \quad v_2 = v_4 v_5, \quad v_3 = v_5^2. \end{aligned}$$

Durch eine B. T. II führt man v_4 und v_5 in x_2 und y_2 über und bekommt dann

$$v_1 = x_2^2, \quad v_2 = x_2 y_2, \quad v_3 = y_2^2, \quad v_4 = x_2, \quad v_5 = y_2, \quad v_6 = 1.$$

Die Gruppe ist also

III.

$1, x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1^2 + x_2^2$ $x_1 y_1 + x_2 y_2, x_2^2 + y_2^2$
--

II. $\varepsilon = 1$.

Die charakteristischen Functionen seien w_1, w_2, \dots, w_r , wo

$$w_1 = z + U(x_1, y_1) + V(x_2, y_2)$$

$$w_2 = u_1(x_1, y_1) + v_1(x_2, y_2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$w_s = u_s + v_s$$

$$w_{s+1} = u_{s+1}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$w_t = u_t$$

$$w_{t+1} = v_{s+1}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$w_{r-1} = v_t$$

$$w_r = 2.$$

Hier sollen $u_1, u_2 \dots u_t, 1$ linear unabhängig sein und ebenso $v_1, v_2 \dots v_t, 1$. Man kann nun diesen Fall in genau derselben Weise behandeln, wie den vorigen Fall. Ich begnüge mich daher damit, die Resultate anzugeben. Man muss wieder drei Fälle unterscheiden, je nachdem $s = 0, 3$ oder 5 ist.

a) $s = 0$.

Die Gruppe ist

IV.

$$\begin{array}{l} 1, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2 \\ x_2, y_2, x_2^2, x_2 y_2, y_2^2 \\ z - \frac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_2 y_2 \end{array}$$

b) $s = 3$.

Die Gruppe ist

V.

$$\begin{array}{l} 1, x_1, y_1, x_2, y_2, x_1^2 + x_2^2, x_1 y_1 + x_2 y_2, \\ x_2^2 + y_2^2, z - \frac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_2 y_2 \end{array}$$

c) $s = 5$.

Die Gruppe ist

VI.

$$\begin{array}{l} 1, x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1^2 + x_2^2, x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ x_2^2 + y_2^2, z - \frac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_2 y_2 \end{array}$$

Verschiedene Fragen müssen noch beantwortet werden. Vor allen Dingen müssen wir untersuchen, ob die aufgestellten Gruppen irreducibel sind. Ich werde zeigen, dass in der That nur die Gruppen I und IV irreducibel sind. Von den übrigen vier Gruppen enthält V die drei übrigen als Untergruppen. Um die obige Behauptung zu beweisen, hat man also nur nöthig zu zeigen, dass V reducibel ist, I und IV dagegen irreducibel. Das Reducibilitäts criterium haben wir oben aufgestellt. Man kann es so formulieren: Soll eine B. T. Gruppe im Raume reducibel sein, so muss es ein bei der Gruppe invariantes, 3-gliedriges PFAFF'sches System geben, von der folgenden Form:

$$a) \begin{cases} dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 = 0 \\ \alpha_1(z, x_1, x_2, y_1, y_2) dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dy_1 + \alpha_4 dy_2 = 0 \\ \beta_1 dx_1 + \beta_2 dx_2 + \beta_3 dy_1 + \beta_4 dy_2 = 0. \end{cases}$$

Ich betrachte jetzt insbesondere die Gruppe V. Ich mache dieselben Überlegungen wie S. 321. $z^0, x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0$ seien die Koordinaten eines Punktes allgemeiner Lage. Ferner sei t eine neue Veränderliche die bei der Gruppe V nicht transformiert wird. Als homogene Koordinaten der durch den Punkt $z^0, x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0$ hindurchgehenden Richtungen kann man dann $\frac{dz}{dt} = z', \frac{dx_1}{dt} = x'_1, \frac{dx_2}{dt} = x'_2, \frac{dy_1}{dt} = y'_1, \frac{dy_2}{dt} = y'_2$ wählen. Bei Ausführung der Untergruppe von V, welche den Punkt $z^0, x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0$ festhält, werden diese Grössen projektiv transformiert und zwar so, dass x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 unter sich transformiert werden. Durch die zwei letzten der Gleichungen a) ist dem Punkte $z^0, x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0$ ein System von zwei Gleichungen:

$$\alpha_1(z^0, x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \alpha_3 y'_1 + \alpha_4 y'_2 = 0 \\ \beta_1 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \beta_3 y'_1 + \beta_4 y'_2 = 0$$

zugeordnet, das bei der genannten proj. Gruppe in x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 invariant bleiben muss. Fasst man x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 als homogene Koordinaten eines Punktes im Raume auf, kann man also sagen: Die Punkte dieses Raumes werden durch eine proj.

Gruppe, r , transformiert. Dabei muss eine Gerade invariant bleiben.

Wir wollen nun diese Gruppe, r , wirklich aufstellen. Die inf. Transformationen in V , welche den Punkt $z^0, x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0$ invariant lassen, sind, wie man sich leicht überzeugt

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_1^0)q_1 + (x_2 - x_2^0)q_2 - [(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2]r, \\ & (x_1 - x_1^0)p_1 - (y_1 - y_1^0)q_1 + (x_1 - x_2^0)p_2 - (y_2 - y_2^0)q_2 + \\ & + [y_1^0(x_1 - x_1^0) + y_1^0(x_2 - x_2^0)]r, \\ & (y_1 - y_1^0)p_1 + (y_2 - y_2^0)p_2 + [y_1^0(y_1 - y_1^0) + y_2^0(y_2 - y_2^0)]r, \\ & (x_1 - x_1^0)p_1 + (y_1 - y_1^0)q_1 + (x_2 - x_2^0)p_2 + (y_2 - y_2^0)q_2 + \\ & + [2(z - z_0) - y_1^0(x_1 - x_1^0) - y_2^0(x_2 - x_2^0)]r \end{aligned}$$

und also die inf. Transf. der Gruppe r

$$\begin{aligned} & x'_1 q'_1 + x'_2 q'_2, \quad x'_1 p'_1 - y'_1 q'_1 + x'_2 p'_2 - y'_2 q'_2, \quad y'_1 p'_1 + y'_2 p'_2, \\ & x'_1 p'_1 + y'_1 q'_1 + x'_2 p'_2 + y'_2 q'_2. \end{aligned}$$

Wir müssen also die bei dieser Gruppe invarianten Geraden suchen. Man findet durch eine einfache Rechnung, dass sie die folgenden sind:

$$\begin{aligned} ax'_1 + bx'_2 &= 0 \\ ay'_1 + by'_2 &= 0, \end{aligned}$$

also die Erzeugenden der einen Schar einer Fläche zweiter Ordnung. Also erhellt, dass das invariante PFAFF'sche System, dessen Existenz für die Reducibilität nothwendig und hinreichend ist, die Form

$$\begin{aligned} dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 &= 0 \\ \alpha(z, x_1, x_2, y_1, y_2) dx_1 + \beta dx_2 &= 0 \\ \alpha dy_1 + \beta dy_2 &= 0 \end{aligned}$$

haben muss. Da dieses System die inf. Transformationen mit den charakteristischen Functionen $1, x_1, x_2, y_1, y_2$ gestatten soll, so muss

$$\frac{\alpha}{\beta} = \text{const.} = \gamma.$$

Das PFAFF'sche System ist also

$$\begin{aligned} dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 &= 0 \\ \gamma dx_1 + dx_2 &= 0 \\ \gamma dy_1 + dy_2 &= 0 \end{aligned}$$

mit den zwei Integralen

$$\begin{aligned} \gamma x_1 + x_2 &= \text{const.} = a' \\ \gamma y_1 + y_2 &= b'. \end{aligned}$$

Werden die sich aus diesen Formeln ergebenden Werthe von x_2 und y_2 in die Gleichung

$$dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 = 0$$

hineingesetzt, erhält man

$$dz - ((1 + \gamma^2)y_1 - \gamma b')dx_1 = 0.$$

Soll diese PFAFF'sche Gleichung integrabel sein, so muss

$$\gamma = \pm i.$$

Sie giebt dann

$$z \pm ib'x_1 = \text{const.} = c'.$$

Hiermit ist bewiesen, dass die Gruppe V reducibel ist. Aus den vorigen Entwicklungen folgt auch, dass die Gruppen I und IV irreducibel sind. Denn gäbe es ein bei diesen Gruppen invariantes, 3-gliedriges System, dass die Gleichung

$$dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 = 0$$

umfasste, so müsste es das oben abgeleitete sein. Aber dieses gestattet nicht die inf. Transformation mit der charakteristischen Function x_1^2 .

Es soll endlich noch hervorgehoben werden, dass die Irreducibilität der Gruppen I und IV auch aus dem Umstande folgt, dass sie die Untergruppe 1, x_1 , y_1 , x_1^2 , $x_1 y_1$, y_1^2 besitzen. Wie Herr SCHEFFERS in seiner in der Einleitung genannten Arbeit gezeigt hat, ist nämlich diese Gruppe, auch als Gruppe von B. T. im Raume aufgefasst, irreducibel.

Wir wollen jetzt die Frage von den Gruppen der zweiten Klasse erledigen. Eine solche Gruppe, die mit G_r bezeichnet

werden mag, ist immer Untergruppe einer Gruppe G_{r+1} der ersten Klasse. Ferner ist klar, dass wenn die Gruppe G_{r+1} reducibel ist oder zu dem von Herrn SCHEFFERS behandelten Falle gehört, immer dasselbe von G_r gilt. Soll es eine irreducible G_r zweiter Klasse geben, die nicht dem von Herrn SCHEFFERS behandelten Falle gehört, muss also die zugehörige G_{r+1} mit einer von den Gruppen I und IV ähnlich sein. Durch die Transformationen I, II und III, welche G_{r+1} in I oder IV überführen, wird eine constante charakteristische Function wieder in eine Constante übergeführt. Die Gruppe G_r muss also mit einer 10- oder 11-gliedrigen Untergruppe von I oder IV ähnlich sein, welche keine constante charakteristische Function besitzt. Aber eine solche Untergruppe giebt es nicht. Sie würde nämlich die charakteristischen Functionen $x_1 + c_1$, $y_1 + c_2$ besitzen, also auch $(y_1 + c_2, x_1 + c_1) = 1$, was ein Widerspruch ist.

Man muss selbstverständlich auch untersuchen, ob die Gruppen I und IV der von Herrn SCHEFFERS untersuchten Klasse gehören, ob es also ein System von Gleichungen

$$\Phi(z, x_1, x_2, y_1, y_2) = \text{const.},$$

giebt, das bei der Gruppe invariant bleibt. Ich werde später zeigen, dass dem nicht so ist.

3.

Erledigung des zweiten Falles.

Die Gruppe gehört in diesem Falle der von Herrn SCHEFFERS behandelten Klasse. Ich werde das nachweisen, indem ich für jeden der drei Fälle, die zu unterscheiden sind, eine invariante, 1-gliedrige Gleichungenschar aufstelle.

a) Das invariante System sei $z = \text{const.}$, $x_2 = \text{const.}$, $y_2 = \text{const.}$ Ferner sei W die charakteristische Function einer inf. Transformation der Gruppe. Da die Incremente von z , x_2 , y_2 nur von z , x_2 und y_2 selbst abhängen sollen, so muss

$$y_1 \frac{\partial W}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial W}{\partial y_2} - W = f(z, x_2, y_2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y_2} = g(z, x_2, y_2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial W}{\partial z} = h(z, x_2, y_2),$$

wo f , g und h irgend welche Functionen ihrer Argumente bezeichnen. Aus der zweiten Gleichung folgt, dass W die folgende Form haben muss

$$W = \varphi(z, x_2, y_2) + \psi(z, x_1, x_2, y_1).$$

Aus der dritten folgt dann

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial \psi}{\partial z} = -h - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Also

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} + y_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x_1} = 0$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x_1} = 0.$$

Ebenso

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial y_1} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y_1} = 0.$$

Ferner, nach der ersten Gleichung

$$y_1 \frac{\partial \psi}{\partial y_1} - \psi = \alpha(z, x_2, y_2).$$

Also

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left(y_1 \frac{\partial \psi}{\partial y_1} - \psi \right) = y_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2} = 0$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(y_1 \frac{\partial \psi}{\partial y_1} - \psi \right) = y_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass ψ die folgende Form hat

$$\psi = y_1 \beta(x_1) + \gamma(z, x_2).$$

Also

$$W = \varphi(z, x_2, y_2) + y_1\beta(x_1) + \gamma(z, x_2).$$

Das Increment von x_1 :

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \beta(x_1)$$

hängt nur von x_1 ab. $x_1 = \text{const.}$ ist also eine Schar von Gleichungen, die bei der Gruppe invariant bleibt.

b) Das invariante System ist: $x_1 = \text{const.}$, $x_2 = \text{const.}$, $y_2 = \text{const.}$ In derselben Weise wie im vorigen Falle zeigt man, dass

$$x_1 = \text{const.}$$

bei der Gruppe invariant bleibt.

c) Das invariante System ist: $x_2 = \text{const.}$, $y_1 = \text{const.}$, $y_2 = \text{const.}$ Dabei bleibt auch die Schar

$$y_1 = \text{const.}$$

invariant.

4.

Ueber den Fall 3.

Das invariante System kann entweder auf die Form $z = \text{const.}$, $x_1 = \text{const.}$, $x_2 = \text{const.}$, $y_2 = \text{const.}$ oder auf die Form $x_1 = \text{const.}$, $x_2 = \text{const.}$, $y_1 = \text{const.}$, $y_2 = \text{const.}$ gebracht werden. Im ersten Falle zeigt man durch ähnliche Rechnungen wie im vorigen Abschnitte, dass $x_1 = \text{const.}$ eine bei der Gruppe invariante Schar von Gleichungen ist. Ich nehme also an, dass x_1 , x_2 , y_1 , y_2 durch die Gruppe unter sich transformiert werden. Ist W die charakteristische Function einer inf. Transformation der Gruppe, muss also

$$\frac{\partial W}{\partial y_1} = a(x_1, x_2, y_1, y_2), \quad \frac{\partial W}{\partial y_2} = b(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial W}{\partial z} = c(x_1, x_2, y_1, y_2), \quad \frac{\partial W}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial W}{\partial z} = d(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

wo a, b, c, d vier nicht näher bestimmten Functionen der Argumente bezeichnen. Aus diesen Gleichungen leitet man leicht ab, dass W von der folgenden Form sein muss

$$W = kz + q(x_1, x_2, y_1, y_2),$$

wo $k = \text{const.}$

Zu einer Gruppe, G , dieser Art gehört eine verkürzte Gruppe, die angiebt, wie x_1, x_2, y_1, y_2 transformiert werden. Diese Gruppe sei mit g bezeichnet. Ich behandle, wie schon erwähnt ist, in dieser Arbeit nur die Gruppen, deren zugehörige Gruppe g primitiv ist.

Die primitiven Gruppen in R_4 sind von Herrn PAGE untersucht.¹⁾ Man kann sie in vier Klassen vertheilen nach der Beschaffenheit der Gruppe, welche angiebt, wie die durch einen festgehaltenen Punkt gehenden Richtungen transformiert werden. Ich nenne diese Gruppe, welche ja in fast allen Untersuchungen über die Gruppen eines gegebenen Raumes eine grosse Rolle spielt, die Richtungsgruppe R . Die primitiven Gruppen in R_4 sind dann

A) solche, deren Richtungsgruppe die allgemeine projektive Gruppe in R_3 ist,²⁾

B) solche, bei deren Richtungsgruppe eine Fläche zweiter Ordnung invariant bleibt,

C) solche, bei deren Richtungsgruppe eine gewundene Curve invariant bleibt,

D) solche, bei deren Richtungsgruppe ein lineares Complex invariant bleibt.

Dagegen giebt es keine primitive Gruppe in R_4 , bei deren Richtungsgruppe ein Punkt oder eine Gerade invariant bleibt.³⁾

Wir müssen also jetzt die Richtungsgruppe von g untersuchen. Ich betrachte die Gruppe G . Es sei $z^0, x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0$ ein Punkt allgemeiner Lage im Raume z, x_1, x_2, y_1, y_2 . Durch

¹⁾ »On the Primitive Groups of Transformations in Space of Four Dimensions«. American Journal X.

²⁾ Zu der Richtungsgruppe sollen nur die inf. Transformationen gehören, durch welche die Richtungen wirklich transformiert werden.

³⁾ Vgl. Transformationsgruppen III, S. 762.

die Richtungsgruppe von G werden die Richtungen $z', x'_1, x'_2, y'_1, y'_2$ durch $z^0, x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0$ transformiert. Dabei werden x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 unter sich transformiert und zwar durch die Richtungsgruppe von g . x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 können nun als homogene Koordinaten der Richtungen des Bündels $z' - y_1^0 x'_1 - y_2^0 x'_2 = 0$ aufgefasst werden. Die Richtungsgruppe von g giebt also an, wie die Richtungen in diesem Bündel transformiert werden. Aber von der Gruppe, durch welche diese Richtungen transformiert werden, wissen wir, dass sie entweder die 10-gliedrige Gruppe, welche ein lineares Complex in sich überführt oder eine Untergruppe dieser Gruppe ist. Die Untergruppen der erwähnten 10-gliedrigen Gruppe hat Herr KNOTHE untersucht.¹⁾ Aus seiner Arbeit entnehme ich folgendes. Jede Untergruppe, welche eine Fläche zweiter Ordnung in sich überführt, lässt auch mindestens zwei Geraden invariant. Die einzigen der oben aufgezählten vier Fälle, die in Betracht kommen können, sind also die zwei letzten.

Der letzte Fall ist besonders leicht zu behandeln. Erstens müssen wir nämlich annehmen, dass unsere Gruppe G transitiv ist. Ferner werden die durch einen Punkt $z^0, x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0$ durchgehenden, dem Büschel $z' - y_1^0 x'_1 - y_2^0 x'_2 = 0$ gehörigen Richtungen durch die Gruppe möglichst allgemein transformiert. Die Gruppen mit diesen Eigenschaften hat LIE in R_n bestimmt.²⁾ Die Gruppen in R_3 sind die Folgenden: Eine 21-gliedrige, die hier nicht in Betracht kommt, da sie primitiv ist; eine 15- und eine 16-gliedrige Gruppe, die mit den beiden Folgenden ähnlich sind:

$$\text{VII.} \quad \boxed{1, x_1, x_2, y_1, y_2, x_1^2, x_1 x_2, x_2^2, x_1 y_1, x_1 y_2, x_2 y_1, x_2 y_2, y_1^2, y_1 y_2, y_2^2}$$

$$\text{VIII.} \quad \boxed{1, x_1, x_2, y_1, y_2, z - \frac{1}{2}x_1 y_1 - \frac{1}{2}x_2 y_2, x_1^2, x_1 x_2, x_2^2, x_1 y_1, x_1 y_2, x_2 y_1, x_2 y_2, y_1^2, y_1 y_2, y_2^2.}$$

¹⁾ »Bestimmung aller Untergruppen der projektiven Gruppe des linearen Complexes.« Archiv for Math. og Naturvid. 15.

²⁾ Transformationsgruppen II. S. 461.

Es ist jetzt nur übrig, die Gruppen zu untersuchen, welche dem Falle C entsprechen. Diese Gruppen, die ich mit G bezeichne, sind durch folgende Eigenschaften charakterisiert. Sie sind transitiv. Ihre verkürzten Gruppen g sind primitiv. Endlich sollen die Richtungsgruppen von g eine gewundene Curve in sich überführen.

Man kann leicht die möglichen Gliederzahlen der Gruppen G bestimmen. Die zugehörige Gruppe g ist entweder 7- oder 8-gliedrig.¹⁾ Jeder ihrer inf. Transformationen entspricht eine oder mehrere inf. Transformationen von G . Es seien W_1 und W_2 die char. Functionen zweier inf. Transformationen in G , welche derselben inf. Transformation in g entsprechen. Dann muss

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_1}{\partial y_1} &= \frac{\partial W_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial W_1}{\partial y_2} &= \frac{\partial W_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial W_1}{\partial z} &= \frac{\partial W_2}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial W_2}{\partial z} \\ \frac{\partial W_1}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial W_1}{\partial z} &= \frac{\partial W_2}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial W_2}{\partial z}\end{aligned}$$

$W_1 - W_2$ ist eine Function von der Form $az + g(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Hier muss

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y_1} &= \frac{\partial g}{\partial y_2} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} + ay_1 &= 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} + ay_2 = 0.\end{aligned}$$

Also

$$a = 0, \quad g = \text{const.}$$

Man muss hier, ebenso wie im zweiten Abschnitte, zwei Fälle unterscheiden. Im ersten Falle enthält die Gruppe eine constante char. Function. Ihre Gliederzahl ist dann um eins grösser als die der zugehörigen Gruppe g . Im zweiten Falle enthält die Gruppe keine constante char. Function, und ihre

¹⁾ Man sehe die soeben erwähnte Arbeit von Herrn PACH.

Gliederzahl ist gleich der der zugehörigen Gruppe g . Eine Gruppe der letzteren Klasse ist immer Untergruppe einer Gruppe der ersten Klasse. Ich betrachte daher zunächst nur die Gruppen der ersten Klasse. Ihre Gliederzahlen sind entweder 8 oder 9.

Ich werde jetzt so hervorgehen, dass ich zuerst zwei Gruppen mit allen verlangten Eigenschaften aufstelle und nachher zeige, dass jede Gruppe mit den verlangten Eigenschaften mit einer dieser Beiden durch eine B. T. ähnlich sein muss.

Die erwähnten Gruppen sind

$$\text{IX.} \quad \boxed{1, x_1, x_2, y_1, y_2, x_2y_1 - x_1^2, x_1y_1 + 3x_2y_2, 3x_1y_2 + y_1^2, z - \frac{1}{2}x_1y_1 - \frac{1}{2}x_2y_2}$$

und ihre invariante Untergruppe

$$\text{X.} \quad \boxed{1, x_1, x_2, y_1, y_2, x_2y_1 - x_1^2, x_1y_1 + 3x_2y_2, 3x_1y_2 + y_1^2.}$$

Die verkürzten Gruppen der Gruppen IX und X sind

$$a) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1, q_2, p_1, p_2, x_2p_1 - y_1q_2 + 2x_1q_1, x_1p_1 - y_1q_1 + \\ \quad + 3(x_2p_2 - y_2q_2), 3(x_1p_2 - y_2q_1) + 2y_1p_1, \\ \quad x_1p_1 + x_2p_2 + y_1q_1 + y_2q_2 \end{array} \right.$$

und

$$b) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1, q_2, p_1, p_2, x_2p_1 - y_1q_2 + 2x_1q_1, x_1p_1 - y_1q_1 + \\ \quad + 3(x_2p_2 - y_2q_2), 3(x_1p_2 - y_2q_1) + 2y_1p_1 \end{array} \right.$$

wo

$$q_1 = \frac{\partial f}{\partial y_1} \text{ etc.}$$

Die Gruppe a hat, wie man leicht findet, zwei invariante Untergruppen, nämlich b und

$$q_1, q_2, p_1, p_2.$$

Die Gruppe b hat dagegen nur eine invariante Untergruppe:

$$q_1, q_2, p_1, p_2.$$

Die Richtungsgruppe der Gruppen a und b ist:

$$x'_2 p'_1 + 2x'_1 q'_1 - y'_1 q'_2, \quad y'_1 q'_1 - x'_1 p'_1 + 3(y'_2 q'_2 - x'_2 p'_2), \\ 3(y'_2 q'_1 - x'_1 p'_1) - 2y'_1 p'_1.$$

Bei dieser Gruppe bleibt natürlich das lineare Complex

$$y'_1 dx'_1 - x'_1 dy'_1 + y'_2 dx'_2 - x'_2 dy'_2 = 0$$

invariant. Ich werde jetzt zeigen, dass kein anderes lineares Complex bei der Gruppe invariant bleiben kann. Die Gleichung eines linearen Complexes kann folgendermassen geschrieben werden

$$\sum_{ik}^4 a_{ik}(ik) = 0 \quad (i \geq k)$$

wo (ik) , die aus der i -ten und k -ten Spalte gebildete zweireihige Determinante der Matrix

$$\begin{vmatrix} dx'_1 & dx'_2 & dy'_1 & dy'_2 \\ x'_1 & x'_2 & y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Soll dieses lineare Complex die inf Transf.

$$x'_2 p'_1 + 2x'_1 q'_1 - y'_1 q'_2 = A_1 f$$

gestatten, so muss

$$A_1(\Sigma a_{ik}(ik)) = a_{13}(23) + a_{14}((24) - (13)) - 2a_{23}(12) - a_{24}(23) + \\ + 2a_{34}(14) = \varrho_1 \Sigma a_{ik}(ik).$$

Also entweder

$$\varrho_1 \geq 0, \quad a_{12} = a_{34} = a_{14} = a_{24} = a_{13} = a_{23} = 0$$

oder

$$\varrho_1 = 0, \quad a_{14} = a_{23} = a_{34} = 0, \quad a_{13} = a_{24}.$$

Soll das lineare Complex

$$a_{12}(12) + a_{13}((13) + (24)) = 0$$

die inf. Transf. $3(y'_2 q'_1 - x'_1 p'_2) - 2y'_1 p'_1 = A_3 f$

gestatten, so muss

$$A_3[a_{12}(12) + a_{13}((13) + (24))] \equiv 2a_{12}(23) = \\ = \varrho_3[a_{12}(12) + a_{13}((13) + (24))].$$

Also

$$a_{12} = 0.$$

Bei der Gruppe bleibt also nur das lineare Complex

$$(13) + (24) = 0$$

invariant.

Es sei nun gegeben eine B. T. Gruppe, B . im Raume, welche x_1, x_2, y_1, y_2 unter sich transformiert, und welche ausserdem die S. 335 aufgezählten Eigenschaften hat. Wir wissen, dass ihre verkürzte Gruppe durch eine Punkttransformation im Raume x_1, x_2, y_1, y_2 in a oder b übergeführt werden kann. Die folgenden Betrachtungen werden zeigen, dass diese Überführung durch eine Transf. von der Form

$$c) \quad x'_1 = X_1(x_1, x_2, y_1, y_2), \quad x'_2 = X_2, \quad y'_1 = Y_1, \quad y'_2 = Y_2,$$

wo

$$(X_1 Y_1) = (X_2 Y_2) = \text{const.}$$

$$(X_1 X_2) = (X_1 Y_2) = (X_2 Y_1) = (Y_1 Y_2) = 0$$

bewirkt wird.

Die Gruppe B sei r -gliedrig, wo r entweder $= 8$ oder $= 9$ ist. Ihre char. Functionen sind von der Form

$$W_1 = \text{const.} = b_0$$

$$W_2 = b_1(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$W_r = \varepsilon z' + b_{r-1}(x'y').$$

$\varepsilon = 0$ oder 1 . Wenn $\varepsilon = 1$, muss nothwendig $r = 9$. Denn die verkürzte Gruppe, g_{r-1} , hat dann eine $r - 2$ -gliedrige invariante Untergruppe mit den inf. Transf.

$$(b_i f) \quad i = 1, 2 \dots r - 2.$$

Also folgt, dass g_{r-1} mit der Gruppe a ähnlich sein muss und die invariante Untergruppe mit b .

In beiden Fällen, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1$ muss also unsre Transf. vier inf. Transf. von der Form

$$(b_i(x'y')f) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

in p_1, p_2, q_1 und q_2 überführen.

Die Transformation sei durch die Formeln

c) $x_1 = X'_1(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2)$, $x_2 = X'_2$, $y_1 = Y'_1$, $y_2 = Y'_2$
definiert. Die Functionen X'_1 , X'_2 , Y'_1 , Y'_2 müssen dann den
folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}(b_1 X'_1) &= \text{const.}, (b_1 X'_1) = 0, (b_1 Y'_1) = 0, (b_1 Y'_2) = 0 \\(b_2 X'_1) &= 0, (b_2 X'_2) = \text{const.}, (b_2 Y'_1) = 0, (b_2 Y'_2) = 0 \\&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

genügen. Aus der JACOBI'schen Identität

$$((b_1 X'_1) X'_2) + ((X'_1 X'_2) b_1) + ((X'_2 b_1) X'_1) = 0$$

folgt dann

$$((X'_1 X'_2) b_1) = 0.$$

Ebenso

$$\begin{aligned}((X'_1 X'_2) b_2) &= 0 \text{ u. s. w.} \\((X'_1 Y'_1) b_1) &= 0 \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

Drückt man in $(X'_1 X'_2) x'_1$, x'_2 , y'_1 , y'_2 durch x_1 , x_2 , y_1 , y_2
aus, so muss also

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} (X'_1 X'_2) &= 0, \frac{\partial}{\partial x_2} (X'_1 X'_2) = 0, \frac{\partial}{\partial y_1} (X'_1 X'_2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y_2} (X'_1 X'_2) &= 0 \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

Also

$$(X'_1 X'_2) = \text{const. u. s. w.}$$

Wir wollen jetzt die Werthe der Ausdrücke $(X'_1 X'_2)$ etc.
bestimmen. Zu dem Zwecke betrachte ich eine beliebige Gruppe
in R_4 . Ihre Richtungsgruppe sei in endlicher Form

$$\begin{aligned}\bar{x}'_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}y'_1 + a_{14}y'_2 \\&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

wo a_{ik} Functionen von x_1 , x_2 , y_1 , y_2 sind. Die Gruppe werde
nun durch eine Transformation

$$\begin{aligned}x_1 &= X_1(\xi, \eta) \dots \\ \bar{x}_1 &= X_1(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \dots\end{aligned}$$

transformiert. Die Richtungsgruppe geht dann in die folgende über,

$$\begin{aligned} X_{1\xi_1}\bar{\xi}_1 + X_{1\xi_2}\bar{\xi}_2 + X_{1\eta_1}\bar{\eta}_1 + X_{1\eta_2}\bar{\eta}_2 = \\ a'_{11}(X_{1\xi_1}\xi_1 + X_{1\xi_2}\xi_2 + X_{1\eta_1}\eta_1 + X_{1\eta_2}\eta_2) + \\ \dots \end{aligned}$$

a'_{11} entsteht hier aus a_{11} durch Einsetzung von $x_1 = X_1 \dots$. Ferner sollen ξ, η dieselben Werthe haben wie $\bar{\xi}, \bar{\eta}$, nämlich die Werthe, welche dem festen Punkte x_1, x_2, y_1, y_2 entsprechen. a'_{11} ist also numerisch $= a_{11}$ u. s. w. Die neue Richtungsgruppe wird also aus der alten durch Transformation mittelst

$$\begin{aligned} x'_1 = X_{1\xi_1}\xi_1 + X_{1\xi_2}\xi_2 + X_{1\eta_1}\eta_1 + X_{1\eta_2}\eta_2 \\ \dots \end{aligned}$$

erhalten.

Dieses wollen wir jetzt auf die Gruppe g und die Transformation c) anwenden. Durch diese Transformation wird g in a oder b übergeführt. Nun bleibt bei den Richtungsgruppen von sowohl a, b und g dasselbe lineare Complex

$$(13) + (24) = 0$$

invariant. Aus der Thatsache, dass die Richtungsgruppen von a und b kein anderes lineares Complex in sich überführt, folgt, dass die aus c) abgeleitete Transformation

$$\begin{aligned} \bar{x}'_1 = X'_{1x_1}\bar{x}_1 + X'_{1x_2}\bar{x}_2 + X'_{1y_1}\bar{y}_1 + X'_{1y_2}\bar{y}_2 \\ \dots \end{aligned}$$

dasselbe lineare Complex in sich überführen muss. Hieraus folgt, dass zwischen den Grössen $X_{1x_1}, X_{1x_2}, X_{1y_1}, X_{1y_2}$ gewisse Relationen bestehen müssen. Die Zahl dieser Relationen ergibt sich leicht. Denn die grösste projective Gruppe, welche ein nicht ausgeartetes lineares Complex in R_3 in sich überführt, enthält zehn willkürliche Constanten. In R_4 entspricht dieser Gruppe eine 11-gliedrige lineare homogene Gruppe, welche das lineare Complex, homogen, geschrieben, in sich überführt. Also muss zwischen $X'_{1x_1} \dots$ 5 homogene Relationen bestehen. Die wirkliche

Aufstellung der Relationen wird durch die folgende Bemerkung geliefert. Wenn man auf die Gruppe G eine B. T. von der Form

$$z = z' + \Omega(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2), \quad x_1 = X'_1(x', y'), \quad x_2 = X'_1, \\ y_1 = Y'_1, \quad y_2 = Y'_2$$

ausübt, geht die Gruppe in eine neue B. T. Gruppe über. Also folgt, dass die Relationen zwischen $X_{1x_1} \dots$, die aus dem Umstande folgen, dass die angegebene Transf. eine B. T. sein soll, die gesuchten fünf Relationen umfassen müssen. Aus dem genannten Umstande folgen nun gerade fünf homogene Relationen zwischen $X'_{1x_1} \dots$, nämlich

$$(X'_1 X'_2)_{x'y'} = \dots = 0 \\ (X'_1 Y'_1)_{x'y'} = (X'_2 Y'_2)_{x'y'}.$$

Diese Relationen müssen also immer von den Functionen X'_1, X'_2, Y'_1, Y'_2 befriedigt werden. Wir haben früher gefunden, dass alle Ausdrücke $(X_1 X_2) \dots$ constant sind. Also folgt

$$(X'_1 X'_2) = (X'_1 Y'_2) = (X'_2 Y'_1) = (Y'_1 Y'_2) = 0 \\ (X'_1 Y'_1) = (X'_2 Y'_2) = \text{const.} = c.$$

Aus diesen Formeln folgt, dass es eine solche Function Ω giebt, dass

$z = cz' + \Omega(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2), \quad x_1 = X'_1, \quad x_2 = X'_2, \quad y_1 = Y'_1, \quad y_2 = Y'_2$
eine B. T. in z, x_1, x_2, y_1, y_2 ist.

Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht zu zeigen, dass jede Gruppe B mit einer der Gruppen IX und X durch eine B. T. ähnlich sein muss. Denn führt man die obige B. T. auf B aus, geht sie in eine B. T. Gruppe, B' , mit derselben verkürzten Gruppe, wie entweder a oder b über. Durch die inf. Transf. der verkürzten Gruppe sind nun die inf. Transf. der Gruppe B' bis auf Constanten bestimmt. Da wir ausdrücklich vorausgesetzt haben, dass die Gruppe B und also auch B' eine constante, charakt. Function enthält, so folgt, dass B' mit IX oder X identisch sein muss.

Ebenso wie im zweiten Abschnitte müssen noch verschiedene Fragen beantwortet werden. Ebenso wie dort zeigt man

zuerst, dass es keine Gruppen von der zweiten Klasse geben kann. Ferner sind die Gruppen VII, VIII, IX und X sämtlich irreducibel. Wären sie nämlich reducibel, so müssten die Richtungsgruppen ihrer verkürzten Gruppen eine invariante Gerade haben, was nicht der Fall ist.

Endlich soll noch untersucht werden, ob die Gruppen I, IV, VII, VIII, IX und X dem von Herrn SCHEFFERS behandelten Falle angehören, ob es also eine Schar von Gleichungen

$$d) \quad \Phi(z, x_1, x_2, y_1, y_2) = \text{const.}$$

gibt, die bei einer der erwähnten Gruppen invariant bleibt. Ich betrachte zuerst die Gruppen I, IV, VII und VIII. Sie enthalten alle die Untergruppe 1, $x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2$. d) muss also diese Gruppe gestatten. Also muss die Schar von Gleichungen

$$\Phi(z, x_1, x_2^0, y_1, y_1^0) = \text{const.},$$

wo x_2^0 und y_2^0 beliebige Constanten sind, die genannte 6-gliedrige Gruppe, als Gruppe von B. T. in der Ebene z, x_1 , aufgefasst, gestatten. Eine solche invariante Schar gibt es doch nicht. Also folgt, dass Φ nicht z, x_1 und y_1 enthalten kann. Ebenso findet man, dass Φ nicht x_2 und y_2 enthalten kann. Dass auch die Gruppen IX und X nicht dem von Herrn SCHEFFERS behandelten Falle angehören, kann man in folgender Weise einsehen. Die Gleichung d) stellt eine einfach unendliche Schar von Flächen in dem 5-dimensionalen Raume dar. Einem beliebigen Punkte $z^0, x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0$ ist dadurch eine vierfach ausgedehnte, ebene Mannigfaltigkeit zugeordnet, nämlich die Tangentmannigfaltigkeit der hindurchgehenden Fläche. Dem Punkte ist also eine ebene Schar von ∞^3 Richtungen zugeordnet. Diese Schar hat mit der Schar

$$z' - y_1^0 x_1' - y_2^0 x_2' = 0$$

eine zweifach ausgedehnte, ebene Mannigfaltigkeit gemeinsam. Diese Ebene muss offenbar bei der Richtungsgruppe der Gruppe a (oder b) invariant bleiben. Aber wir wissen, dass die erwähnte Gruppe keine invariante Ebene hat.

Beiträge zur Kenntniss des Molybdänsemipentoxyds.

VON IVAR NORDENSKJÖLD.

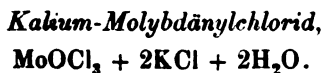
[Mitgetheilt am 8 Mai 1901 durch P. KLASON].

Anknüpfend an die Untersuchungen des Herrn Professor KLASON ¹⁾ über das Molybdänsemipentoxyd, habe ich das Molybdänylchlorid und einige Verbindungen desselben studirt.

KLASON hat das Ammoniumsalz $\text{MoOCl}_3 + 2\text{NH}_4\text{Cl}$ dargestellt und dasselbe als die Ammonverbindung der Säure $\text{MoOCl}_3 + 2\text{HCl}$ oder H_2MoOCl_3 aufgefasst. — Mir ist es gelungen, diese Säure mit Kalium, Rubidium und Caesium sowie mit einigen organischen Basen zu verbinden.

Die Säure wird in analoger Weise, wie für das Ammoniumsalz beschrieben ist, dargestellt. Molybdänsäure, in rauchender Chlorwasserstoffsäure gelöst, wird mit der berechneten Menge von Jodwasserstoff reducirt. Das freie Jod wird abgetrieben und die stark concentrirte Lösung mit Chlorwasserstoff gesättigt. — Das Wasserstoff-Molybdänylchlorid hat wesentlich dieselben Eigenschaften wie das Ammoniumsalz, ist aber in noch höherem Grade antoxydabel.

Die in angedeuteter Weise dargestellte Säure ist das Material der folgenden Salzen.



Zu der obenerwähnten Säurelösung wird etwa die Hälfte der berechneten Menge aufgelösten Kaliumchlorids hinzugesetzt, und

¹⁾ Öf. K. Vet. Ak. Förh. 58. 5 [1901].

dann die ganze Lösung in Chlorwasserstoff-strom concentrirt. Wenn man die ganze berechnete Menge hinzusetzte, würde beim Einleiten des Chlorwasserstoffes im Anfang nur Chlorkalium ausgeschieden werden. — Man lässt die sehr concentrirte Lösung erkalten. Nach einigen Stunden hat sich eine beträchtliche Menge des Kaliumsalzes als wohl ausgebildete, rhombische Prismen von dunkelgrüner Farbe auskrystallisirt. Sie sind an der Luft vollständig haltbar.

Ber.:	Mo 23.79	Cl 43.99	K 19.33	Ox.O 1.88	H ₂ O 8.92
Gef.:	23.94	44.48	19.81	2.08	9.17.

Rubidium-Molybdänylchlorid,
 $\text{MoOCl}_3 + 2\text{RbCl},$

wird wie das Kaliumsalz dargestellt. Man kann jedoch sehr wohl die ganze berechnete Menge von Rubidiumchlorid hinzusetzen, denn hier ist nicht zu befürchten, dass das Chlorrubidium ausfallen könnte. — Die Farbe ist grün mit einem Stich ins Gelbliche. Die Krystalle sind gut ausgebildete, rhombische, scheinbar reguläre Octaëder. — Dieses Salz ist weniger leicht löslich als das Kaliumsalz. Krystallwasser fehlt.

Ber.:	Mo 20.85	Cl 38.56	Rb 37.11	Ox.O 1.72
Gef.:	20.48	38.74	35.97	1.89.

Caesium-Molybdänylchlorid,
 $\text{MoOCl}_3 + 2\text{CsCl},$

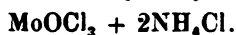
wird wie das Rubidiumsalz dargestellt. Die Farbe ist gelblich grün. Schwerlöslich. In concentrirter Lösung wird das Caesium als Caesium-Molybdänylchlorid bei Kälte beinahe quantitativ niederschlagen. Das Salz hat dieselbe Krystallform als das Rubidiumsalz.

Ber.:	Mo 17.28	Cl 31.95	Cs 47.88	Ox.O 1.45
Gef.:	17.48	31.92	46.08	1.53.

Die entsprechenden Salze von *Lithium* und *Natrium* habe ich nicht darstellen können.

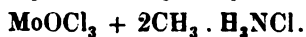
Wenn man in das Ammoniumsalz statt Ammonium Aminen einführt, entsteht eine Reihe von Salzen von brillanter grüner Farbe, deren Intensität mit dem Gehalt an MoOCl_3 zunimmt. Diese Salze werden wie das Kaliumsalz dargestellt. — Man versetzt die Lösung von H_2MoOCl_5 mit einer berechneten Menge Chlorhydrat der resp. Aminen. — Nach der Concentration in Chlorwasserstoff-strom krystallisiren die Salze aus. Die Form der Krystalle ist scheinbar regulär, wahrscheinlich aber rhombisch. Sie werden an der Luft allmählich oxydirt.

Ammonium-Molybdänylchlorid,



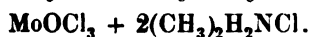
Ber.:	Mo	29.49	Cl	54.45	N	8.60	Ox.O	2.45
Gef.:		29.13		54.29		8.77		2.25 .

Methylamin-Molybdänylchlorid,



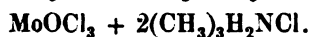
Ber.:	Mo	27.16	Cl	50.21	N	7.82		
Gef.:		27.27		49.19		7.42 .		

Dimethylamin-Molybdänylchlorid,



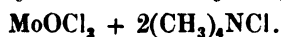
Ber.:	Mo	25.16	Cl	46.53	N	7.34		
Gef.:		25.06		46.04		7.14 .		

Trimethylamin-Molybdänylchlorid,

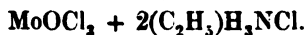


Ber.:	Mo	23.44	Cl	43.35	N	6.85		
Gef.:		23.18		43.28		6.58 .		

Tetramethylammonium-Molybdänylchlorid,



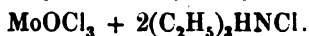
Ber.:	Mo	21.94	Cl	40.57	N	6.40		
Gef.:		21.66		40.29		6.69 .		

Aethylamin-Molybdänylchlorid,

Ber.:	Mo 25.16	Cl 46.53	N 7.34
Gef.:	25.19	45.65	7.53 .

Diäthylamin-Molybdänylchlorid,

Ber.:	Mo 21.94	Cl 40.57	N 6.40
Gef.:	21.80	39.86	6.41 .

Triäthylamin-Molybdänylchlorid,

Ber.:	Mo 19.45	Cl 35.97	N 5.67
Gef.:	18.22	33.50	5.79 .

Das Triäthylaminsalz wurde erst bei stärkster Concentration als eine beinahe gallertartige Masse ausgeschieden. Die Analyse zeigt auch, dass die Substanz nicht völlig rein, sondern wahrscheinlich mit Aminenchlorhydrat gemengt war.

In der cyclischen Reihe scheinen die Verbindungen nicht so leicht zu entstehen. Mit *Anilin* z. B. habe ich kein Salz erhalten; *Pyridin* dagegen giebt eine Verbindung, die in schöne grüne Nadeln krystallisirt. Mit *Chinolin* giebt es auch ein Salz.

Molybdänylchlorid.

KLASON ¹⁾ nimmt an, dass das sogenannte »grüne Oxychlorid« von BLOMSTRAND möglicherweise mit dem Molybdänylchlorid MoOCl_3 identisch sei.

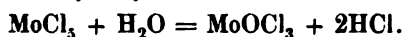
BLOMSTRAND ²⁾ erteilte diesem Oxychlorid die Formel $\text{Mo}_9\text{O}_8\text{Cl}_{32}$, welche Formel später von HÄSSELBARTH und PÜTTBACH ³⁾ zu

¹⁾ Öf. K. Vet. Ak. Förh. 58. 12 [1901].

²⁾ Journ. f. pr. Chem. 71. 449.

³⁾ Ann. 201. 126.

MoOCl_4 vereinfacht worden ist. Einen Beweis für diese Identität sieht KLASON darin, dass das grüne Oxychlorid, in Wasser gelöst, mit Salmiak zusammen das Salz $\text{MoOCl}_3 + 2\text{NH}_4\text{Cl}$ giebt. Dieser Beweis ist jedoch nicht einwandfrei, denn reines Pentachlorid giebt ganz dasselbe Salz. Das kommt daher, weil das Pentachlorid beim Lösen hydrolysirt wird.



Die Analogie mit dem Phosphorpentachlorid ist auffallend.

Nach GUICHARD,¹⁾ der die Abhandlung KLASON's jedoch nicht kannte, verläuft die Reaktion folgendermassen:



Er begründet diese Formel durch Bestimmen des Punktes, wo unlösliches Hydrat zu entstehen anfängt. Aber wenn auch die Reaktion so verlaufen ist, wie GUICHARD angiebt, ist doch eine der Voraussetzungen dabei, dass das Molybdäntetrachlorid eine neutral reagirende Lösung sei, was unwahrscheinlich ist.

Es ist jedoch ganz richtig, dass das Molybdänylchlorid unter gewissen Umständen in MoO_3 und MoCl_4 zerfallen kann. Alkalien in Überschuss²⁾ bewirken eine derartige Spaltung; in berechneter Menge hinzugesetzt, fallen sie aber das Hydrat $\text{MoO}(\text{OH})_2$ aus.

Um MoOCl_3 , wenn möglich, zu isoliren, habe ich das vorher erwähnte Rubidiumsalz $\text{MoOCl}_3 + 2\text{RbCl}$, das ohne Krystallwasser ist, im Kathodlicht-vakuum erhitzt. Statt MoOCl_3 habe ich dabei MoO_2Cl_2 und wahrscheinlich auch MoCl_4 erhalten, — Ich habe auch H_2MoOCl_3 in Chlorwasserstoffatmosphäre verdampft und ein schwarzes, amorfes Pulver als Rückstand erhalten. Die Substanz wird zum Teil in Wasser gelöst und lässt dabei ein schwarzes Pulver zurück. Die Lösung enthält MoO_3 und wird von Ammonium-Molybdänylchlorid blau gefärbt.

Es ist mir also nicht gelungen, das Molybdänylchlorid zu isoliren. Wahrscheinlich ist es nur als Wasserstoff-Molybdänylchlorid zu haben und zerfällt beim Entfernen des Chlorwasserstoffes.

¹⁾ Bull. Soc. Chim. 25, 188.

²⁾ Öf. K. Vet. Ak. Förh. 58. 10 [1901].

Das grüne Oxychlorid Blomstrand's.

Wie ich oben erwähnte, hat KLASON das Salz $\text{MoOCl}_3 + 2\text{NH}_4\text{Cl}$ aus dem grünen Oxychlorid erhalten. Um diese Thatsache genügend erklären zu können, habe ich diese Verbindung BLOMSTRAND's eingehend untersucht.

Zur Darstellung dieser Verbindung benutzte ich sauerstoffhaltiges Molybdänmetall, das ich im Chlorstrome erhitzte. Der Reactionsverlauf wird so geleitet, dass das grüne Chlorid das hauptsächliche Product ist.

In der Litteratur findet man dieses Chlorid im allgemeinen mit der Formel von PÜTTBACH MoOCl_4 bezeichnet. Um diese Formel zu bestätigen, führte man die analoge Formel WOCl_4 an. Die Übereinstimmung ist aber nur scheinbar. Das Oxychlorid MoOCl_4 giebt eine blaue Wasserlösung, die von Permanganat zu einer farblosen Flüssigkeit oxydirt werden kann. Das Oxychlorid des Wolframs dagegen kann das Permanganat nicht entfärben. *Die Oxydationsstufe* ist also eine grundverschiedene.

Wie oben erwähnt, giebt das grüne Chlorid mit Wasser eine blaue Lösung. Die blaue Farbe deutet auf die Anwesenheit von sowohl $\overset{\text{V}}{\text{Mo}}$, als auch $\overset{\text{VI}}{\text{Mo}}$ her.¹⁾

Diese Auffassung wird auch dadurch bestätigt, dass das Oxychlorid durch Zusammenschmelzen²⁾ von $\overset{\text{V}}{\text{MoCl}}_3$ und $\overset{\text{VI}}{\text{MoO}}_2 \cdot \text{Cl}_2$ im Chlorstrome entstehen kann.

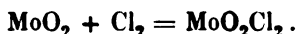
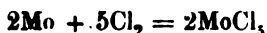
BLOMSTRAND erhielt das grüne Oxychlorid durch Erhitzen eines Gemisches von Molybdändioxyde und Kohle im Chlorstrome. Wahrscheinlich ist das Molybdändioxyd hierbei partiell zu Molybdänmetall reducirt worden. GUICHARD³⁾ hat nämlich erwiesen, dass das Molybdänmetall schon bei einer relativ niedrigen Temperatur entstehen kann. — PÜTTBACH verwendet direct Molybdänmetall und Molybdändioxyd.

¹⁾ Öf. K. Vet. Akad. Förh. 58. 21 [1901].

²⁾ Ann. 201. 127.

³⁾ Bull. Soc. Chim. 25. 181.

In beiden Fällen hat man also:



Alle Darstellungsmethoden des Oxychlorids führen also zu den beiden Componenten MoCl_3 und MoO_2Cl_2 . Aus diesem Grunde bin ich zu der Auffassung gelangt, dass das grüne Oxychlorid ganz einfach aus MoCl_3 und MoO_2Cl_2 besteht.

Diese Annahme wird auch von den Analysen bestätigt.

Es fragt sich nun: Ist das sogenannte »grüne Oxychlorid« eine konstante Verbindung oder nur eine Mischung von MoCl_3 und MoO_2Cl_2 ? Die Analysen deuten auf die letztere Annahme hin. Und zwar haben zehn (10) Analysen folgende Molekularverhältnisse angezeigt:

I	10 mol. MoCl_3 und	1 mol. MoO_2Cl_2
II	3 » » »	1 » »
III	5 » » »	2 » »
IV	3 » » »	2 » »
V	6 » » »	5 » »
VI	11 » » »	10 » »
VII	4 » » »	5 » »
VIII	1 » » »	3 » »
IX	1 » » »	4 » »
X	reines MoO_2Cl_2 , nur Spuren von MoCl_3 enthaltend.	

Das Material zu den Analysen I—VI war dunkelgrün und allein Anscheine nach homogen. VII—IX waren bräunlich grün bis braun. X bestand aus rothbraunen Schuppen.

BLOMSTRAND und PÜTTBACH haben die Oxydationsstufe nicht bestimmt. Dass dieses doch unerlässlich ist, geht aus dem Folgenden hervor:

Wahrscheinliche Formel: 5 mol. MoCl_3 + 2 mol. MoO_2Cl_2 .

Ber.:	Mo 38.84	Cl 56.76	Ox.O 2.09
Von mir gef.:	38.32	56.55	2.10.

PÜTTBACH¹⁾ hat wahrscheinlich dieselbe Substanz analysirt und für MoOCl_4 gehalten.

Für MoOCl_4 Ber.:	Mo 37.79	Cl 55.91
Von PÜTTBACH gef.:	37.89	56.28.

Nach meinen bisherigen Untersuchungen zu urtheilen, muss ich also annehmen, dass das grüne Chlorid BLOMSTRAND's keine Verbindung sondern nur als eine Art »Mischkrystall« aufzufassen sei.

Stockholm, Tekniska Högskolan, Mai 1901.

¹⁾ Ann. 201. 127.

Skänker till Vetenskaps-Akademins Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 306.)

- Cambridge.** *Philosophical society.*
 Proceedings. Vol. 11 (1901): P. 2. 8:o.
- Cambridge, Mass.** *Museum of comparative zoölogy.*
 Bulletin. Vol. 38: N:o 2—3. 8:o.
- Chambésy.** *Herbier Boissier.*
 Bulletin. (2) T. 1 (1901): N:o 5. 8:o.
- Chapel Hill.** *Elisha Mitchell scientific society.*
 Journal. Year 7 (1900): P. 1. 8:o.
- Chemnitz.** *K. Sächs. meteorologisches Institut.*
 Abhandlungen. H. 5. 1901. 4:o.
 Das Klima d. Königreiches Sachsen. H. 6. 1901. 4:o.
- Córdoba.** *Observatorio Nacional Argentino.*
 Resultados. Vol. 18. 1900. 4:o.
- Edinburgh.** *Geological society.*
 Transactions. Vol. 8: P. 1. 1901. 8:o.
- Halifax.** *Nova Scotian Institute of science.*
 Proceedings & Transactions. Vol. 10 (1899—1900): P. 2. 8:o.
- Halle.** *K. Leopoldinisch-Carolinische Akademie der Naturforscher.*
 Abhandlungen. Bd 75—76. 1899—1900. 4:o.
 Leopoldina. H. 35 (1899). 4:o.
- Hamburg.** *Deutsche Seewarte.*
 Wetterbericht. Jahrg. 25 (1900). Fol.
- Hannover.** *Naturhistorische Gesellschaft.*
 Jahresbericht. 48—49. 1900. 8:o.
- Harlem.** *Société Hollandaise des sciences.*
 Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. (2) T. 4:
 Livr. 2. 1901. 8:o.
- Kjøbenhavn.** *Commissionen for Ledelsen af de geologiske og geogra-
 phiske Undersøgelser i Grønland.*
 Meddelelser om Grønland. H. 24 & Bilag. 1901. 8:o & 4:o.
 — *Det danske meteorologiske Institut.*
 Nautisk-meteorologisk Aarbog. 1900. 4:o.
- Kristiania.** *The Fridtjof Nansen Fund for the advancement of science.*
 The Norwegian North Polar expedition 1893—96, Scientific results
 ed. by FRIDTJOF NANSEN. Vol. 2. 1901. 4:o.
- Lausanne.** *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
 Bulletin. (4) Vol. 36 (1900): N:o 138; 37 (1901): 139. 8:o.
- Lille.** *Université.*
 Travaux et mémoires. N:o 22—26. 1899—1900. 8:o.
 L'université de Lille en 1900. 12:o.
- London.** *Geologists' association.*
 Proceedings. Vol. 17 (1901): P. 1. 8:o.
 — *Meteorological office.*
 Daily weather report. Year 1900. 4:o.

(Forts. & sid. 366.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1901. N:o 5.
Stockholm.

Om grundämnenas uppkomst.

Några stereokemiska synpunkter för bedömande af
frågan om materiens enhet

af

PAUL HELLSTRÖM.

[Meddeladt den 8 Maj 1901 genom P. T. CLEVE].

Sedan det blifvit konstateradt, att de många olika krafter, som äro verksamma i naturen, kunna öfverföras den ena i den andra, att kraften sålunda egentligen endast är *en*, och att de olika kraftformerna endast äro olika modifikationer af en och samma kraft, så har också frågan om *materiens enhet* inträdt i ett nytt skede.

Om kraften är *en*, så bör också materien vara *en*, ty kraften är bunden vid materien, kraften är materien i verksamhet, den är ett uttryck för den relation, i hvilken materien, i olika delar af rummet, står till sina egna delar. En materie, som ej är i rummet fördelad, kan aldrig alstra en kraft, det är först genom afståndet emellan materiens olika delar och genom den inverkan, dessa delar på afstånd utöfva på hvarandra, som en kraft uppstår. Ytterst torde kraften utgöras af den allmänna attraktion, som materiens olika delar utöfva på hvarandra; och de olika former af kraften, som taga sig uttryck på olika sätt och som därför fått olika benämningar, såsom tyngdkraft, värme, elektricitet, kemisk kraft o. s. v., torde närmast vara beroende af det sätt, på hvilket den allmänna attraktionen på grund af

materiens *form* gör sig gällande dels emellan större massor af materien, dels emellan de mindre och de minsta partiklar, i hvilka denna är i rummet uppdelad.

Man har definierat begreppet »materia» så, att materien är det, som har utsträckning i rummet och *eger tyngd*. Denna definition är visserligen ingen *definition* i strängt logisk bemärkelse, men den har dock sitt värde såsom angifvande materiens två viktigaste egenskaper. Utaf dessa egenskaper, »utsträckning och tyngd», har den moderna kemien hittills så godt som uteslutande fäst sig vid *tyngden*, den allmänna attraktionen emellan större eller mindre mängder af materien, under det att den betydelse, som *formen*, utsträckningen i rummets olika riktningar och sättet för denna utsträckning samt det modifierande inflytande, som formen måste utöfva på attraktionen och dess sätt att verka emellan materiens minsta partiklar, hittills blifvit nästan helt och hållet förbisedd.

Om attraktionen (kraften) är direkt proportionell emot massan (materien), så följer icke däraf utan vidare, att lika stora massor alltid skola attrahera hvarandra på precis samma sätt. På ett visst afstånd blir den absoluta attraktionen så godt som densamma, oafsedt den form som de attraherande kropparne hafva; men på korta afstånd ställer sig saken på ett annat sätt. Man har tydligen på kemiens område allt för mycket fäst sig vid den satsen, att attraktionen är proportionell med de attraherande kropparnes storlek eller massa, men däremot för litet vid konsekvenserna af den satsen, att attraktionen (kraften) är omvänt proportionell emot kvadraten på afståndet. Tillämpar man den satsen på den föreliggande frågan, så är det ej svårt att inse, att äfven *formen* måste utöfva sitt stora inflytande på attraktionens sätt att verka emellan kropparne.

Antag, att vi hafva tvänne kroppar med lika stor massa, men att den ena af dessa har formen af ett klot, den andra formen af en kub, och att dessa båda kroppar få verka attraherande på en tredje kropp. I den klotformiga kroppen hafva vi, ifrån medelpunkten räknadt, lika stor materiemassa utåt i

rummets alla riktningar. I kuben däremot hafva vi, ifrån medelpunkten räknadt, en större materiemaſsa ut emot de 8 hörnen och de 12 kanterna än ut emot de 6 sidorna. Om vi nu tänka oss den tredje kroppen inom den klotformiga kroppens attraktionssfer, så verkar attraktionen ifrån kulan tydligt lika i rummets alla riktningar: huru kulan än vändes, så är det lika stor materiemaſsa, som på lika sätt verkar attraherande. Här blir därför, attraktionens storlek endast beroende af det *afstånd*, på hvilket det attraherade föremålet befinner sig till det attraherande, men icke af det sätt, på hvilket det senare vändes. Med kuben blir förhållandet däremot ett annat. Ställes här den attraherade (tredje) kroppen på ett visst afstånd ifrån kubens *medelpunkt* (tyngdpunkt), så blir det med hänsyn till attraktionens sätt att verka icke likgiltigt, huru kuben vändes. Vändes en af de sex sidorna emot det attraherade föremålet, så blir det, ifrån medelpunkten räknadt, en mindre materiemaſsa, som ligger i linien emellan de båda kropparnes medelpunkter, och afståndet emellan kubens attraherande maſsa och det attraherade föremålet blir större, än om ett af de åtta hörnen vändes emot föremålet. På stora afstånd gör sig denna olikhet icke mycket gällande, men i samma mån som kropparne närma sig hvarandra, blir denna olikhet uti sättet för attraktionens verkan allt mer och mer framträdande.

Gifver oss nu den kännedom, som vi ega om materien och dess olika föreningsformer, större skäl för det antagandet, att formen af de partiklar, som vi kalla atomer, är en och densamma och att atomernas olikheter hos de olika elementen äro förorsakade af en olika natur hos dessa senare, *eller* för det antagandet, att elementen allesammans äro af samma natur, en och samma materie, men med olika former och med en däraf betingad olikhet i sättet att verka på hvarandra?

Vid isolering af kemiskt rena kroppar, det må vara s. k. enkla kroppar (grundämnen) eller kemiska föreningar, erhållas dessa alltid, då de ur en lösning långsamt antaga fast form, såsom kristaller, utbildade efter vissa bestämda lagar. Dessa

kristallers form är så noga bestämd af den kemiska byggnaden, att man i många fall kan använda densamma till identifiering af den erhållna kroppen. Kristallformen kan visserligen på grund af de yttre omständigheter, under hvilka kristallisationen försiggått, inom trängre gränser variera, men är dock till sina grunddrag alltid densamma, särskildt beträffande de olika ytornas lutningsförhållande. Denna lagbundenhet tyder på, att de småpartiklar (atomer), af hvilka de kemiskt rena kropparne äro bildade, ega en bestämd geometrisk form *annan än* den klotformiga, att de förefinnas såsom polyëdriska kroppar. Vore de småpartiklar, som vi pläga kalla atomer, klotrunda och åtskilda ifrån hvarandra endast genom olika storlek, resp. olika grundmassa, så blir det svårt att förklara, hvarföre kristallformen alltid blir konstant. Visserligen kunna klotformiga kroppar ordna sig till polyëdriska aggregat eller kristaller, men då kraften här verkar lika i alla riktningar, så böra de klotformiga atomerna under olika yttre förhållanden också kunna ordna sig på mångfaldigt olika sätt, och böra sålunda kunna gifva upphof till en mångfald af sinsemellan olika kristallformer. Om de småpartiklar, som vi kalla atomer, däremot hafva en bestämd, en gång för alla gifven polyëdrisk form, i hvilken kraften verkar på ett olika sätt vid hörnen och i kanterna samt emot ytorna, så blir också möjligheten för atomerna att genom förening sinsemellan och med andra kroppar bilda olika kristaller, begränsad, och den lagbundenhet, som man finner i de rena kropparnes kristallform, lätt förklarad.

Se vi åter på materiens rent kemiska egenskaper, så erhålla vi ännu mera talande skäl för antagandet att de småpartiklar, som vi kalla atomer, ega en bestämd polyëdrisk form, samt att deras olika egenskaper just äro framkallade af en olikhet uti deras geometriska form, och — med vederbörlig hänsyn tagen till denna — i många punkter låta sig med lätthet förklaras.

Liksom man tillagt materien två grundegenskaper, nämligen tyngd och utsträckning i rummet, så har man också inom kemien tillagt atomerna två grundegenskaper, nämligen atomvikt och valens.

För förklarande af den första af dessa egenskaper, de olika atomvigtarna, behöfver man på atomteoriens nuvarande ståndpunkt icke antaga annat, än att materien bildat olika stora småpartiklar eller atomer; ja, man behöfver icke ens antaga, att de olika elementens atomvigheter stå i direkt förhållande till atomernas materiemassa eller volym: tillämpande erfarenheten beträffande olika grundämnens egentliga vikt, är det strängt taget ingenting som hindrar, att man kunde antaga, att t. ex. en atom järn och en atom natrium eller väte icke blott hade samma form utan äfven vore lika stora, och att olikheterna i atomvikt endast berodde på, att det är olika slags materia, som ingår i de olika grundämnena. Detta sista antagande torde t. o. m. få anses såsom det, som bäst motsvarar den äldre och ännu rådande uppfattningen af materiens natur.

Den egentliga svårigheten möter först, då man vill lemna en antaglig förklaring af atomernas andra egenskap, valensen och det egendomliga sätt, på hvilket den kemiska kraften verkar emellan olika grundämnena. Någon förklaring af denna egendomlighet hos atomerna har man ännu icke lyckats att utfundera, och skall man sannolikt aldrig lyckas att utfundera, innan man tar tillbörlig hänsyn till materiens andra grundegenskap eller den att utom tyngd äfven ega utsträckning i rummet. I den kemiska litteraturen talas om grundämnena med 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 och 8 valenser, utan att man kan förklara detta på annat sätt än genom att omskrifva saken så, att en atom af ett grundämne förenar sig med en eller flere atomer af ett annat grundämne och att »valenserna beteckna angreppspunkter för den kemiska kraften», så att ett monovalent (1-atomigt) grundämne har endast en dylik angreppspunkt, ett divalent (2-atomigt) har 2 dylika angreppspunkter o. s. v. Detta är emellertid — såsom lätt inses — ingen förklaring, utan endast en omskrifning af samma oförklarade faktum.

Och huru skall saken kunna förklaras, så länge man ej tagit hänsyn till småpartiklarnes (atomernas) verkliga form, utan

i den saken antingen bildat sig ingen föreställning alls, eller föreställer sig alla atomer såsom runda kroppar af olika storlek?

Om den kemiska kraften representeras af »den attraktion, som atomerna af ett grundämne utöfva på atomerna af ett annat grundämne», och dessa grundämnens atomer äro runda kroppar, huru skall man då kunna förklara, att i det ena fallet förenar sig en atom af det ena med 1, 2, 3 o. s. v. atomer af det andra, i det andra fallet två atomer af det ena med tre af det andra o. s. v.? Attraktionen, som en klotformig atom utöfvar, kan naturligtvis icke verka i endast *en* riktning, icke heller i *två*, *tre* eller *fyra* o. s. v., utan den måste, då massan åt alla håll är lika fördelad ifrån medelpunkten, verka i rummets *alla* riktningar; och vill man då, med fasthållande af atomernas klotform, förklara valensbegreppet och andra därmed sammanhängande frågor, så återstår icke annat än att med analogier ifrån planetsystemet försöka förklara saken med mer eller mindre vågade atom-astronomiska spekulationer, som dock hittills aldrig lyckats lemna någon antaglig förklaring.

Helt annorlunda ställer sig saken, om man antar, att de olika grundämnens atomer utgöras af polyëdriska kroppar af bestämd form. På ett visst afstånd emellan atomerna måste den geometriska formen verka därhän, att den allmänna attraktionen modifieras och uppdelas på grund af det förhållandet, att i de polyëdriska kropparnes hörn och kanter en större materiemassa kommer att på ett kortare afstånd verka på de andra atomerna än i samma kroppars ytor. De olika polyëdrarne komma därför att ställa sig emot hvarandra med sina hörn (resp. kanter), och antalet kroppar af olika form (antalet atomer af olika grundämnen), som förena sig med hvarandra, kommer att bestämmas af antalet af den polyëdriska kroppens hörn (resp. kanter). En oktaëder kommer sålunda — om vi taga hänsyn endast till hörnen — att hafva 6 »angreppspunkter för den kemiska kraften», en hexaëder 8, en rombdodekaëder 14 o. s. v. Då kraften icke, hvarken i den klotformiga eller den polyëdriska kroppen, kan verka i endast *en* riktning, så skulle det, om min hypotes är

riktig, icke finnas några 1-värdiga, 2-värdiga eller 3-värdiga atomer. Det minsta antalet hörn (kemiska angreppspunkter), som teoretiskt vore möjligt i en polyëdrisk kropp, är 4 i tetraëdern, eller, om man tar endast det holoëdriskt reguliera systemet, 6 i oktaëdern.

Med ett dylikt antagande blir det också lätt att förklara det eljes oförklarliga förhållandet, att ett och samma grundämne under olika förhållanden kan uppträda med olika valenser. Om vi t. ex. skulle antaga, att klorseriens element hafva formen af hexakisoktaëder, väteseriens grundämnen formen af oktaëder och syreseriens grundämnen formen af tetrakishehexaëder, så är det med en blick på dessa kristallformer lätt att inse, att det skulle blifva det naturligaste, att en oktaëder (t. ex. en atom väte) med sina sex hörn förenade sig med hexakisoktaëdern (t. ex. en atom klor) med just dennes motsvarande sex oktaëderhörn. Med tetrakishehexaëdern (t. ex. en atom syre) har hexakisoktaëdern (en atom klor) inga hörn så utprägladt motsvariga, och här blifva därför flere kombinationer möjliga; det ena grundämnet kan binda det andra med attraktionen fördelad på ett större eller mindre antal af de förefintliga hörnen (med flere eller färre valenser).

Likaså framgår utaf detta betraktelsesätt utan vidare, hvarföre, då ett och samma grundämne uppträder med olika antal valenser, de föreningar äro de beständigaste, d. v. s. med den kemiska kraften (attraktionen emellan atomerna) störst, i hvilka grundämnet ingår med det minsta valenstalet: attraktionen är där fördelad på ett mindre antal punkter än i de föreningar, i hvilka grundämnet ingår med ett större antal valenser. Förutom att attraktionen i senare fallet blir fördelad på flere punkter, så att t. ex. i en tetrakishehexaëder denna blir fördelad på 14 punkter, då kraften får verka genom alla förefintliga hörn, på 8 punkter, då den verkar genom så att säga hexaëderhörnen och på 6 punkter, då den verkar endast genom så att säga tetrakishörnen; så blir också afståndet till de attraherade atomerna större i förra fallet, då attraktionen uppdelas på alla förefintliga hörnen, än i senare fallet, då kraften verkar genom ett

mindre antal hörn: atomerna måste i förra fallet intaga större afstånd till hvarandra, för att alla hörnen skola kunna utöfva sin specialattraktion, och med kvadraten på afståndet aftar också kraften.

Men icke nog härmed. Äfven atomvigternas växling och den i samband därmed stående olikheten emellan olika grundämnenas och grundämnesgrupperas fysikaliska och kemiska egenskaper låter sig utan svårighet förklaras, med det af mig gjorda antagandet, att de s. k. grundämnenas atomer äro polyëdriska kroppar.

Den lagbundenhet, som i detta afseende fått sitt uttryck i det »Mendelieffska schemat» eller grundämnenas periodiska system, har med atomteoriens nuvarande utveckling trotsat alla förklaringsförsök. Den omständigheten, att man, såsom där skett, kunnat efter stigande atomvigt indela grundämnena i sju (åtta) grupper, med inom hvarje grupp likartade element såväl med hänsyn till fysikaliska som kemiska egenskaper; att man, där luckor i perioden visat sig, kunnat på förhand beräkna och förutsäga, att ett grundämne med noga angifna egenskaper måste finnas; att dylika förutsagda grundämnen sedan blifvit upptäckta och visat sig ega just de förutsagda egenskaperna: allt detta visar tydligt, att grundämnena måste till hvarandra stå i någon närmare, ännu outredd relation. Och att den nuvarande atomteorien icke varit i stånd att närmare angifva och förklara grunden till denna ovedersägliga släktskap emellan grundämnena, är ett tydligt bevis för, att de förklaringsgrunder, som man hittills haft, äro otillräckliga. Tager man däremot nödig hänsyn till sättet för materiens utsträckning i rummet, så visar sig, såsom jag i det följande skall söka visa, det som förut var oförklarligt såsom en naturlig följd af detta antagande.

Att grundämnena låta indela sig i sju olika grupper af ifrån hvarandra i egenskaper mer eller mindre olika grundämnena — till hvilka sju grupper sluter sig en åttonde med grundämnena, som stå liksom på gränsen emellan vissa af de andra gruppernas grundämnen — och att det i det holoëdriskt reguliära kristallsystemet likaledes finnes sju olika former, torde vara något mera

än en tillfällighet. Enligt min åsigt motsvara grupperna i det Mendelieffska systemet det holoëdriskt reguliera kristallsystemets sju olika former. Teoretiskt äro *endast* 7 reguliera kristallformer möjliga; och vid en grauskning af »elementens periodiska system» skall man lätt finna, att här också endast 7 fullständiga grupper finnas. Den åttonde är endast en nödfallgrupp, till hvilken man fört sådana grundämnen, som till sina egenskaper stå så att säga på gränsen emellan de andra och som det därför mött svårigheter att intränga i de sju andra grupperna.

Med detta antagande får nu en hel del förut svårförklarliga fakta sin naturliga förklaring.

De *olika* gruppernas olika kemiska egenskaper, (valens, elektro-kemiska karaktär m. m.) förklaras af deras *olika form*.

Den inom en och *samma* grupp förekommande öfverensstämmelsen i egenskaper beror åter därpå, att dessa element hafva *samma form*, ehuru olika storlek.

Den inom *hvarje grupp* förekommande regelbandenheten i atomviktens stigning beror återigen därpå, att inom samma grupp grundämnet med *högre atomvikt* är en *större form* uppkommen därigenom, att det af den materie, hvaraf de alla äro bildade, afsatt sig ett nytt lager till det närmast föregående grundämnets form, och så vidare hela raden igenom ifrån de lättaste ner till de tyngsta elementen inom samma grupp.

Förloppet vid de s. k. elementens uppstående skulle man i enlighet med detta betraktelsesätt kunna tänka sig på följande sätt.

Det gifves endast *en* materia af en och samma natur och beskaffenhet. Huru långt fördelningen af densamma i rummet än må tänkas, så måste man dock tilldela dess minsta delar egenskapen af utsträckning d. ä. en viss form och egenskapen af attraktion emellan dess minsta delar d. ä. en viss tyngd. Af denna de minsta materiella smådelarnes form och attraktionskraft skulle då den yttre materiella världens alla olika kroppar och företeelser ytterst vara beroende. Dessa materiens minsta smådelar skulle vara att uppfatta såsom de verkliga *atomerna*

(*grundatomerna*), af hvilka de s. k. element-atomerna äro uppbyggda. Den attraktion, som grundatomerna utöfva på hvarandra, måste med hänsyn till deras obetydliga massa bli mycket liten, så länge de ännu befinna sig på stora afstånd ifrån hvarandra, men så småningom komma grundatomerna emellertid, på grund af den visserligen obetydliga, men dock förefintliga attraktionen dem emellan, att allt mer och mer närma sig hvarandra; och då detta närmande nått en viss punkt, inträder ett utvecklingskede, under hvilket materiens grundatomer komma att förena sig med hvarandra till aggregat eller materiesamlingar. De enklast möjliga föreningsformerna blifva då sådana, tillhörande det reguliära systemets sju olika kristallformer; och då det på grund af de stora afstånden icke förefinnes några kraftigare verkande *yttre* krafter, som kunna verka störande på aggregeringens jämna fortgång, så måste grundatomerna lagra sig *tätt intill hvarandra*, och attraktionen dem emellan därigenom blifva så stor, att grundatomerna icke med våra nu kända arbetsmetoder kunna skiljas åt. Denna aggregering af grundatomer kan nu tänkas fortgå, så länge några grundatomer förefinnas i den del af verldsrymden, där denna utvecklingsprocess försiggår: grundatomerna aggregera sig *dels* till de redan bildade aggregaten af olika form och af högre och lägre ordning, hvilka därigenom tillväxa, *dels* sins emellan till nya enkla aggregat, som likaledes genom fortsatt tillagring af grundatomer tillväxa. Detta fortgår, till dess att alla grundatomerna på detta sätt ingått i grundämnesaggregat af högre och lägre ordning. Då detta inträffar, förefinnas dylika grundämnesaggregat af olika form och på olika utvecklingsstadier, och då all i denna utvecklingsprocess deltagande grundmaterie i dem ingått, så kunna de på detta sätt bildade grundatomaggregaten icke vidare fortväxa, utan bibehålla den storlek och den form, som de vid detta tillfälle hade. *Dessa aggregat af grundmaterien skulle då bilda hvad vi kalla grundämnenas atomer eller elementatomerna.*

Vid tiden för det här skildrade utvecklingskedets slut befinna sig dessa aggregat (de olika grundämnenas atomer) ännu

på stort afstånd ifrån hvarandra, bildande en oerhördt utbredd materiellmassa, i hvilken de olika grundämnena visserligen förefinnas färdigbildade, men ännu ej hunnit börja kemiskt inverka på hvarandra. Först sedan grundämnesaggregaten (våra s. k. atomer) kommit på ett så kort afstånd ifrån hvarandra, att den af den olika *formen* betingade differentieringen af den emellan dem verkande attraktionen kunnat börja göra sig gällande, kan i denna nebulosa inträda sådana förändringar och omlagringar, som vi benämna kemiska reaktioner, hvarefter den följande utvecklingen kan tänkas hafva försiggått i enlighet med den Kant-Laplace'ska teorien. —

Denna föreställning om förloppet vid våra s. k. grundämnens uppkomst må nu vara i större eller mindre grad riktig eller oriktig, såsom ett faktum kvarstår alltid det förhållandet, att man lättare kan förklara »grundämnenas» inbördes släktskap, deras mångfaldigt växlande egenskaper och olika sätt att träda i förening med hvarandra, om man antager dem vara af *form och storlek* betingade olika modifikationer af en och samma grundmaterie, än om man antager dem vara till sin natur fullkomligt olika grundsubstanser.

En annan konsekvens af det här framställda nya betraktelsesättet ber jag att i detta sammanhang också få i korthet antyda.

Om man tager nödig hänsyn till alla de förhållanden, som måste härflyta af element-atomernas olika *form*, alla de olika sätt, på hvilka attraktionen kan verka på olika formade kroppar, alla de olika sätt, på hvilka dessa vid olika inverkan utifrån kunna röra sig i sina mer eller mindre labila jämnviktslägen, och de många olika rörelseformer, som däraf måste betingas; så torde man med denna nya synpunkt för naturföreteelsernas förklaring kunna komma till en sannare och riktigare uppfattning äfven af de *krafter*, som äro verksamma i materien.

Vibrationsteorien, som i läran om ljuset så segerrikt utträngt den äldre emanationsteorien, har hittills haft en svag punkt i sin hypotes om etern. Enligt den af mig här framställda teorien skulle detta ämne icke existera, i det att all uti grundämnenas bildning deltagande materie ingått i dessa; och hela eterhypotesen för öfrigt blifva alldeles öfverflödig, i det att de vibrationer, som vi uppfatta såsom ljus, värme, elektricitet o. s. v. och som man antar vara vibrationer uti den s. k. etern, helt enkelt skulle vara att uppfatta såsom olika *atom-vibrationer*, framkallade däraf, att den verkande kraften på grund af atomernas olika storlek, form och inbördes läge till hvarandra blifvit på olika sätt modifierad och därigenom framkallat olika rörelseformer. Äfven en på stort afstånd befintlig kropp måste nämligen utöfva inflytande på det labila jämnvigtsläge, resp. på den rörelse, i hvilken atomerna hållas på grund af hörnens, kanternas och ytornas olika attraktion hos olika polyëdriska kroppar; och komma därför de svängningar, i hvilka atomerna vid olika inverkan utifrån råka, att betingas endast af dessas egen storlek, form och inbördes läge samt af den utifrån verkande kraftens storlek (den påverkande kroppens afstånd och massa)¹.

För att i detalj afgöra den frågan, hvilken form hvarje särskildt »grundämne» har, hvilket för min teoris konsekventa utveckling i alla riktningar är af den största betydelse, erfordras mycket vidlyftigare undersökningar och utredningar, än min af andra uppgifter strängt upptagna tid medgifvit.

Följande torde man dock redan nu kunna med säkerhet påstå, nämligen, att, om de olika i det Mendelieffska schemat upptagna sju gruppernas element-atomer hafva olika former, motsvarande det reguliära kristallsystemets sju olika former, de element, som hafva det lägsta valenstalet, motsvara de jämförelse-

¹) Antagandet, att de krafter, som vi benämna värme, ljus, elektricitet o. s. v. icke uti världarymden förmedlas och uppbäras af någon materiell substans, är icke mera orimligt än antagandet, att den allmänna attraktionen emellan olika himlakroppar icke uppbäres eller förmedlas af någon emellan dem utbredd materia.

vis enklare formerna uti kristallsystemet, hvilka hafva det minsta antalet hörn, kanter och ytor; och att de element åter, som hafva det högsta antalet valenser, motsvara de mera komplicerade formerna, som hafva det högsta antalet hörn, kanter och ytor. Den nya synpunktens pröfvande möter emellertid många svårigheter, då valensernas antal vid detta betraktelsesätt kommer att blifva ett helt annat än det hittills antagna, och atomvigterna på grund däraf också i de olika fallen måste beräknas i enlighet med de konsekvenser, som däraf föranledas.

Såvidt jag hittills kunnat finna, motsvara de olika elementserierna följande kristallformer:

- | | | |
|---------------------|---------|--------------------------|
| 1. väteseriens | element | — oktaëder-form, |
| 2. berylliumseriens | d:o | — ikositetraëder-form, |
| 3. borseriens | d:o | — rombdodekaëder-form, |
| 4. kolseriens | d:o | — hexaëder-form, |
| 5. kväfveseriens | d:o | — triakisoktaëder-form, |
| 6. syreseriens | d:o | — tetrakishexaëder-form, |
| 7. fluorseriens | d:o | — hexakisoktaëder-form. |

Den åttonde seriens element skulle vara att hänföra till dem af ofvanstående grupper, som hafva ett växlande parameterförhållande.

Af dessa serier anser jag n:o 1, 3, 5 och 7 för säkrast. Seriernas 2, 4 och 6 inbördes ställning med hänsyn till formen kommer kanske vid en noggrannare granskning att visa sig vara en annan.

Vid uppgörandet af ofvanstående lista har hänsyn i främsta rummet tagits till valensen och de kemiska egenskaperna i öfrigt, men i andra rummet äfven till en del fysikaliska och kristallografiska förhållanden. Naturligtvis har, såsom ofvan antydts, nödig hänsyn tagits äfven till en del andra förhållanden, t. ex. att de hittills antagna atomvigternas storlek står i närmaste samband med de mer eller mindre riktiga antagandena beträffande valensen, och att atomvigterna inom de olika grupperna därför måste ändras i enlighet med de nya stereokemiska valenserna.

Först då alla gruppernas atom-stereometri blifvit fullt utredd, kan en exakt atomvigtstabell enligt detta åskådningssätts fordringar med säkerhet uppgöras.

I detalj har jag ännu icke varit i tillfälle att kontrollera, huruvida stigningen i atomvigtarna motsvarar den gjorda indelningen, för mer än en serie, nämligen väteserien.

Om man antager, att materiens grundatomer äro klotrunda, så skulle den enklaste oktaëder man med dem kunde uppbygga, bestå af 6 grundatomer med två i hvar och en af oktaëderns kanter. Nästa oktaëder med 3 grundatomer i kanten skulle bestå af 19 grundatomer o. s. v. Räknar man ut, huru många grundatomer, som skulle åtgå för uppbyggande af hela serien af oktaëdrar med stigande antal grundämneshatomer i kanterna, och sätter den lägsta i serien, oktaëdern med 2 grundatomer i kanten = 1 = väte, så erhålles följande tablå:

Grundämnets namn och tecken.	Grundatomernas antal		Med väte som enhet	
	i kanten	inalles	beräknadt	bestämdt
Väte, H.	2	6	1	1
—	3	19	—	—
Litium, Li	4	44	7,33	7,03
—	5	85	—	—
Natrium, Na . . .	6	146	24,33	23,05
Kalium, K.	7	231	38,50	39,15
—	8	344	—	—
Rubidium, Rb . . .	9	489	81,50	85,4
—	10	679	—	—
Caesium, Cs . . .	11	800	133,33	133,0
—	12	1,065	—	—

Såsom af denna tablå synes, är det en ganska god öfverensstämmelse emellan de enligt min stereokemiska teori beräknade och de på experimentell väg fastställda atomvigtarna. Möj-

ligen skulle en revidering af atomvigtarna gifva bättre öfverensstämmande resultat. Som bekant, är alkalimetallernas särskiljande förenadt med ganska stora svårigheter, och med de metoder, som vi härför haft och hafva, är det icke osannolikt, att atomvigtarna vid en revision kunde komma att visa sig vara ändå mera öfverensstämmande med de af mig på teoretiska grunder beräknade.

För de öfriga serierna har jag påbörjat liknande beräkningar, men på grund af bristen på stereometriska formler för beräkning af de ifrågavarande figurernas storlek vid växande axel resp. sida, och då jag haft allt för liten tid öfrig att egna åt dessa undersökningar, så äro de resultat, jag hittills nått, icke sådana, att jag anser mig ännu böra meddela desamma. Då jag emellertid anser det önskvärdt, att de nya synpunkter, som jag här framställt och hvilkas vidare utarbetande omständigheterna hindra mig att själf verkställa, må kunna blifva underkastade en mera ingående granskning, så att det, som i dem möjligen kan vara af värde, må kunna för vetenskapens utveckling blifva i möjligaste mån tillgodogjordt, och det, som i dem möjligen kan vara oriktigt, må blifva vederlagdt, så har jag ansett mig böra framlägga den föreliggande utredningen i det skick, hvari densamma nu framträder.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts från sid. 35)

London. *R. Astronomical society.*

Monthly notices. Vol. 61 (1901): N:o 5. 8:o.

Supplementary catalogue of the library. 1900. 8:o.

— *Chemical society.*

Journal. Vol. 79—80 (1901): 5. 8:o.

Proceedings. Vol. 17 (1901): N:o 235—236. 8:o.

— *Linnean society.*

Journal. Botany. Vol. 35: N:o 242. 1901. 8:o.

, Zoology. Vol. 28: N:o 181. 1901. 8:o.

List. 1900/01. 8:o.

— *R. Meteorological society.*

The meteorological record. Vol. 20 (1900): N:o 77. 8:o.

— *R. Microscopical Society.*

Journal. 1901: P. 2. 8:o.

— *Royal Society.*

Reports to the Malaria committee. Ser. 5. 1901. 8:o.

— *Zoological Society.*

Transactions. Vol. 15: P. 6—7. 1901. 4:o.

Proceedings. Year 1900: P. 4. 8:o.

— *Royal Botanic gardens, Kew.*

Bulletin of miscellaneous information. 1901: App. 2. 8:o.

London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*

The Canadian Entomologist. Vol. 33 (1901): N:o 4. 8:o.

Manchester. *Geological society.*

Transactions. Vol. 26 (1898/1900): Index; 27 (1901): P. 1—2. 8:o.

Mexico. *Observatorio meteorológico central.*

Boletín de agricultura, minería é industrias. Año 10 (1900): N. 1. 8:o.

Montreal. *Natural history society.*

The Canadian record of science. Vol. 8 (1900): N. 3—4. 8:o.

München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*

Sitzungsberichte. Math.-phys. Cl. 1901: H. 1. 8:o.

, Philos.-philol. hist. Cl. 1900: H. 5. 8:o.

— *K. B. meteorologische Centralstation.*

Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern. 1901: 2. 4:o.

Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*

Atti. (2) Vol. 10. 1901. 4:o.

Rendiconto. (3) Vol. 7 (1901): Fasc. 2—3. 8:o.

New York. *American museum of natural history.*

Bulletin. Vol. 13 (1900). 8:o.

Memoirs. Vol. 14: 2. 1901. 4:o.

— *Observatory of Columbian university.*

Contributions. N:o 17. 1901. 8:o.

Ottawa. *Field-naturalists' club.*

The Ottawa Naturalist. Vol. 15 (1901): N:o 1. 8:o.

- Padova.** *R. Osservatorio astronomico.*
Contributi. 4 småskrifter. 8:o.
- Paris.** *Société astronomique de France.*
Bulletin. 1901: 4. 8:o.
— *Société de géographie.*
La Géographie. Année 1901: N:o 4. 8:o.
— *Société géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 28 (1900): N:o 8. 8:o.
— *Société météorologique de France.*
Annuaire. Année 47 (1900): 1—3. 8:o.
— *Bureau Central météorologique de France.*
Bulletin International. Année 43 (1900). 4:o.
- Philadelphia.** *Academy of natural sciences.*
Proceedings. 1900: P. 3. 8:o.
— *American philosophical society.*
Proceedings. Vol. 39 (1900): N:o 164. 8:o.
— *Geographical society.*
Bulletin. Vol. 3 (1901): N:o 1—2. 8:o.
- Pola.** *K. u. K. Hydrographisches Amt der k. u. k. Kriegs-Marine.*
Meteorologische Termin-Beobachtungen. 1901: 3. Fol.
- Prag.** *K. k. Sternwarte.*
Astronomische Beobachtungen in den Jahren 1892—1899. 4:o.
- Roma.** *R. Accademia dei Lincei.*
Classe di scienze morali...
Atti. (5) P. 2: Notizie degli Scavi. 1900: 12; 1901: 1. 8:o.
Classe di scienze fis...
Rendiconti. (5) Vol. 10 (1901): Sem. 1: Fasc. 7. 8:o.
Annuario. 1901. 12:o.
— *R. Comitato geologico d'Italia.*
Bollettino. 1900: N. 4. 8:o.
- Saint John.** *Natural history society.*
Bulletin. N:o 19 (= Vol. 4: P. 4). 1901. 8:o.
- San Francisco.** *Astronomical society of the Pacific.*
Publications. Vol. 12 (1900): N. 76. 8:o.
- St. Pétersbourg.** *Observatoire Physique Central.*
Bulletin météorologique. 1899—1900. Fol.
- Stonyhurst.** *College observatory.*
Results of meteorological and magnetical observations. 1900. 8:o.
- Utrecht.** *Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen.*
Verslag. 1900. 8:o.
Aanteekeningen. 1900. 8:o.
— *Institut R. Météorologique des Pays-Bas.*
Annuaire 1898. 4:o.
VAN RIJCKEVORSEL, Comparison of the instruments for absolute magnetic measurements. 1900. 4:o.
- Washington.** *Academy of sciences.*
Proceedings. Vol. 3 (1901): pp. 139—153. 8:o.

- Washington.** *U. S. Department of agriculture.*
Publications. 18 st. 1900—1901. 8:o.
- *U. S. Weather Bureau.*
Monthly weather review. Vol. 29 (1901): N:o 1. 4:o.
Weather map. 1901: 1—2. Fol.
- *U. S. Naval observatory.*
Astronomical magnetic and meteorological observations. Year 1891.
4:o.
- Wien.** *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Verhandlungen. 1901: 2—3. 8:o.
- *K. K. zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd. 51 (1901): H. 2. 8:o.
- Af Professor A. G. Nathorst.**
2 originalbref från Berzelius till J. Th. Nathorst.
25 småskrifter.
- Af utgifvarne:**
Le devoir, dir. M^e V^{ve} GODIN. T. 25 (1901): 4. 8:o.
La Feuille des jeunes naturalistes, red. A. DOLLFUS. (4) Année 31
(1901): N:o 367. Paris. 8:o.
Berliner astronomisches Jahrbuch für 1903, hrsg. von dem K. Astro-
nomischen Rechen-Institut. Berl. 1901. 8:o.
The American monthly microscopical journal. Vol. 21 (1900): N:o 1—
12. Washington. 8:o.
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne, red. N. WILLE. Bd 39: H. 1.
Christiania 1901. 8:o.
- Af författarne:**
ARRHENIUS, S., Ueber die Wärmeabsorption durch Kohlensäure.
Lpz 1901. 8:o.
— Berättelse öfver en på uppdrag af Vattenfallskomitén företagen
resa. Sthlm 1901. 8:o.
AURIVILLIUS, CHR., Insekternas själslif. Sthlm 1901. 12:o.
BOHLIN, K., Berättelse i astronomi 1901. Sthlm 1901. 12:o.
DE GEER, G., Die Gletscher von Spitzbergen. Berl. 1900. 8:o.
SJÖSTEDT, Y., Från den ornitologiska kongressen i Paris 1900. Sthlm
1901. 8:o.
ALBERT I, prince de Monaco, Notes de géographie biologique marine.
Berl. 1900. 8:o.
— Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son yacht.
Fasc. 17—18. Monaco 1900. Fol.
BERTHELOT, Les carbures d'hydrogène 1851—1901. T. 2. Paris 1901.
8:o.
HENRY, L., La fondation Nobel. Louvain 1901. 8:o.
MACOUN, J. M., A list of the plants of the Pribilof islands. Wash.
1899. 8:o.
NASCIUS, F. C. DE, A la conquête du ciel. Livre 5. Nantes 1901.
8:o.
NEWTON, A., Ootheca Wolleyana. P. 1. Lond. 1864. 8:o.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 58.

1901.

Nº 6.

Onsdagen den 12 Juni.

INNEHÅLL:

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 369.
ÅNGSTRÖM, Ueber die Abhängigkeit der Absorption der Gase, besonders der Kohlensäure, von der Dichte	» 371.
ÅNGSTRÖM, Einige Bemerkungen zur Absorption der Erdstrahlung durch die atmosphärische Kohlensäure	» 381.
BOHLIN, Ueber den Lichtwechsel von <i>U</i> Cephei	» 391.
VON KOCH, Quelques théorèmes sur les fonctions entières	» 405.
PETRINI, Sur l'ordre de convergence et divergence des séries à termes positifs	» 415.
PETRINI, Les limites des dérivées secondes du potentiel d'une couche simple	» 421.
BERGSTRAND, Sur la parallaxe d'une étoile dans le voisinage de 61 Cygne	» 429.
HOLMGREN, Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre et sur la généralisation du problème de Dirichlet	» 437.
EKBOM, Om Para-Nitrobenzolsulfonsyra	» 457.
EKBOM, Bidrag till kännedomen om svafveldioxidens inverkan på diazoföreningar	» 465.
KOCH, Beiträge zur Kenntnis der Wärmeabsorption in Kohlensäure	» 475.
Skänker till Akademiens bibliotek	sidd. 370, 390, 414, 428, 464, 474, 489.

Tillkännagafs, att Akademiens ledamöter: Intendenten för Riksmuseets paleontologiska afdelning Professor GUSTAF LINDSTRÖM och Föreståndaren för det Nordiska Museet Doktor ARTUR HAZELIUS med döden afgått.

Att förestå den efter Professor LINDSTRÖM lediga intendentsbefattningen vid Riksmuseum förordnades tills vidare Professor HJ. THÉRL.

Herr RETZIUS höll ett utförligt föredrag om den gerimanska rastypen, hvilket föredrag var afsedt att hållas vid Akademiens

sammankomst i April, då Professor RETZIUS nedlade presidiet hos Akademien, men som då måste uppskjutas i anseende till den långt framskridna tid, som efter behandlingen af en stor mängd löpande ärenden var för ändamålet öfrig.

Herr BOHLIN redogjorde för af honom utförda undersökningar öfver ljusvexlingarne hos den variabla stjernan *U* i stjernbilden Cepheus, och öfverlemnade för offentliggörande en af honom författad afhandling i ämnet.

Till införande i Akademiens skrifter antogos följande afhandlingar och uppsatser:

i Bihaget till Akademiens Handlingar: 1:o) »Ett bidrag till teorien för polens rörelse» af Professor A. V. BÄCKLUND; 2:o) »Om vätskors förhållande i kapillar-rör under inflytande af elektrisk luftström» af Professor S. LERNSTRÖM i Helsingfors; och i Öfversigten de i innehållsförteckningen angifna 11 afhandlingar.

Följande skänker anmälades:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *Kongl. Biblioteket.*

Handlingar. 23 (1900). 8:o.

— *Generalstabens Litografiska Anstalt.*

Postkarta öfver Sverige. 1 : 800 000. 2 blad.

— *Karolinska Institutet.*

5 st. dissertationer 1901. 8:o.

— *Stockholms Högskolas Botaniska institut.*

Meddelanden. Bd 3 (1900). 8:o.

— *Svenska sällskapet för Antropologi och Geografi.*

Ymer. Årg. 21 (1901): H. 2. 8:o.

— *Svenska trädgårdsföreningen.*

Tidskrift. N. F. 1901: Nr 4. 8:o.

Lund. *Universitetets-Biblioteket.*

Acta. 36 (1900). 4:o.

4 st. dissertationer 1900—1901. 8:o & 4:o.

Upsala. *Universitets-Biblioteket.*

23 st. dissertationer 1899/1901. 8:o & 4:o.

Östersund. *Jämtlands läns Fornminnesförening.*

Tidskrift. Bd 2: H. 4. 1901. 8:o.

(Forts. å sid. 380.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1901. No 6.
Stockholm.

Meddelande från Upsala Univ. Fysiska Institution.

Ueber die Abhängigkeit der Absorption der Gase, besonders der Kohlensäure, von der Dichte.

Von KNUT ÅNGSTRÖM.

(Mitgetheilt am 12 Juni 1901.)

1) Bei Untersuchungen über die Absorption der Strahlung durch die Gase wird gewöhnlich angenommen, dass diese von dem Drucke unabhängig ist, dass also die Absorption die gleiche ist, sofern nur das Produkt pl (p = Druck, l = Länge der durchgestrahlten Schicht) konstant ist. Dass diese Annahme bei kleineren Druckänderungen annähernd richtig ist, könnte wohl als wahrscheinlich angenommen werden, wie auch dass sie bei grösseren Druckänderungen nicht gültig sein kann.

Schon in einer meiner ersten Arbeiten über die spektrale Verteilung der Absorption in dem ultraroten Spectrum¹⁾, habe ich auch die Frage zu beantworten gesucht, ob die Absorption eines Gases eine Funktion seiner Spannung sei. Es hatte sich bei dieser Untersuchung gezeigt, dass die Absorption eines Körpers in flüssigem und gasförmigem Zustande nicht identisch ist, ein Resultat, das durch die späteren Untersuchungen von PASCHEN²⁾ völlig bestätigt wurde. und schon dadurch könnte man wohl berechtigt sein, an die Richtigkeit des oben erwähnten Satzes zu zweifeln. Um die Verhältnisse bei den Gasen näher zu untersuchen, wurden zwei Röhre von 6 cm und 12 cm Länge benutzt

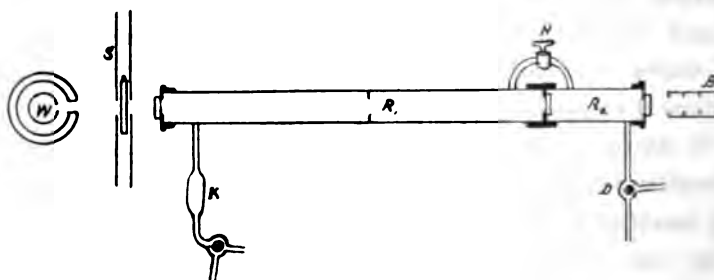
¹⁾ K. ÅNGSTRÖM, Öfversigt af K. Vet. Ak. Förhandl. 47, p. 331, 1890, Physikalische Revue, I Band, 325. 1892.

²⁾ PASCHEN, Wied. Ann. 51, 23, 1894 und 52, 221, 1894.

und die Absorption verglichen, als die Röhre mit demselben bei 1 resp. $\frac{1}{2}$ Atm. gefüllt waren. Obschon im allgem. eine stärkere Absorption für das kürzere Rohr, d. h. für dichtere Gas, sich ergeben hat, war die Verschiedenheit nicht gross genug, um bestimmte Schlüsse über diese Frage erlauben. Es erschien mir deswegen wünschenswerth, die Untersuchung wieder und zwar mit Röhren, die grössere Druckänderungen erlauben könnten, aufzunehmen, ein Wunsch, den ich in der letzten Zeit Gelegenheit hatte erfüllt zu sehen.

Die zu diesem Zwecke angestellten Beobachtungen sind leicht einzusehen ist, mit ziemlich grossen Schwierigkeiten verbunden. Wenn z. B. die Absorption 10 % der Strahlung betrug und die Veränderung dieser Absorption 20 % ist, gilt es eine Veränderung in der Gesamtstrahlung zu bestimmen, die nur 2 % derselben beträgt. Die Fehler bei der Bestimmung der Veränderung müssen deswegen ziemlich gross sein. Nur durch eine grosse Anzahl von Beobachtungen und die peinlichste Sorgfalt bei der Ausführung können diese Fehler vermindert werden. Die unten in den Tabellen angeführten Werthe sind denn Mittel von 5 bis 10, oftmals noch mehr Einzelbeobachtungen.

2) Die Versuchsanordnung ist durch die nebenstehenden veranschaulicht.



Das Versuchsrohr von 4 cm inneren Diameter besteht aus zwei durch Steinsalzplatten geschlossenen Abtheilungen, von denen R_1 eine Länge von 80,3 cm, R_2 eine Länge von 18,4 cm hat. Durch die Röhre H mit Hahn können die beiden Abtheilungen

einander in Verbindung gesetzt oder von einander getrennt werden. Das Rohr R_2 kann übrigens durch einen Dreiweghahn D , mit einem Kohlensäurebehälter oder mit der äusseren Luft in Verbindung gesetzt werden und R_1 ebenso mit einem Quecksilbermanometer und der Wasserstrahl-Luftpumpe. Als Wärmequellen wurde benutzt 1) eine Argand'sche Lampe mit Thoncylinder, 2) ein grosser Bunsenbrenner und 3) eine geschwärzte Platinbandspirale, die elektrisch erhitzt wurde. Die beiden ersten Wärmequellen waren von einem cylindrischen Wasserschirm umgeben. In diesem Schirme war eine Oeffnung von 1,5 cm Diameter für die Strahlung angebracht. Die Wärmequelle stand c. 20 cm von dem Doppelschirme S entfernt. Dieser war mit Löchern von 2 cm Diameter versehen, welche durch einen beweglichen Wasserschirm geöffnet und geschlossen werden konnten. Zahlreiche Diaphragmen schützten den Bolometer B vor Reflexion von den inneren Röhrwänden, die übrigens sehr rauh waren.

Die Versuche wurden in folgender Weise angestellt. Von dem Kohlensäurebehälter wurde das Gas durch ein Rohr mit Phosphorsäureanhydrid (v. 50 cm Länge) durch die Röhre R_1-R_2 geleitet, darnach wurde der Hahn H geschlossen, R_1 mit der Luftpumpe in Verbindung gesetzt und das Gas stark verdünnt, das Gas in R_2 dagegen zu gewünschtem Drucke komprimiert. Nachdem die durch das Rohr gegangene Strahlung bestimmt war, wurde der Hahn H geöffnet und die Strahlung wieder bestimmt. Die Strahlung durchdringt also in beiden Fällen dieselbe Gasmasse und zwar bei verschiedenen Drucken, indem diese ungefähr im Verhältnisse 5:1 variirten.

Die Vorteile bei dieser Beobachtungsmethode sind offenbar: es werden bei den beiden Versuchen immer dieselbe Gasmasse und dasselbe Rohr unter unveränderten Versuchsbedingungen benutzt. Nur die Druckverteilung des Gases in den Rohren hat variirt.

Wenn die Drucke bei dem ersten Versuche

$$\text{in } R_1 = h$$

$$\text{in } R_2 = H$$

sind und die respektiven Längen mit L und l bezeichnet werden,

erhält man, wenn die Volumina W und w von R_1 und R_2 Längen genau proportional sind, den gemeinsamen Druck x , nachdem H geöffnet ist,

$$x = \frac{Hl + hL}{l + L}$$

Durch Anbringung eines kleinen Kompensationsrohres (s. die Fig.) wurde die Bedingung $W:w = L:l$ ziemlich genau erfüllt.¹⁾

Bei den Bestimmungen der Absorption der Kohlensäure wurde entweder die Strahlung durch das Rohr mit der Strahlungsquelle entfernt war, verglichen (Wechselbestimmungen), oder wurde das Rohr in seiner Lage fest behalten und die Strahlung unter verschiedenen Umständen bestimmt (Bestimmungen am festem Rohr). Wenn die Argand'sche Lampe benutzt wurde, konnte nur, den Schwankungen der Lampen-Strahlung zufolge, die erste Methode benutzt werden, mit dem Bunsen'schen Brenner wurden die beiden versucht, mit der Platinspirale nur die letztere wählte.

3) Folgende Tabelle giebt eine Übersicht der Beobachtungsergebnisse, die wir mit der Argand'schen Lampe erhalten haben. Die zweite und dritte Kolumne enthalten die Drucke der Kohlensäure in den beiden Röhren, die vierte und fünfte die Ablenkungen des Galvanometers mit und ohne Rohr vor dem Bolometer, die sechste das Verhältniss dieser Ablenkungen in Procenten, die siebente die Differenz zwischen zwei zu derselben Beobachtungsreihe gehörenden Bestimmungen bei verschiedener Gasdichte. Schliesslich enthält die achte Kolumne die entsprechende Änderung der Absorption bei Verminderung der Gasdichte.

¹⁾ Der in den Tab. eingeführte, beobachtete Druck x ist ein wenig grösser als der berechnete.

Tab. 1.

Reihe	Druck mm		Ablenkung		P	Diff.	Änderung d. Abs. Proc.
	R ₁	R ₂	mit Rohr	ohne Rohr			
1 {	22	741,0	207,2	244,6	84,6	2,2	— 37
		158,8	210,5	242,8	86,8		
2 {	13,1	740,5	202,6	235,7	86,1	0,8	— 13
		150,5	202,1	232,6	86,9		
3 {	18,3	740,5	191,8	221,8	86,5	0,9	— 15
		153,8	195,4	223,7	87,4		
4 {	19,2	743,5	204,9	243,2	84,3	0,3	— 5
		156,5	205,8	243,0	84,6		
5 {	17,7	743,5	208,8	248,2	84,2	0,8	— 13
		154,1	208,1	245,4	85,0		
6 {	29,9	2484	197,2	244,7	80,7	1,7	— 21
		463,5	202,2	245,8	82,4		

Mittel der Differenzen der fünf ersten Reihen ist 1,0 Weil die Absorption in diesem Falle nur 6 Proc. beträgt, ist die Änderung der Absorption $\frac{1}{6} = 17$ Proc. bei einer Änderung des Druckes von 1 auf $\frac{1}{6}$ Atm. Die sechste Beobachtungsreihe giebt für eine Änderung des Druckes von c. 3 auf $\frac{3}{5}$ Atm. eine Änderung in der Absorption = 21 Proc.

Mit der Platinspirale von c. 300° C. als Wärmequelle wurden folgende Resultate erhalten.

Tab. 2.

Reihe	Druck mm		Ab- lenkung	Diff.	Änderung d. Abs. Proc.
	R ₁	R ₂			
1 {	9,6	769,0	204,5	2,0	— 12
		151,2	206,5		
2 {	10,2	768,4	201,8	1,5	— 9
		153,2	203,3		
3 {	14,0	768,3	195,9	2,5	— 16
		155,7	198,4		
4 {	8,6	2049	198,1	2,1	— 12
		389,1	200,2		
5 {	11,5	1506	196,5	1,7	— 9
		290,2	198,2		

Die Änderung der Absorption bei einer Druckänderung von 1 auf $\frac{1}{6}$ Atm. ist hier c. 12 Proc. bei einer Druckänderung von 2,4 auf 2,4. $\frac{1}{6}$ Atm. 10,5 Proc. Der Unterschied dieser Zahlen fällt in den Bereich der Beobachtungsfehler.

Mit dem Bunsen'schen Brenner wurden teils Wechselbestimmungen, teils Bestimmungen mit festem Rohr ausgeführt. Diese sind in Tabelle 4, jene in Tabelle 3 zusammengestellt.

Tab. 3.

Reihe	Druck mm		Ablenkung		P	Diff.	Änderung d. Abs. Proc.
	R ₁	R ₂	mit Rohr	ohne Rohr			
1 {	17,1	2805	84,1	138,6	60,7	1,6	— 4,7
	509		86,7	139,2	62,8		
2 {	10,0	1600	86,6	138,0	62,8	2,5	— 7,8
	290		90,5	138,8	65,8		
3 {	18,0	746,0	91,3	131,3	69,5	3,3	— 13,0
	155,6		96,6	133,0	72,8		
4 {	13,0	750,5	92,3	140,2	65,8	5,5	— 19,0
	154,0		100,4	141,0	71,8		
5 {	11,7	750,0	91,8	138,0	66,5	4,8	— 17,0
	151,5		98,9	138,7	71,3		
6 {	12,4	749,7	94,8	143,4	66,1	5,0	— 17,4
	151,0		100,8	141,7	71,1		
7 {	18,0	399	98,6	131,2	75,1	4,9	— 24,9
	91,0		105,2	131,8	80,0		

Tab. 4.

Reihe	Druck mm		Ab- lenkung	Diff.	Änderung d. Abs. Proc.
	R ₁	R ₂			
1 {	14,4	2332	379,7	14,2	— 7,5
	423,1		393,9		
2 {	32,8	769,8	395,9	22,4	— 13,0
	173,2		418,3		
3 {	40,2	770,8	396,5	20,5	— 12,0
	178,6		417,0		
4 {	16,1	423,1	429,7	39,9	— 27,5
	93,4		469,6		
5 {	13,6	93,4	500,5	24,0	— 35,0
	30,4		524,5		

Hier ist die Absorption sehr bedeutend und die Änderungen mit der Gasdichte tritt deswegen viel deutlicher hervor. Es zeigt sich aber hier, dass die Änderung mit zunehmendem Druck in dem Rohre R_2 , also mit zunehmendem Gasquantum oder zunehmender Gasabsorption, kleiner wird. Dies konnte bei den anderen Wärmequellen nicht konstatiert werden. .

4) Um diese Resultate noch auf einem anderen Wege zu prüfen, wurden folgende Versuche angestellt. Das Rohr R_1 (von 80,3 cm) wurde mit Kohlensäure von Atmosphärendruck gefüllt. Wenn jetzt das Rohr R_3 (18,4 cm) auch mit CO_2 von demselben Druck gefüllt wird, so bewirkt diese neue Gasschicht eine, wenn auch unbedeutende Zunahme der Absorption. Wird das Gas in R_2 bis auf 2, 3 etc. Atm. komprimiert, so wird die Zunahme der Absorption, falls diese von der Gasdichte unabhängig ist, für jede neue Gasschicht kleiner oder höchstens gleich der ersten Zunahme sein, kann bekanntlich aber nie grösser werden. Verhält es sich aber so, dass in der That diese letzterwähnte Zunahme der Absorption grösser wird als die erste, so beweist dies unzweideutig, dass sich das Absorptionsvermögen des Gases mit der Dichte verändert hat, und dass die komprimierte Gasschicht sich im Verhältniss zu der unkomprimierten gewissermassen wie ein Körper von anderer Beschaffenheit verhält.

Folgende kleine Tabelle giebt die Resultate von 9 in dieser Weise angestellten Beobachtungsserien. Die Ablenkung des Galvanometers war c. 198 Skalenteile. Die Zunahme der Absorption ist in Skalenteilen gegeben.

Tab. 6.

Zunahme der Absorption.

Für 1 Atm.	Für 4 Atm.
0,9	5,4
1,1	5,3
1,3	5,2
1,1	5,0
—	5,6
Mittel 1,1	Mittel 5,3

Statt 4,4 (= 4-mal die Zunahme für eine Atm.), die höchste mögliche Zunahme, wenn die Absorption von der Gasdichte unabhängig wäre, erhalten wir 5,3 als die Zunahme für 4 Atm.

Schliesslich habe ich teils die Absorption durch ein Rohr von 4 m Länge, das mit CO₂ von atmosphärischem Drucke gefüllt war, teils diese Absorption durch ein Rohr von 1 m Länge mit CO₂ von 4 Atm. bestimmt. Die Wärmequelle war die Platinspirale von 300°. Die Resultate waren:

Rohr von 1 m Länge (3 Reihen)	Rohr von 4 m Länge (10 Reihen)
Druck 4 Atm.	Druck 1 Atm.
Absorption: 16,2 % ($\pm 0,4$)	13,2 % ($\pm 0,2$)

Wir finden also auch hier eine ganz beträchtliche Änderung der Absorption von 19 Proc.

Sämtliche Beobachtungs-Reihen geben also ohne Ausnahme dasselbe Resultat nämlich, dass die Absorption von der Gasdichte abhängig ist. Dass die beobachteten Änderungen von einer Änderung des Reflexionsvermögens (Steinsalz — CO₂) nicht herrühren, davon habe ich mich durch eine besondere Untersuchung überzeugt.

5) Es fragt sich jetzt, welcher Art diese Veränderung der Absorption ist. Besteht dieselbe nur in einer Vermehrung der Stärke der einzelnen Absorptionsbanden oder verbreitern sich dieselben? Die Beobachtungen beantworten auch diese Frage. Wenn nur die Intensität vermehrt würde, ohne dass sich die einzelnen Banden verbreiterten, so würde daraus folgen, dass mit zunehmender Schichtdicke der Unterschied der Absorption bei Veränderung der Gasdichte allmählich verschwinden würde. Das ist aber nicht der Fall. Sogar bei einer Schichtdicke von 4 Meter (Druck = 1 Atm.) besteht noch der Unterschied des Absorptionsvermögens bei Veränderung der Gasdichte. Dies geht aus sämtlichen Beobachtungen mit Wärmequellen von kontinuierlichem Spektrum hervor. Es kommt also bei Vermehrung der Gasdichte eine Absorption hinzu, die nicht vorher da war. Dies erklärt auch das Verhältniss, das wir bei Anwendung des Bunsen'schen Brenners gefunden haben, dessen Strahlung zum grössten Teil gerade

von der Kohlensäure hervorgebracht wird. Diese Kohlensäure in dem Bursen'schen Brenner hat nämlich einen Partialdruck von c. $\frac{1}{25}$ Atm.¹⁾ und die Emissions- wie auch die Absorptionsbanden sind bei dieser Verdünnung ziemlich schmal. Eine genügend grosse Kohlensäureschicht absorbiert vollständig diese Emissionsbanden; wird die Dichte der absorbierenden Schicht vermehrt, so nimmt wohl die Breite der Absorptionsbande zu, es bleibt ja aber keine Strahlung übrig, die hiedurch absorbiert werden könnte, und die Veränderung kann deswegen nicht bemerkt werden.

Diese Resultate stehen übrigens in schönster Übereinstimmung sowohl mit den Ansichten von KAYSER²⁾ wie auch mit den Beobachtungen von PASCHEN.³⁾ Aus diesen geht klar hervor, dass die grossen Absorptionsbanden der Kohlensäure mit zunehmender Schichtdicke sich nicht merklich verbreitern, nur dunkler werden. PASCHEN hat sogar den Einfluss der Gasdichte richtig vorausgesehen, wenn er betonte: »Was hier über die Schichtdicke gesagt ist, gilt natürlich i. A nicht ohne Weiteres für die Gasdichte.«⁴⁾ Und in einer Note auf derselben Stelle fügt er hinzu: »Die CO₂ der Zimmerluft steht unter einem Partialdruck von c. $\frac{1}{1000}$ Atm. Es mag dies der Grund sein, weshalb die Breite des Absorptionsstreifens für sie ein wenig schmaler war«.

Durch diese Untersuchung haben wir gezeigt:

dass die Absorption der Kohlensäure durch Vermehrung der Gasdichte verändert wird,

dass diese Veränderung bei den Schichtendicken, die hier angewendet sind, und bei einer Änderung des Druckes im Verhältniss 1:5 ziemlich gross ist, und

dass dieselbe durch eine Verbreiterung des Absorptionsstreifens zweifellos bewirkt wird.⁵⁾

¹⁾ PASCHEN Wied. Ann. 52, 236, 1894.

²⁾ KAYSER Wied. Ann. 42, 310, 1894.

³⁾ PASCHEN Wied. Ann. 51, 34, 1894.

⁴⁾ PASCHEN l. c. p. 34.

⁵⁾ Ausgeschlossen ist ja hierbei nicht, dass die Linien gleichzeitig ein wenig dunkler werden. Dies kann aber aus vorliegenden Beobachtungen nicht beurtheilt werden.

Die von WÜLLNER und ZÖLLNER u. a. vertretene Ansicht, dass die Absorption der Gase nur von der Zahl der getrockneten Moleküle abhängig ist, und dass es gleichgültig sei, ob die Dicke der Schicht oder ihre Dichte vermehren, ist auf der jetzt gefundenen Thatsachen unhaltbar. Durch diese Verhältnisse auch die Diskrepanzen, die zwischen den Beobachtungen der Absorption der Kohlensäure seitens verschiedener Forscher kommen, völlig erklärt. Diese Diskrepanzen sind also in den meisten Fällen nicht Versuchsfehlern zuzuschreiben, sondern dem unrichtigen Princip begründet, nach welchem das Beobachtungsmaterial behandelt wurde. Bei kleineren Druckänderungen treten die hiervon herrührenden Fehler nicht besonders hervor, arbeitet man aber mit grösseren Druckänderungen, z. B. 1 Atm., so werden die Fehler ziemlich bedeutend.

Bei den meisten hier angeführten Versuchen war mir Herr Cand. J. KOCH behülflich und spreche ich ihm an dieser Stelle meinen besten Dank aus.

Meddelande från Upsala Univ. Fysiska Institution.

Einige Bemerkungen zur Absorption der Erdstrahlung durch die atmosphärische Kohlensäure.

VON KNUT ÅNGSTRÖM.

(Mitgetheilt am 12. Juni 1901.)

1) In einer vorigen Arbeit habe ich die Bedeutung des Wasserdampfes und der Kohlensäure bei der Absorption der Sonnen- und Erdstrahlung durch die Erdatmosphäre auf Grund einiger neueren Beobachtungen behandelt¹⁾.

Die Absorption der Sonnenstrahlung durch den Wasserdampf wurde ermittelt theils auf Grund eigener Beobachtungen auf verschiedenen Höhen über dem Meere (auf Pico de Teyde, Teneriffa) und spektrobolometrischer Registrierungen der Sonnenstrahlung bei verschiedener Sonnenhöhe, theils auf Grund der neuen Beobachtungen über die Sonnenstrahlung bei verschiedener Feuchtigkeit, die Herr SCHUKIEWITSCH in Pawlowsk ausgeführt hat. Es zeigte sich, dass die Absorption der Sonnenstrahlung, wie es zu erwarten war, in den ersten Wasserdampfschichten der Atmosphäre ziemlich intensiv sein muss und einen Betrag von 15 %—20 % der Gesamtstrahlung erreicht, dass aber auch bei grösserer Schichtdicke die Absorption allmählich, wenn auch langsam wächst. Dies erklärt sich vollständig durch die Beschaffenheit des ultraroten Absorptionsspektrums des Wasserdampfes, die uns durch die Arbeiten von PASCHEN,²⁾ RUBENS und ASCHKINASS³⁾ bekannt ist.

¹⁾ K. ÅNGSTRÖM. Ann. d. Physik 4 Folge. 8, 720, 1900.

²⁾ PASCHEN. Wied. Ann. 51, 1 u. 13, 1894, 58, 334, 1894.

³⁾ RUBENS und ASCHKINASS. Wied. Ann. 64, 584, 1898.

Dieses Spektrum besteht nämlich aus stärkeren und schwächeren Banden, die den grössten Teil des ultraroten Spektrums erfüllen. Die Wirkung einiger von diesen Absorptionsbanden macht sich schon bei kleiner Schichtdicke bemerkbar, während andere erst allmählich mit wachsender Schichtdicke zum Vorschein kommen. Wesentlich anders verhält sich die Kohlensäure. Das Absorptionsspektrum besteht hauptsächlich aus drei, scharf begrenzten Absorptionsbanden von den Wellenlängen $2,7 \mu$, $4,4 \mu$ und $14,8 \mu$, von welchen die zwei ersten von mir, das dritte von RUBENS und ASCHKINASS entdeckt wurde. PASCHEN hat die zwei ersten näher studiert und er hat gezeigt, dass die Banden scharf begrenzt sind, dass in der Nähe der Banden keine Absorption mit den empfindlichsten bolometrischen Hilfsmitteln zu entdecken war und dass die Absorptionsstreifen sich nicht merkbar mit der Schichtdicke verbreitern¹⁾. Auch RUBENS und ASCHKINASS finden jenseit 16μ keine merkbare Absorption.

Auf Grund dieser Untersuchungen habe ich einen Versuch gemacht, die von der Kohlensäure auf die Erdstrahlung ausgeübte Absorption schätzungsweise zu bestimmen. Die Principien dieser Schätzung waren, 1:o dass die Absorption der Kohlensäure in dem Spektralbezirk, wo überhaupt keine Absorption dieses Gases durch spektrobolometrische Untersuchungen gefunden war, für die Absorption der Erdstrahlung keine Bedeutung haben könnte, 2:o dass man also den höchsten möglichen Betrag dieser Absorption erhalten kann durch die Annahme, dass der Teil der Strahlung, der in das Absorptionsgebiet der Kohlensäure fällt, vollständig absorbiert wird. Weil die spektrobolometrischen Untersuchungen mit einer Röhre von 33 cm Länge ausgeführt sind und die atmosphärische Kohlensäure eine Schicht von höchstens 250 cm von 760 mm Druck bilden würde, dürfte wohl die

¹⁾ PASCHEN. Wied. Ann. 51, p. 32—33, 1894. Es geht aus dieser Untersuchung hervor, »dass CO_2 von 33 cm Dicke, welche alles Licht von der Spektralstelle $\delta = 29^\circ 28'$ absorbiert, solches von der Wellenlänge bei $\delta = 31^\circ 2,2'$ oder $0,1'$ sicher nicht um mehr als $\frac{1}{4000}$ seiner Intensität vermindert«. Und er folgert weiter »die Absorptionslinien können nur (mit zunehmender Schichtdicke) dunkler werden, sich aber nicht über das ganze Spektrum verbreiten«.

erste Annahme berechtigt sein. Die zweite erscheint unter diesen Bedingungen als ziemlich selbstverständlich. Die auf diese Weise erhaltenen Resultate standen auch in guter Übereinstimmung mit anderen mir bekannten Verhältnissen, besonders den bei mir von kand. KOCH ausgeführten Bestimmungen über die Absorption der Strahlung einer Wärmequelle von 100° ¹⁾. Deswegen erlaubte ich mir folgenden Schluss zu ziehen:

Unter keinen Umständen dürfte die von der Kohlensäure bewirkte Absorption der Erdstrahlung 16 Procent übersteigen und die Grösse dieser Absorption ändert sich quantitativ mit dem Kohlensäuregehalt sehr wenig, so lange nämlich derselbe nicht weniger als 20 Proc. beträgt.

Dass dieser Satz nur für denkbare Veränderungen des atmosphärischen Kohlensäuregehaltes gültig ist und nicht für den ziemlich gleichgültigen Fall, dass die Kohlensäureschicht unendlich wäre, braucht wohl kaum gesagt zu werden.

2) Herr ARRHENIUS hatte schon früher eine Berechnung des Einflusses der atmosphärischen Kohlensäure auf die Erdstrahlung ausgeführt, indem er auf Grund der bekannten Arbeiten von LANGLEY über die Absorption der Mondstrahlung die Absorptionskoeffizienten der Kohlensäure in verschiedenen Spektralgebieten berechnete.²⁾ A. hatte dabei gefunden, dass die Kohlensäure, wenn die Atmosphäre sehr trocken ist, 63 % der Erdstrahlung absorbiert und sogar 91 % bei grossem Wasserdampfgehalt. Ferner würde die Absorption mit dem Kohlensäuregehalt sehr stark variiren. Ausserdem kommt A. zu dem Schlusse, »dass die Feuchtigkeit der Luft einen höchst unbedeutenden Einfluss auf die Sonnenstrahlung ausübt« und zwar nur bei sehr niederen Wasserdampfdrucken (2 mm), dass er aber schon bei Drucken von etwa 6 mm verschwindet.³⁾

¹⁾ Die Untersuchung des Herrn Koch wird gleichzeitig mit dieser veröffentlicht. Siehe die folgende Abhandlung p. 475.

²⁾ Arrhenius, Bihang till K. S. Vet. Akad. Handl. 22. Afd. 1, 1896. In Auszug Phil. Mag. (5) 41, p. 237, 1896.

³⁾ Arrhenius l. c. p. 28.

Mit anderen Worten, die Eigenschaften, die nach der neueren Forschung der Kohlensäure zukommen würden, schreibt ARRHENIUS dem Wasserdampf zu und umgekehrt. Unter diesen Umständen habe ich in meiner oben erwähnten Arbeit bemerkt, dass die Resultate von A. nicht richtig sein könnten, und dass deswegen die Prämissen, auf welchen seine Theorie der Eiszeit gebaut war, unhaltbar waren.

A. hat auch selbst gefunden, dass eine Revision der früheren Rechnung wünschenswerth war, und er hat diese Revision vorgenommen auf Grund der neuen Beobachtungen über das Absorptionsvermögen der Kohlensäure, die er im Laboratorium des Herrn Prof. RUBENS ausgeführt hat.¹⁾ Die jetzt von A. gefundenen Resultate stimmen bedeutend besser mit den von mir gezogenen Schlüsse überein. Um so mehr muss ich es bedauern, wenn Herr A. findet, dass diese Schlüsse auf theoretischen Betrachtungen beruhen, die durch seine Versuche als unhaltbar erwiesen, auf »unrichtige Principien begründet« sind etc.²⁾ Wie es sich mit diesen Sachen verhält, will ich hier kurz zeigen.

3) Ich muss da zunächst auf meine vorhergehende kleine Arbeit über die Bedeutung der Gasdichte für die Absorption hinweisen.³⁾ Ich habe dort gezeigt, dass die von einer bestimmten Kohlensäuremenge ausgeübte Absorption durch Vermehrung der Gasdichte verändert wird und dass diese Veränderung ziemlich gross ist.

Wenn man also für die Untersuchung der Absorption eines Gases eine Röhre von z. B. 50 cm Länge benutzt und in dieser Röhre Gas von ein, zwei, drei u. s. o. Atmosphären komprimiert, so erhält man dadurch nicht die Absorption einer Gaschicht von 100, 150 cm Länge und 1 Atm. Druck, sondern bedeutend grössere Werthe. In dieser Weise aber hat A. seine Versuche angestellt. Er benutzt ein Rohr von 50 cm Länge und

¹⁾ ARRHENIUS, Ann. d. Physik, 4, p. 690, 1901 und Öfversigt af K. S. Vet. Akad. Förhandl. p. 25, 1901.

²⁾ ARRHENIUS, Ann. d. Physik l. c. p. 700—703.

³⁾ K. ÅNGSTRÖM. Öfversigt af K. S. Vet. Akad. Förhandl. p. 371, 1901.

untersucht die Absorption der Kohlensäure, die er bis auf 7 Atm. kromprimiert. Auf diese Weise glaubt er die Absorption als Funktion der Schichtdicke bestimmt zu haben, erhält aber offenbar dieselbe als Funktion der Schichtdicke und der Gasdichte.

Für die Strahlung einer Wärmequelle von 100° findet A., dass eine Kohlensäureschicht von 50 cm Länge und 8 Atm. Druck 20 Proc. absorbiert. Unter der Annahme, dass wir die Gültigkeit der gefundenen Änderung der Absorption, bis auf 8 Atm. ausdehnen können und dass wir diese Änderung auf $-3,5$ Proc. per Atm. hier schätzen können,¹⁾ würde dem zufolge eine Kohlensäureschicht von 400 cm Länge und 1 Atm. annähernd $20 - 20 \cdot 8 \cdot 0,035 = 14,4$ Proc. absorbieren, was mit den direkten Bestimmungen, welche 14,2 Proc., ergaben,²⁾ in vollständigster Übereinstimmung steht. A. findet weiter, dass von der Strahlung einer Wärmequelle von -80° , 50 cm Kohlensäure von 7 Atm. Druck 21 Proc. (korr. Werth) absorbiert, was den Verhältnissen in der Atmosphäre, nach A., nahezu gleichkommen würde. Eine Schicht von 355 cm Länge und 1 Atm. Druck würde dann nach dem oben Gesagten 15,7 Proc. absorbieren. Die Kohlensäure der Atmosphäre hat aber einen Partialdruck von weniger als $\frac{1}{1000}$ Atm., und die bei 1 Atm. Druck gefundene Absorption muss deswegen noch bedeutend reduciert werden, um den Verhältnissen der Atmosphäre zu entsprechen. Wenn wir bei unserer unvollständigen Kenntniss der Sache auch nicht sagen können, wie gross diese Reduktion ist, so scheint mir doch aus meiner Untersuchung unzweideutig hervorzugehen, dass die Absorption der Erdstrahlung in Übereinstimmung mit meiner früheren Behauptung nicht 16 Proc. übersteigen kann, und dass dieselbe wahrscheinlich bedeutend kleiner ist. Schon bei einer Verminderung des Druckes von 1 bis auf $\frac{1}{6}$ Atm. würde ja diese Absorption nur c. 13 Proc. betragen. Wie sich die Sache bei noch mehr abnehmender Gasdichte verhält, ist noch unentschieden.

¹⁾ 3,5 proc. ist Mittelwerth der für eine Röhre von 20 cm und 100 cm gefundene Änderung der Absorption bei Änderung des Druckes in Verhältniss 2:1.

²⁾ Siehe die folgende Abhandlung von Koch. Die beiden hier angeführten Bestimmungen sind nicht korrigiert für die Einwirkung der Steinsalzplatten.

4) Nach dem oben Angeführten ist leicht zu verstehen wie A. mit seiner Untersuchungsmethode eine zu starke Zunahme der Absorption bei zunehmender Schichtdicke finden musste; bei dieser Zunahme der Absorption spielte eben die Gasdichte eine bedeutende Rolle. Er findet also z. B., dass bei Zunahme der Schichtdicke von 50 bis auf 400 cm die Absorption von 10,5 Proc. auf 20 Proc. oder mit 9,5 Proc. der Strahlung, bei Zunahme der Schichtdicke von 200 bis auf 400 cm die Abs. von 16 Proc. auf 20 Proc. oder mit 4 Proc. der Gesamtstrahlung steigt. Werden diese Werthe für die Änderung der Dichte reducirt, so erhält man (auf 1 Atm. Druck bezogen) im ersten Falle die Absorptionen 10,5 Proc. und 14,3 Proc., was einer Änderung der Absorption von 2,5 Proc. der Strahlung (statt 9,5 Proc.) gleichkommt, im zweiten Falle die Absorptionen 12,5 Proc. und 14,3 Proc. und die bezügliche Änderung 1,5 Proc. (statt 4 Proc.). Viel oder wenig ist ja in manchen Fällen eine Geschmacksache; mir scheint aber, dass man hier wohl mit Recht sagen kann, »dass sich die Absorption mit dem Kohlensäuregehalt der Atmosphäre sehr wenig ändert, so lange nämlich die Kohlensäure nicht weniger als 20 Proc. des vorhandenen beträgt«. Diese Änderung beträgt nämlich für Schichtdicken von 355 bis 70 cm nur 2,5 Proc.¹⁾ der Strahlung unter der Voraussetzung, dass die Absorptionskurven einen annähernd ähnlichen Verlauf bei 1 Atm. und $\frac{1}{1000}$ Atm. Druck haben.

5) Es ist offenbar, dass die Absorption, welche die Kohlensäure auf die Erdstrahlung ausüben kann, in hohem Grade durch das Vorhandensein eines anderen absorbierenden Gases in der Erdatmosphäre beeinflusst wird und dass die Sache dadurch complicirter wird. Wenn nämlich die Absorptionsbanden der beiden Gase grösstenteils zusammenfallen, so nimmt dadurch der Einfluss der Kohlensäure ab; fallen dagegen die Banden nicht zusammen, so steigt dieser Einfluss. Nun ist durch die oben erwähnten

¹⁾ Dazu wurde noch die Änderung der Absorption mit der Verminderung der Gasdichte kommen, eine Änderung die doch bei dieser Verdünnung wahrscheinlich sehr klein sein möchte.

spektrobolometrischen Untersuchungen von PASCHEN,¹⁾ RUBENS und ASCHKINASS²⁾ gezeigt worden, dass gerade die Kohlensäurebande mit den Maxima bei $\lambda = 2,64 \mu$ und $14,5 \mu$ von den Absorptionsgebieten des Wasserdampfes gedeckt werden. A. glaubt jedoch, dass diese Coincidenz bei einer näheren Untersuchung »sich mehr als scheinbar wie als wirklich herausstellen« wird, und dass »im Allgemeinen im ganzen Spektrum es nicht wahrscheinlicher ist, dass der Wasserdampf einen grösseren Theil von der für Kohlensäure eigenthümlichen Strahlung absorbiert als von der Totalstrahlung, sondern eher umgekehrt«.

Als Stütze für seine Ansicht führt A. die Zeichnung, die LANGLEY von der X-Bande gegeben hat an,³⁾ welche zeigen soll, dass die Banden, welche Verf., JULIUS und PASCHEN, als kontinuierlich gefunden haben, bei grösserer Dispersion in Partialstreifen aufgelöst werden würden. Ich glaube nicht, dass dem so ist. Denn angenommen, dass LANGLEY innerhalb der relativ schwachen X-Bande wirklich Maxima und Minima erhalten hatte, so würde dies wohl durch das Vorhandensein fraunhofer-scher Linien solaren Ursprungs erklärt werden können. Es muss aber bemerkt werden, dass die von A. angeführte Zeichnung auf automatischen Wege hergestellt wurde, »by means of a systematically distorted image of the curve« (die vom Bolometer gezeichnet war), und dass in dieser Zeichnung die zufälligen Perturbationen des Galvanometers noch Einfluss haben.⁴⁾ Betrachten wir nämlich die neueste Zeichnung, die LANGLEY von demselben Teil des Spektrums gegeben hat,⁵⁾ so findet man von den Partialstreifen keine Spur. Dass die Absorptionsbanden der Kohlensäure bei *niedrigen Drucken* sich in Partialstreifen auf-

¹⁾ PASCHEN l. c. p. 38.

²⁾ RUBENS u. Aschkinass l. c. p. 598.

³⁾ LANGLEY. Report of the British Assoc. p. 465, 1894.

⁴⁾ LANGLEY sagt selbst l. c. p. 473, not. »This figure, exhibited here only in illustration, is not to be treated as a criterion of the final results to be attained by the composite process.« Bei dem von Langley angewendeten hochempfindlichen Galvanometer befindet sich die Nadel in kontinuierlichen kleinen Schwankungen, wie aus der Zeichnung in C. R. zu sehen ist.

⁵⁾ C. R. 181, p. 734, Nov. 1900.

lösen, ist also möglich, die Messungen von LANGLEY beweisen es aber nicht. Seine Zeichnung beweist vielmehr, dass die Absorption schon in diesem, dem schwächsten von den drei in Frage stehenden Banden vollständig ist. Dies wird auch durch die Messungen von PASCHEN bestätigt. Er findet nämlich für das Y-Band, dass eine Schicht CO_2 von 7 cm Dicke und 760 mm Druck eine Absorption von 90 Proc. ausübt, und dass die übrig bleibenden 10 Proc. wahrscheinlich »falsches Licht« seien. Es bleibt offenbar in einen solchen Spektralbezirk nicht viel Raum übrig zwischen den bei niedrigen Drucken immer theoretisch möglichen Partialstreifen. Was hier von der Y-Bande gesagt ist, gilt übrigens auch von der Bande bei $\lambda = 14 \mu$. Die mittlere Absorption des Wasserdampfes von 75 cm Dicke und 760 mm Druck beträgt zwischen $\lambda = 14,2 \mu$ und $\lambda = 15,5 \mu$ ca. 40 Proc.,¹⁾ diejenige der Kohlensäure von 20 cm Dicke und 760 mm Druck in demselben Gebiete 65 Proc. Dass unter solchen Umständen die Coincidenz der Absorption nur scheinbar sein sollte, ist wohl nicht gut möglich. Gerade in diesem Gebiete liegt ja doch das Hauptabsorptionsvermögen der Kohlensäure für die Erdstrahlung. Deswegen ist es meine bestimmte Überzeugung, dass die Anwesenheit des Wasserdampfes in der Erdatmosphäre den Einfluss der Kohlensäure vermindert. Eine nähere Untersuchung dieser Frage wäre jedoch wünschenswerth und scheint nicht ganz unmöglich zu sein.

Die Ansicht von ARRHENIUS, dass die Absorptionstreifen der beiden Gase mit einander grösstenteils nicht koincidieren, scheint übrigens nicht in gutem Einklange zu stehen mit seiner gleichzeitigen Annahme: »bei stetig zunehmender Schichtendicke nimmt die Absorption stetig zu und nähert sich allmählich dem Wert 100 Proc., eine Annahme, die indessen durch die Untersuchungen von PASCHEN nicht bestätigt wird.«²⁾ Auch hier hat A. offenbar den Einfluss der Dichte auf das Absorptionsverhältniss nicht berücksichtigt, denn er stützt seine Meinung darauf, dass

¹⁾ RUBENS u. ASCHKINASS l. c.

²⁾ Siehe Note p. 382.

Wasser in genügend dicken Schichten vollständig undurchsichtig ist, dass »Wasserstoff in ziemlich dünnen Schichten ein kontinuierliches Spektrum giebt« etc. Dass nämlich Wasserstoff von *niedriger Dichte* ein kontinuierliches Spektrum geben sollte, ist mir unbekannt. Dass Wasserstoff in der Chromosphäre noch ein scharfes Linienspektrum giebt bei einer Schichtdicke, die bis auf 7,000—11,000 kilometer geschätzt wird, ist mir dagegen bekannt.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 370.)

Baltimore. *Johns Hopkins University.*

University circulars. Vol. 19: N:o 144—147; 20: 148—149. 1900—1901. 4:o.

Memoirs from the biological laboratory. 4: 1. 1900. 4:o.

Studies in historical and political science. Ser. 18 (1900): N:o 5—12. 8:o.

American chemical journal. Vol. 23 (1900): N:o 4—6; 24 (1900): 1—6; 25 (1901): 1—2. 8:o.

American journal of mathematics. Vol. 22 (1900): Num. 2—4; 23 (1901): 1. 4:o.

The American journal of philology. Vol. 21 (1900): 1—3. 8:o.

Bergen. *Museum.*

Meeresfauna von Bergen, red. von A. APPELLÖF. H. 1. 1901. 8:o.

Berlin. *Akademie der Wissenschaften.*

Abhandlungen 1899—1900. 4:o.

Sitzungsberichte. 1901: 1—22. 8:o.

— *Deutsche geologische Gesellschaft.*

Zeitschrift. Bd 52 (1900): H. 4. 8:o.

— *Deutsche physikalische Gesellschaft.*

Verhandlungen. Jahrg. 3 (1901): N:r 4—7. 8:o.

— *Physikalisch-technische Reichsanstalt.*

Die Thätigkeit der ... Reichsanstalt. 1900 8:o.

Verzeichnis der Veröffentlichungen. 1887—1900. 1901. 4:o.

Bremen. *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Beiträge zur nordwestdeutschen Volks- und Landeskunde. H. 3. 1901. 8:o.

Bruxelles. *Académie R. de Belgique.*

Bulletin. Cl. des lettres ... 1901: N:o 4. 8:o.

» Cl. des sciences. 1901: N:o 4. 8:o.

— *Musée du Congo.*

BOULENGER, G. A., Les poissons du Bassin du Congo. 1901. 8:o.

Mission scientifique du Ka-Tanga. Mém. 1—2. 1901. 4:o.

Buenos Aires. *Museo Nacional.*

Comunicaciones. T. 1 (1901): N:o 8. 8:o.

— *Sociedad Científica Argentina.*

Anales. T. 51 (1901): Entr. 3—4. 8:o.

Buitenzorg. *'slands Plantentuin.*

Mededeelingen. N:o 44. 1901. 8:o.

Bulletin. N:o 7. 1900. 8:o.

Cambridge, Mass. *Museum of comp. zoölogy.*

Bulletin. Vol. 38: 5. 1901. 8:o.

— *Astronomical observatory of Harvard College.*

Annals. Vol. 41: N:o 6; 45. 1900—1901. 4:o.

(Forts. å sid. 414.)

Ueber den Lichtwechsel von *U* Cephei.

Von KARL BOHLIN.

(Mitgetheilt am 12 Juni 1901.)

Im Jahre 1896 hatte ich die Gelegenheit mit dem kleinen REINFELDER'schen Refractor der Sternwarte zu Upsala eine Beobachtungsreihe von Veränderlichen nach der ARGELANDER'schen Stufenschätzungsmethode anzustellen. Von den Resultaten dieser Beobachtungen sind vorläufig nur die Lichtschätzungen von *Y* Cygni zur Veröffentlichung gelangt und zwar bei der Bearbeitung der auf diesen Stern sich beziehenden Beobachtungen, die Herr Professor N. C. DUNÉR neulich ausgeführt hat.

Von den übrigen Beobachtungen, die allerdings jetzt fertig reducirt vorliegen, erlaube ich mir heute die Lichtschätzungen des Algolsterns *U* Cephei mitzutheilen. Diese Resultate werden deshalb jetzt besonders erörtert, weil die Lichtschwankungen dieses Sterns, wie aus den früheren Untersuchungen von J. WILSING¹⁾ und S. C. CHANDLER²⁾ zu ersehen ist und übrigens bei meinen eigenen Beobachtungen sich bald herausstellte, ein ganz besonderes Interesse darbieten.

1. In Bezug auf die Beobachtungsmethode ist es von besonderer Wichtigkeit hervorzuheben, dass bei den Lichtschätzungen

¹⁾ J. WILSING. Untersuchungen über den Lichtwechsel von *U* Cephei. Astron. Nachr. N:o 2596.

²⁾ S. C. CHANDLER. On the light-variations of *U* Cephei. Astron. Journ. N:o 199.

immer streng darauf geachtet wurde, dass das Bild des visirten Sterns jedesmal auf die Mitte der Retina empfangen wurde, indem die Sterne immer in der Mitte des Gesichtsfeldes eingestellt wurden. Ohne diese Massregel können in der That, wie zuerst von WILSING angemerkt worden ist, sehr bedeutende physiologische Fehler sich in den Lichtschätzungen hieinmischen, weil das Auge an verschiedenen Stellen der Netzhaut eine ungleiche Empfindlichkeit hat.

Es war meine erste Absicht nur einige beobachteten Epochen des kleinsten Lichtes an die schon ziemlich zahlreichen Beobachtungen von *U* Cephei anzureihen. Indessen ergab sich schon bei den ersten Beobachtungen eine eigenthümliche Form der Lichtcurve, und da ich ferner den Eindruck einer ziemlich grossen Genauigkeit der Schätzungen erhielt, schien es mir angemessen die bezüglichen Resultate numerisch und graphisch zu verwerthen. Ich verfolge diese Absicht um so lieber, als mir die werthvollen Untersuchungen von WILSING und CHANDLER über diesen Gegenstand späterhin bekannt geworden sind.

Die Helligkeiten der benutzten Vergleichsterne habe ich zum Theil der Abhandlung des Herrn DR. WILSING, zum Theil den Angaben der Harvard Photometric Revision und der Harvard Photometrie entlehnt. Die angenommenen Werthe sind die folgenden.

Vergl.- Stern.	D. M.	Grösse.	Stufen- werth.
<i>b</i>	80.22	9.42	0
<i>c</i>	80.23	9.03	8.3
<i>a</i>	80.21	8.78	13.4
<i>d</i>	81.29	8.51	19.2
<i>e</i>	81.30	8.02	27.1
<i>f</i>	81.18	7.63	36.0
<i>g</i>	81.13	6.38	47.7

Von diesen Grössenangaben sind indessen zwei, nämlich für die Sterne *c* und *a*, aus meinen eigenen in der letzten Col-angeführten Stufenschätzungen zwischen *b* und *d* interpolirt. Zum Vergleich möge noch die folgende Synopsis der Helligkeiten dieser Sterne angeführt werden.

Vergl.-Stern.	D. M.	Wilsing.	Chandler.	Harv. Rev.	H. P.
<i>b</i>	9.2	—	9.45	9.42	—
<i>c</i>	9.2	—	—	—	—
<i>a</i>	8.9	—	8.97	8.82	—
<i>d</i>	8.6	8.72	8.67	8.58	—
<i>e</i>	8.8	8.10	8.00	7.95	—
<i>f</i>	7.6	7.78	7.95	7.54	—
<i>g</i>	6.5	—	6.64	6.44	6.38

Die Stufenschätzungen der Vergleichsterne an den verschiedenen Beobachtungstagen stellen sich folgendermassen:

	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
1896 Febr. 6	0	5.8	11.8	—	—	—	—
Febr. 21	0	9.7	—	19.5	29.3	38.7	47.7
Apr. 1	0	8.9	15.8	21.8	—	—	—
Sept. 15	0	9.6	15.9	21.9	29.6	38.7	—
Sept. 20	0	8.1	11.8	17.8	26.5	35.3	—
Sept. 30	0	7.8	11.8	15.2	23.1	31.4	—
Mittel	0.0	8.8	13.4	19.2	27.1	36.0	47.7

2. Da sich von vornherein gezeigt hatte, dass die Licht-curve nach vollendeter Abnahme eine Zeit lang beinahe horisontal verläuft, bevor wieder der Zuwachs eintritt, und da desshalb die Epoche des Minimums bei diesem Stern nicht ohne weiteres definiert ist, so wählte ich als Anhaltspunkt der Curve statt der Minimumepoche diejenige Epoche, für welche der veränderliche Stern die Grösse des Vergleichsterns *a* erreicht. Ebenso kann man sich natürlich auch auf mehrere der Vergleichsterne beziehen. Der Stern *a* ist aber desshalb besonders anwendbar, weil derselbe bei den meisten Beobachtungen vertreten ist. Beiläufig möchte ich hierzu bemerken, dass diese Vorgangsweise sich auch im Allgemeinen für veränderliche Sterne empfiehlt, weil die Helligkeit im Minimum sich naturgemäss langsam ändert und eine sehr viel unsicherere Zeitbestimmung ergibt, als wenn man die Zeitepoche fixirt, bei welcher der Stern seine grösste Veränderlichkeit darbietet.

Die Reduction der Schätzungen geschah deshalb in der folgenden Weise. Erstens wurde die Epoche

$$U \text{ Cephei} = a.$$

aus den verschiedenen Beobachtungen für jeden Abend interpolirt und als Nullpunkt festgestellt. Mit den so reducirten Beobachtungen wurde eine mittlere Lichtcurve vorläufig dargestellt. Mit Hülfe von dieser Curve wurden wieder die einzelnen Beobachtungen auf Normalepochen in Intervallen von je zehn Minuten reducirt und zwar so, dass jede Beobachtung auf die nächstliegende Epoche reducirt wurde. Ich führe hier die so reducirten, in Stufenwerthen ausgedrückten Beobachtungen an.

U Cephei. 1896.

	Febr. 21.	April 1.	Sept. 15.	Sept. 20.	Sept. 30.
— 1 ^h 10 ^m	30.5		31.1 31.0		30.0
0			29.5	30.0	29.8
— 0 50	29.4		27.2	27.6	
40				24.1 23.9	25.5
30	22.8		22.8	21.0 22.6	19.8 19.6
20	22.8			19.0 18.6	17.2 20.2
10		15.4	18.2	16.6	18.0 15.7
+ 0 0	15.7	14.3 13.4 12.2	13.4		13.4
10		10.1 10.5	10.3	12.3 9.4	11.1
20	10.8	9.2 8.5	7.1 5.9	8.2	8.3
30	7.7	5.5 8.9 9.5		5.7 4.7	4.7
40	3.5	7.5 5.6	5.5 4.6	4.7	5.3
50		8.6 6.8	5.5	8.0	4.7
+ 1 0	6.7	6.0 4.4		7.6	5.4
10		6.1 5.5	8.3	6.6	6.4
20	7.4	8.2 6.0	6.1	6.2	7.1
30		6.5 9.4		5.8	
40	8.2	8.3 8.8	5.8		5.5
50		8.3 9.1	6.2	8.3 7.4	6.8
+ 2 0	5.5	8.3	6.0		4.7
10		9.0 7.3	5.7	6.2	7.4
20	7.4	8.4 8.1			5.4
30		10.1 8.1	6.2	7.5	7.5 9.1
40		10.9 10.2			11.7
50	12.2	11.3 10.6		14.9 15.7	17.0 16.1
+ 3 0		16.3 16.2	11.8 15.4	18.6	
10		20.1 19.6	18.0	26.2	20.6 22.5
20	20.8		23.3 23.7	24.9 23.3	
30			24.3 25.3	26.0	26.0 27.9
40	24.8		27.7	29.6	
50	26.0		28.5	32.8	
+ 4 0			31.7		
10	31.8		31.6 31.7		
20	33.0		31.1		

Die Nullpunkte für die verschiedenen Beobachtungstage waren die folgenden:

U Cephei = *a*.

Interpolirte Uhrzeit. Uhr-Correction.

1896 Febr. 21	11 ^h 10.7	— 3.7 ^m	Mittlere Zeit, Upsala
Apr. 1	8 58.9	+ 1.4	Stern-Zeit, ,
Sept. 15	20 26.9	+ 2.3	, ,
, 20	20 31.3	+ 2.4	, ,
, 30	20 34.0	+ 0.4	, ,

Aus diesen Beobachtungen wurden gesondert für Frühjahr und Herbst und durch Anschluss der Stufenschätzungen an die Helligkeiten der nächstkommenden Sterne die folgenden Resultate abgeleitet:

	Größenklassen.		
	Frühjahr.	Herbst.	Media.
— 4 ^h 1 ^m	7.13	—	—
— 3 28	7.38	—	—
— 2 49	7.36	—	—
— 1 53	7.69	—	—
— 1 10	7.88	7.86	7.87
0	—	7.90	7.90
— 0 50	7.92	8.01	7.98
40	—	8.18	8.18
30	8.29	8.39	8.37
20	8.29	8.53	8.49
10	8.69	8.61	8.62
+ 0 0	8.76	8.78	8.77
10	8.98	8.91	8.92
20	8.97	9.07	9.03
30	9.05	9.18	9.11
40	9.16	9.19	9.18
50	9.06	9.13	9.11
+ 1 0	9.12	9.11	9.14
10	9.15	9.09	9.11
20	9.08	9.11	9.10
30	9.04	9.15	9.08
40	9.08	9.15	9.08
50	9.00	9.08	9.06
+ 2 0	9.10	9.17	9.13
10	9.04	9.12	9.09
20	9.04	9.17	9.08
30	8.99	9.06	9.04
40	8.92	8.86	8.90
50	8.88	8.66	8.75
+ 3 0	8.65	8.69	8.66
10	8.46	8.35	8.39
20	8.41	8.22	8.26
30	—	8.09	8.09
40	8.17	7.95	8.01
50	8.09	7.86	7.93
+ 4 0	—	7.82	7.82
10	7.81	7.82	7.82
20	7.76	7.84	7.80
54	7.26		
+ 5 29	6.97		

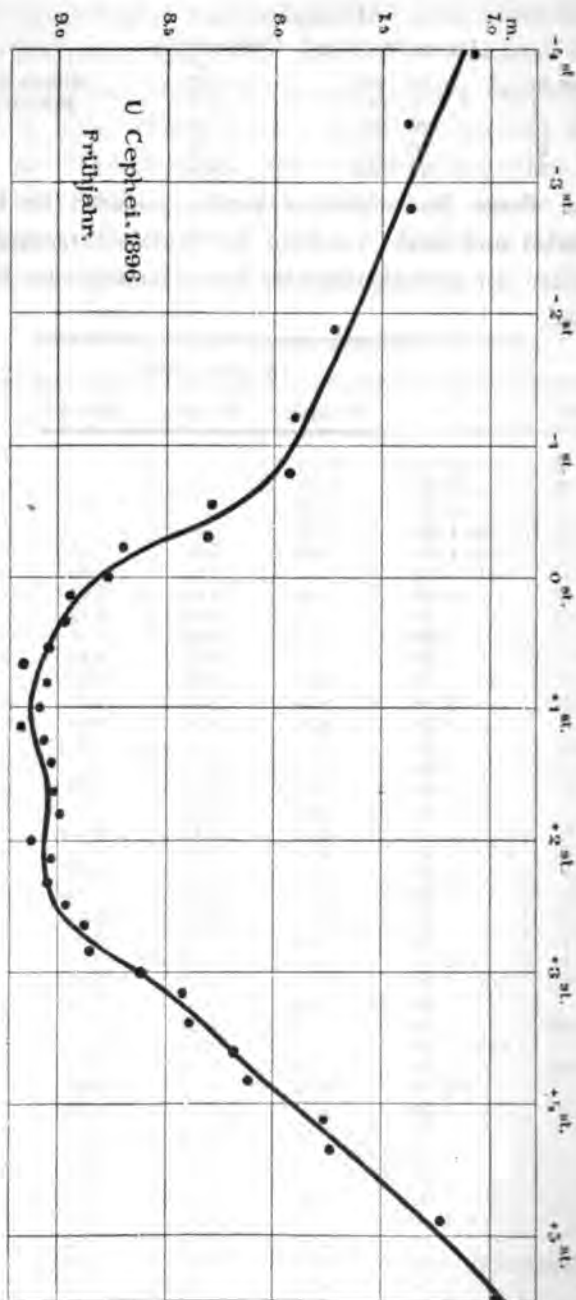


Fig. 1.

Aus diesen Zahlen und vielmehr aus deren graphischen Darstellung geht hervor, dass ein wesentlicher Unterschied der Form der Lichtcurve für gerade und ungerade Minima, wie dies von Herrn KNOTT vermuthet wurde, nicht angezeigt wird. Die Herbst- und Frühjahrscurven sind vielmehr ganz ähnlich. Im Anfange der Lichtveränderung scheint die Abnahme, wie fast alle Beobachter wahrgenommen haben, langsamer zu sein als später die Zunahme bei der letzten Phase der Variation, wie aus der Fig. 1 hervorgeht. Ich vermag nicht zu entscheiden, ob dies etwa reel ist, oder ganz auf physiologische Ursachen hinzuschreiben sei. Ganz unwahrscheinlich scheint das letztere nicht zu sein, wenn man bedenkt, dass das Auffassungsvermögen des Auges während einer 10- stündigen Beobachtung sicherlich nicht ganz unveränderlich bleiben kann. Ausserdem ist die erwähnte Form der Curve nur an einem Beobachtungstage, Febr. 21, soweit verfolgt worden. Für den Theil der Curve, der dem Minimum näher liegt, und der aus sämtlichen Beobachtungsabenden abgeleitet worden ist, scheint auch in der That eine vollkommene Symmetrie sich auszuprägen. Ebenso wird die Annahme des Herrn KNOTT, dass der Stern eine merklichen Helligkeitsunterschied im kleinsten Lichte für die geraden und ungeraden Epochen zeige, durch die vorliegende Beobachtungen nicht bestätigt. Ich glaube vielmehr annehmen zu müssen, dass die Helligkeit der geraden und ungeraden Minima thatsächlich dieselbe ist, um so mehr, als die von Herrn KNOTT angenommene Anomalie in keinerlei Weise theoretisch begründet erscheint. Man vergleiche in Bezug auf die hier hervorgehobenen Ansichten die Aussagen CHANDLERS (l. c.).

3. Die Lichtcurven in der Nähe des Minimums hat im Mittel aus sämtlichen Beobachtungen die in der Fig. 2 aufgegebene Form. Nach einer schnellen, fast geradlinigen Abnahme tritt ein Minimum ein, wonach sich die Lichtstärke ein wenig vermehrt, hiernach eine Zeit lang (etwa 80^m) constant bleibt, dann wieder etwas sinkt, um darauf unmittelbar rasch und beinahe geradlinig wieder anzuwachsen. Ich bin geneigt, diese Einsenkungen der Curve im

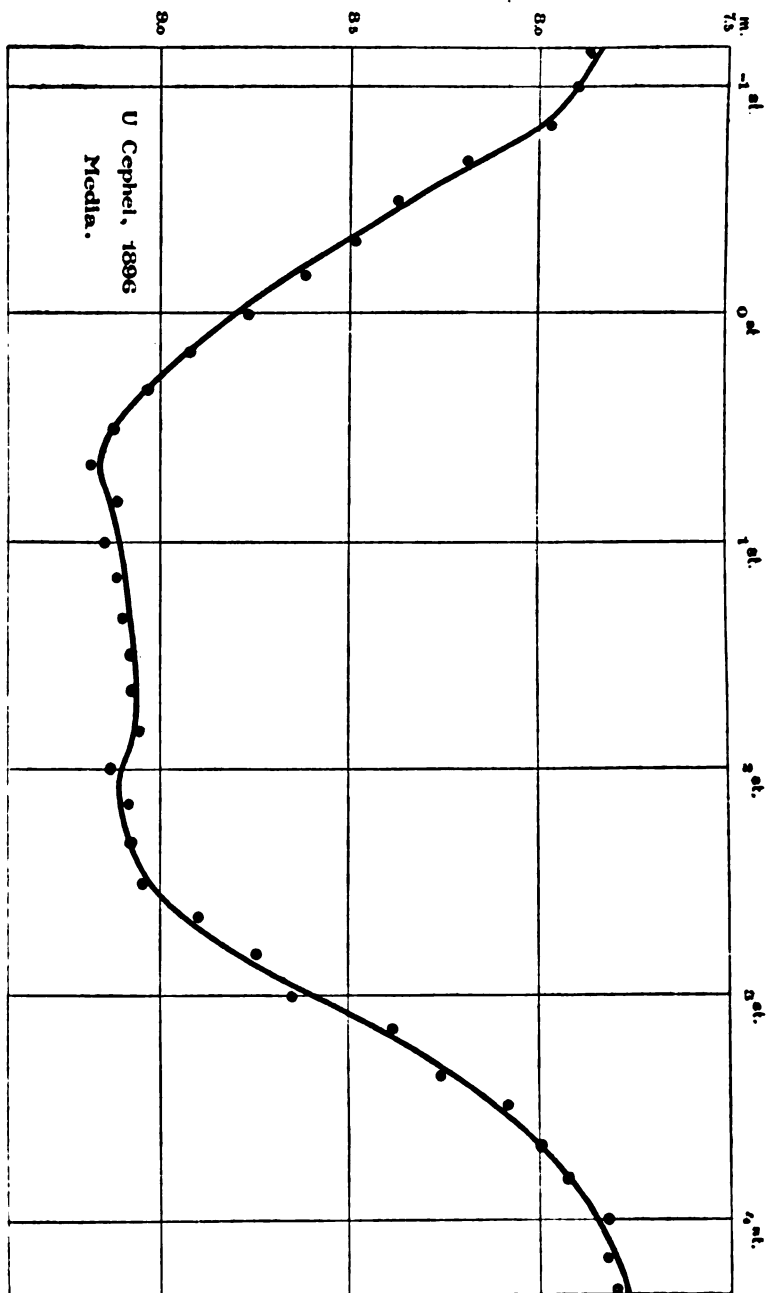


Fig. 2.

am Ende des Stadiums des kleinsten Lichtes als
 sen, obgleich eine genügende Erklärung dieses Phä-
 nomenso wenig wie des BAILLYschen Tropfens bei den
 ergängen gegeben werden kann.

Ich die erste Einsenkung als das Hauptminimum des
 se, die entsprechende Epoche mit μ_1 und die Epoche
 Senkung mit μ_2 bezeichne, erhalte ich aus der Curve
 Zeitreductionen von den Epochen der Helligkeiten
 hsterne, die mit $a_1, b_1 \dots; a_2, b_2 \dots$ bezeichnet
 n, auf die Epochen der beiden Minima:

Vor dem Minimum.

Größe.	Zeit.	
8.02 $e_1 = -0.^h 48^m$		$\mu_1 - e_1 = + 1.^h 28^m$
8.51 $d_1 = -0. 19$		$\mu_1 - d_1 = + 0. 59$
8.78 $a_1 = -0. 1$		$\mu_1 - a_1 = + 0. 41$
9.08 $c_1 = + 0. 20$		$\mu_1 - c_1 = + 0. 20$

Nach dem Minimum.

Zeit.

$e_2 = + 3.^h 38^m$	$\mu_2 - e_2 = - 1.^h 38^m$
$d_2 = + 3. 4$	$\mu_2 - d_2 = - 1. 4$
$a_2 = + 2. 50$	$\mu_2 - a_2 = - 0. 50$
$c_2 = + 2. 29$	$\mu_2 - c_2 = - 0. 29$
$\mu_1 = + 0.^h 40^m; \mu_2 = + 2.^h 0^m$	
$\mu_1 - \mu_2 = - 1.^h 20^m$	

Epochen der Minima zu finden, habe ich aus den
 beobachtungsreihen die Epochen $e_1, d_1, a_1, c_1; c_2, a_2,$
 und mit Hülfe der oben angegebenen Reductions-
 die Epochen μ_1 und μ_2 reducirt. Doch zeigte sich
 die Epochen c_1 und c_2 dem Minimum zu nahe liegen
 Werthe zu geben, wesshalb dieselben im Folgenden
 sichtigt werden. Ich lasse jetzt die Reductionen der
 en folgen.

Febr. 21.

$e_1 = 10^h 12^m$	$\mu_1 - e_1 = + 1.^h 28^m$	$\mu_1 = 11.^h 40^m$
$d_1 = 10 \quad 49$	$\mu_1 - d_1 = + 0. \quad 59$	11. 48
$a_1 = 11 \quad 1$	$\mu_1 - a_1 = + 0. \quad 41$	11. 42
$a_2 = 13 \quad 41$	$\mu_1 - a_2 = - 2. \quad 10$	11. 31
$d_2 = 14 \quad 18$	$\mu_1 - d_2 = - 2. \quad 24$	11. 54
$e_2 = 14 \quad 53$	$\mu_1 - e_2 = - 2. \quad 58$	11. 55

Mittel $\mu_1 = 11. \quad 45.0$ Uhrcorr. $\gamma = - \quad 3.7$

11. 41.3 Upsala M. Z.

Red. auf Greenw. $- 1. \quad 10.5$, , $\odot \quad + 0.5$ Minimum $10^h 31.^m 3 \pm 2.^m 5$ Greenw.

April 1.

$d_1 = 8.^h 42^m$	$\mu_1 - d_1 = + 0.^h 59^m$	$\mu_1 = 9.^h 41^m$
$a_1 = 8. \quad 59$	$\mu_1 - a_1 = + 0. \quad 41$	9. 40
$a_2 = 11. \quad 54$	$\mu_1 - a_2 = - 2. \quad 10$	9. 40
$d_2 = 12. \quad 6$	$\mu_1 - d_2 = - 2. \quad 24$	9. 42

Mittel $\mu_1 = 9. \quad 41.7$ $\gamma \quad + 1.4$

9. 43.1 Upsala St. Z.

9. 0.4 , M. Z.

Red. auf Greenw. $- 1. \quad 10.5$, , $\odot \quad - 1.9$ Minimum $7^h 48.^m 0 \pm 0.^m 6$ Greenw.

Sept. 15.

$e_1 = 19.^h 37^m$	$\mu_1 - e_1 = + 1.^h 28^m$	$\mu_1 = 21.^h \quad 5^m$
$d_1 = 20. \quad 8$	$\mu_1 - d_1 = + 0. \quad 59$	21. 7
$a_1 = 20. \quad 27$	$\mu_1 - a_1 = + 0. \quad 41$	21. 8
$a_2 = 23. \quad 18$	$\mu_1 - a_2 = - 2. \quad 10$	21. 8
$d_2 = 23. \quad 38$	$\mu_1 - d_2 = - 2. \quad 24$	21. 14
$e_2 = 0. \quad 4$	$\mu_1 - e_2 = - 2. \quad 58$	21. 6

Mittel $\mu_1 = 21. \quad 8.0$ $\gamma \quad + 2.3$

21. 10.3 Upsala St. Z.

9. 29.2 , M. Z.

Red. auf Greenw. $- 1. \quad 10.5$, , $\odot \quad + 0.8$ Minimum $8.^h 19.^m 5 \pm 0.^m 9$ Greenw.

Sept. 20.

$\mu_1 - e_1 = + 1^h 28^m$	$\mu_1 = 21^h 9^m$	
$\mu_1 - d_1 = + 0 59$	21 8	
$\mu_1 - a_1 = + 0 41$	21 12	
$\mu_1 - a_2 = - 2 10$	21 2	
$\mu_1 - d_2 = - 2 24$	21 8	
$\mu_1 - e_2 = - 2 58$	21 0	
<hr/>		
Mittel	$\mu_1 = 21 6.5$	
	$\gamma = + 2.4$	
	21 8.9	Upsala St. Z.
	9 8.1	, M. Z.
Red. auf Greenw.	- 1 10.5	
, , \odot	+ 1.1	
<hr/>		
$7^h 58.^m 7 \pm 2.^m 8$ Greenw. M. Z.		

Sept. 30.

$\mu_1 - e_1 = + 1^h 28^m$	$\mu_1 = 21^h 9^m$	
$\mu_1 - d_1 = + 0 59$	21 5	
$\mu_1 - a_1 = + 0 41$	21 15	
$\mu_1 - a_2 = - 2 10$	21 8	
$\mu_1 - d_2 = - 2 24$	21 13	
$\mu_1 - e_2 = - 2 58$	21 5	
<hr/>		
Mittel	$\mu_1 = 21 9.2$	
	$\gamma = + 0.4$	
	21 9.6	Upsala St. Z.
	8 29.5	, M. Z.
Red. auf Greenw.	- 1 10.5	
, , \odot	+ 1.7	
<hr/>		
Minimum $7^h 20.^m 7 \pm 1.^m 9$ Greenw. M. Z.		

Alle hier noch die Resultate mit denjenigen, die von demselben Instrumente früher erhalten worden sind,

	Minimum Greenw. M. Z.	Corr. d. Ephem. der Viertelj. schr.	Beobachter.
Nov. 28	$11^h 29^m$	- 21 ^m	DUNÉR.
Dec. 28	9 23	- 24	,
Jan. 6	8 2	- 35	,
April 21	11 27	- 15	,

	Minimum Greenw. M. Z.	Corr. d. Ephem. der Viertelj. schr.	Beobachter.
1896 Febr. 21	10 ^h 31 ^m	— 6 ^m	BOHLIN.
„ April 1	7 48	— 3	„
„ Sept. 15	8 19	+ 6	„
„ Sept. 20	7 59	+ 7	„
„ Sept. 30	7 21	+ 10	„

Vorläufig habe ich von einer Ableitung einer Periode aus diesen Beobachtungen Abstand genommen, weil es sich vor der Hand nicht feststellen lässt, ob die Minima für die beiden Beobachter als vergleichbar anzusehen sind. Aus den Beobachtungen des Jahres 1896, welche allerdings *inter se* als frei von systematischen Fehlern zu betrachten sind, wurde eine Periode folgendermassen abgeleitet. Es sei

$$M_0 = \text{Febr. 21 } 10^h 31.^m 3 \text{ Grenw. M. Z.}$$

$$N_0 = 2^d 11^h 50^m$$

und man berechne

$$\bar{M} = M_0 + N_0 E$$

wo E die Nummer des Minimums ist. Es seien ferner M die beobachteten Minima und man setze:

$$M = M_0 + y + (N_0 + x) E,$$

wo also

$$N = N_0 + x$$

die wahre Periode ist. Man hat dann

$$\begin{aligned} \Delta M &= M - \bar{M} \\ &= y + x E. \end{aligned}$$

Aus den gegebenen Daten, die hier zusammengestellt werden mögen:

	E	M	\bar{M}	ΔM
		h m	h m	m
1896 Febr. 21	0	10 31.3	10 31.3	0.0
Apr. 1	16	7 48.0	7 51.3	— 3.3
Sept. 15	83	8 19.5	8 41.3	— 21.8
„ 20	85	7 58.7	8 21.3	— 22.6
„ 30	89	7 20.7	7 41.3	— 20.6

ergibt sich also:

$$\begin{aligned} - 1^m.65 &= y + 8 E \\ - 21^m.67 &= y + 85.67 E, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$x = - 15.^s 5$$

und

$$N = 2^d 11^h 49^m 44.^s 5.$$

Aus den Beobachtungen 1881—84 fand WILSING

$$N = 2^d 11^h 49^m 43.^s 5.$$

4. Es geht aus den Formeln für Beschattungsphänomene, die ich in dem Bull. Astr. für 1900 ¹⁾ gegeben habe, hervor und ist überdies von vorn herein einleuchtend, dass wenn ein dunkler Körper auf ein helle Scheibe ganz hereintritt, von diesem Momente ab eine Discontinuität der Lichtveränderung eintritt, die dem Verhalten von *U* Cephei im Minimum entspricht. Unter der einfachsten Annahme, dass die Scheibe des grösseren Körpers nahezu gleichförmig hell wäre, während der beschattende Körper als vollkommen dunkel angenommen wird, lässt sich das Phänomen der Verfinsterung bei *U* Cephei in grossen Zügen leicht veranschaulichen. Es seien *R* und *r* die beiden Radien der Körper und es sei angenommen, dass das Verhältniss der grössten zur kleinsten Helligkeit sei

$$(2.5)^2 = 6.25.$$

Hieraus folgt

$$\pi (R^2 - r^2) = \frac{\pi}{6.25} R^2,$$

woraus

$$\frac{r}{R} = 0.92. \quad \text{I.}$$

Nimmt man anderseits den Zeitraum des constanten Lichtes im Minimum zu 80^m und die ganze Periode der Verfinsterung zu 600^m an, so kann man die folgenden angenäherten Relationen ansetzen

$$\begin{aligned} 80^m &= \text{Const.} \times (R - r) \\ 600^m &= \text{Const.} \times (R + r), \end{aligned}$$

¹⁾ Sur l'emploi de la loi de Lambert dans les problèmes astrophotométriques.

woraus folgt

$$\frac{r}{R} = 0.76.$$

Dieser Werth stimmt mit dem Werthe I nicht ganz ein, aber fällt doch besser aus, als wenn man die Zeit des constanten Lichtes mit CHANDLER zu zwei Stunden veranschlägt, die beiden in verschiedenen Wegen gefundenen Werthe für

$$\frac{r}{R}$$

im Einklang zu bringen, müsste man dem Zeitraume des constanten Lichtes, wie leicht ersichtlich ist, den Werth

$$\frac{0.08}{1.08} \cdot 600^m = 44^m$$

beilegen, was indessen den Beobachtungen entschieden spricht.

Wenn aber der grössere Stern, wie natürlich in der Helligkeit der Fall ist, als nach der Mitte hin stärker leuchtet vorausgesetzt wird, so reicht ein kleinerer Werth von $\frac{r}{R}$ um den erforderlichen Abschwächungseffect auszuüben. Dadurch würde sich vielleicht eine etwas grössere Übereinstimmung der Resultate I und II erreichen lassen, obschon wieder der Verlauf der Curve im Minimum gegen die Annahme grösserer Helligkeitsdifferenzen spricht.

Meddelande från Stockholms Högskola.

Quelques théorèmes sur les fonctions entières.

Par HELGE VON KOCH.

(Communiqué le 12 Juin 1901 par E. PHRAGMÉN.)

Parmi les propriétés de la fonction exponentielle e^{-x} , une des plus remarquables consiste en ce que cette fonction tend vers zéro quand la variable tend vers $+\infty$ en suivant l'axe réel:

$$\lim_{x=+\infty} e^{-x} = 0.$$

A cause de la grande utilité de cette propriété pour diverses questions, il est naturel de chercher d'autres fonctions jouissant de la même propriété ou de se demander, plus généralement, à quelles conditions il faut assujettir les coefficients c_1 d'une fonction entière

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

pour que l'on ait

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = 0.$$

Plus on réfléchit sur cette question, plus on reconnaît les difficultés profondes qui s'opposent à sa solution complète. Les quelques résultats que j'ai trouvés là-dessus et qui font l'objet de la présente communication, ne sont qu'un premier essai; mais déjà ces premiers résultats et les conséquences qui en découlent immédiatement suffisent, je l'espère, pour montrer que le problème est digne d'intérêt.

Théorème 1. *Si une fonction entière*

$$(1) \quad f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

est telle que la série

$$(2) \quad \sum_{\lambda} c_{\lambda} x^{\lambda^2}$$

converge pour toute valeur de x ¹⁾ on ne peut pas avoir

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

sans que $f(x)$ se réduise identiquement à zéro.

En effet, supposons d'abord

$$(4) \quad c_0 \neq 0.$$

Dans l'expression (1), mettons x^{ν} à la place de x ; nous aurons

$$f(x^{\nu}) = \sum_{\lambda=0}^{+\infty} c_{\lambda} x^{\lambda \nu}.$$

Multiplions cette égalité par $c_{\nu} x^{-\mu \nu}$, μ étant un entier positif quelconque et faisons la somme de toutes les égalités obtenues en prenant successivement

$$\nu = 0, 1, 2, \dots + \infty.$$

La série (2) étant, d'après l'hypothèse faite, absolument convergente quel que soit x , il est facile de voir que la série double

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} \sum_{\lambda=0}^{+\infty} c_{\nu} c_{\lambda} x^{(\lambda - \mu)\nu}$$

converge absolument quel que soit x . En effet, ceci est évident pour $0 < |x| \leq 1$; pour $|x| > 1$ on a

$$|x|^{(\lambda - \mu)\nu} < |x|^{\lambda \nu} < x^{\lambda^2 + \nu^2}$$

d'où

¹⁾ D'après un théorème bien connu, cette hypothèse peut s'exprimer en écrivant: $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} |c_{\lambda}|^{\frac{1}{\lambda^2}} = 0$.

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} \sum_{\lambda=0}^{+\infty} |c_{\nu} c_{\lambda}| \cdot |x|^{\lambda \nu} < \left\{ \sum_{\nu=0}^{+\infty} |c_{\nu}| \cdot |x|^{\nu^2} \right\}^2$$

contre notre assertion.

En conséquence, nous avons le droit d'écrire

$$c_{\nu} \frac{f(x^{\nu})}{x^{\mu \nu}} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \sum_{\lambda=0}^{+\infty} c_{\nu} c_{\lambda} x^{(\lambda - \mu) \nu} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda} f(x^{\lambda - \mu}).$$

maintenant ε un nombre positif quelconque; pour toutes valeurs réelles de x satisfaisant à la condition

$$\varepsilon \leq x$$

séries

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} c_{\nu} \frac{f(x^{\nu})}{x^{\mu \nu}} \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda=0}^{+\infty} c_{\lambda} f(x^{\lambda - \mu})$$

convergent uniformément, en vertu de l'hypothèse (3). Or, d'après cette même hypothèse on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x^{\nu})}{x^{\mu \nu}} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^{\lambda - \mu}) = 0 \quad (\lambda = \mu + 1, \mu + 2, \dots)$$

part on a évidemment

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^{\lambda - \mu}) = f(1) \quad (\text{pour } \lambda = \mu)$$

$$f(x^{\lambda - \mu}) = f(0) = c_0 \quad (\text{pour } \lambda = 1, 2, \dots, \mu - 1)$$

é

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x^{\nu})}{x^{\mu \nu}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x^{\lambda - \mu})$$

cause de la convergence uniforme, montre donc que

$$c_0 f(1) = \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\mu-1} c_{\lambda} \right\} c_0 + c_{\mu} f(1)$$

pour

$$\mu = 1, 2, 3, \dots$$

Comme on a $c_0 \neq 0$ $f(1)$ ne peut pas être nul; en l'hypothèse $f(1) = 0$ combinée avec la formule (5) (pour $\mu = 1$) donnerait $0 = c_0^2$. Pour $\mu = 1$ la formule (5) donne donc

$$c_1 = Kc_0, \quad K = \frac{f(1) - c_0}{f(1)}.$$

Pour une valeur quelconque de μ , la même formule que

$$c_\mu = Kc_{\mu-1}$$

d'où

$$c_\mu = K^\mu \cdot c_0; \quad (\mu = 1, 2, 3, \dots)$$

d'où résulte que $\sum c_\mu x^\mu$ ne peut être une fonction entière

$$K = 0.$$

Or, dans ce cas, c_0 serait le seul coefficient non-nul, est impossible à cause de l'hypothèse (3).

Supposons maintenant

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{k-1} = 0;$$

et posons

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x^k} = c_k + c_{k+1}x + c_{k+2}x^2 + \dots$$

Sur cette fonction nous pouvons raisonner comme tant l'heure sur $f(x)$; en effet, la série (2) étant une fonction de x , il en est de même de la série

$$\sum_{\lambda=0}^{+\infty} c_{k+\lambda} x^{\lambda^2}$$

et l'hypothèse (3) faite sur $f(x)$ entraîne la formule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

Par conséquent, en appliquant le résultat de tout-à-l'heure nous voyons que l'hypothèse $c_k \neq 0$ est impossible que soit k , c. q. f. d.

Le théorème ainsi démontré met en évidence un fait qui nous paraît assez curieux. En se proposant de déterminer les coefficients c_0, c_1, c_2, \dots de telle manière que la fonction

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

satisfasse à la condition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

on tombe sur une limite *inférieure* pour $|c_1|$ ou plutôt pour la rapidité avec laquelle $|c_1|$ tend vers zéro: si cette quantité décroît plus vite que C_1 , C_1 étant tel que la série $\sum C_1 x^{1^2}$ est toujours convergente, la condition (3) est impossible à remplir.

Théorème 2. *Si une fonction entière*

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

est telle que la série

$$\sum_{\lambda=0}^{+\infty} c_\lambda x^{\lambda^2}$$

converge pour toute valeur de x on ne peut pas avoir

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^k} = 0,$$

k désignant un entier positif donné, sans que $f(x)$ se réduise à un polynôme de degré $k-1$ au plus.

En effet, si l'on pose

$$f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{k-1}x^{k-1} + x^k q(x)$$

la formule (6) entraîne la suivante

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 0$$

d'où résulte, d'après théorème 1, que $q(x)$ est nul identiquement.

Remarque. On voit immédiatement que le théorème 1 reste vrai si l'on remplace la condition (3) par la formule un peu plus générale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(xe^{i\varphi}) = 0$$

φ désignant un angle donné quelconque. De même, le théorème 2 subsiste si dans la formule (6) on remplace x par $xe^{i\varphi}$.

Théorème 3. *Si une fonction entière*

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

est telle que la série

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda} x^{\lambda^2}$$

converge pour toute valeur de x , on ne peut pas avoir

$$(7) \quad \lim_{\nu=\infty} f(\alpha^{\nu}) = 0,$$

α désignant un nombre positif assujetti seulement à la condition

$$\alpha > 1$$

et ν parcourrant la suite des nombres entiers positifs, sans que $f(x)$ se réduise identiquement à zéro.

En effet, dans l'identité démontrée plus haut:

$$(8) \quad \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda} \frac{f(x^{\lambda})}{x^{\mu\lambda}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda} f(x^{\lambda-\mu})$$

nous mettons $x = \alpha^{\nu}$ ce qui donne

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda} \frac{f(\alpha^{\lambda\nu})}{\alpha^{\mu\lambda\nu}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda} f(\alpha^{(\lambda-\mu)\nu}).$$

Pour trouver la valeur à laquelle tend chaque membre de cette égalité quand ν augmente vers l'infini en prenant successivement les valeurs

$$(9) \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

il suffit de mettre dans chaque terme $\nu = \infty$. En effet, d'après l'hypothèse (7) on a, pour toutes les valeurs (9) et pour toutes les valeurs

$$\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\left| \frac{f(\alpha^{\lambda\nu})}{\alpha^{\mu\lambda\nu}} \right| < K, \quad |f(\alpha^{(\lambda-\mu)\nu})| < K$$

K désignant un nombre ne dépendant que de α et de μ .

Par conséquent, on retombe sur la formule (5) qui, comme nous avons vu, entraîne nécessairement que $f(x)$ s'annule identiquement.

De la même manière, on peut démontrer le théorème suivant qui est une généralisation du théorème 2:

Théorème 4. *Si une fonction entière*

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

est telle que la série

$$\sum c_\lambda x^{\lambda^2}$$

converge pour toute valeur de x , on ne peut pas avoir

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{f(\alpha^\nu)}{\alpha^{\nu k}} = 0$$

k désignant un entier positif donné et α et ν ayant la même signification que dans le théorème 3, sans que $f(x)$ se réduise à un polynôme de degré $k - 1$ au plus.

Comme application des résultats précédents, on peut préciser, pour les fonctions considérées, ce théorème fondamental concernant les fonctions entières: étant donnés deux nombres positifs K et R si grands que l'on veut, il y a dans le domaine

$$(10) \quad |x| > R$$

une infinité de valeurs pour lesquelles la fonction entière satisfait à l'inégalité

$$(11) \quad |f(x)| > K.$$

Cet énoncé n'apprend pas pour *quelles* valeurs du domaine (10) l'inégalité (11) a lieu.

C'est sur ce point que nos résultats permettent de compléter l'énoncé.

Pour abréger, nous appellerons la fonction

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x^{\lambda^2}$$

fonction adjointe de la fonction donnée

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda} x^{\lambda}$$

et nous pouvons alors énoncer ce théorème:

Etant donnée une fonction entière $f(x)$ dont l'adjointe est une fonction entière, si on se donne un nombre positif $\alpha > 1$ et un nombre positif quelconque K , l'inégalité

$$|f(\alpha^{\nu})| > K$$

est vérifiée pour une infinité de nombres entiers et positifs ν .

En effet, si l'on avait

$$|f(\alpha^{\nu})| \leq K$$

pour $\nu > \nu'$, ν' étant suffisamment grand, on aurait

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{f(\alpha^{\nu})}{\alpha^{\nu}} = 0.$$

Par suite, en vertu du théorème 4, $f(x)$ se réduirait à une constante.

Pour avoir une autre application, nous remarquons que, si une fonction entière

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} x^{\nu}$$

satisfait à la condition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

son adjointe ne peut pas être une fonction entière, c'est-à-dire la série

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda} x^{\lambda^2}$$

est nécessairement divergente pour des valeurs suffisamment grandes de x .

Considérons une fonction entière $f(x)$ dont la partie réelle tend vers $+\infty$ pour $x = +\infty$. Telle est, par exemple, chaque fonction entière à coefficients positifs. Alors la fonction

$$(12) \quad e^{-f(x)}$$

tend évidemment vers zéro quand x , en suivant l'axe réel, tend vers $+\infty$. Donc la fonction adjointe

$$\sum C_\lambda x^{\lambda^2}$$

de la fonction (12) est *divergente* pour des valeurs de x suffisamment grandes. Or

$$C_\lambda = \frac{1}{\lambda!} \left[\frac{d^{\lambda^2}}{dx^{\lambda^2}} e^{-\pi(x)} \right]_{x=0}$$

étant un polynôme entier, facile à former, par rapport aux coefficients $c_1, c_2, \dots, c_\lambda$, on trouve ainsi une suite d'inégalités aux quelles satisfont les coefficients de toute fonction appartenant à la classe considérée. En particulier, les coefficients de toute fonction entière à *coefficients positifs* satisfont à ces inégalités.

Skänker till Vetenskaps-Akademins bibliotek.

(Forts. från sid. 3)

Chambésy. *Herbier Boissier.*

Bulletin. (2) T. 1 (1901): N:o 6. 8:o.

Chemnitz. *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*

Das Klima des Königreiches Sachsen. H. 6. 1901. 4:o.

Chicago. *Field Columbian Museum.*

Publications. 45, 51—54. 1900—1901. 8:o.

— *Yerkes Observatory of the University of Chicago.*

Bulletin. N:o 16—17. 1901. 8:o.

Coimbra. *Sociedade Broteriana.*

Boletim. 17 (1900): pp. 97—207. 8:o.

Genève. *Observatoire.*

Rapport sur le concours de réglage de chronomètres de l'année 1901. 8:o.

Genova. *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*

Atti. Vol. 11 (1900): N:o 4. 8:o.

's-Gravenhage. *Nederländska Regeringen.*

Die Triangulation von Java ausgeführt vom Personal des geographischen Dienstes in Niederländisch Ost-Indien. Abt. 6. 1900. 4:o.

Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*

Abhandlungen. Philol.-hist. Kl. N. F. Bd 4: N:o 5. 1901. 4:o.

Habana. *Observatorio del Colegio de Belen de la Compañía de.*

Observaciones magneticas y meteorologicas. Año 1900. 4:o.

Kazan. *Universitetet.*

Učenija zapiski. G. 67 (1900): N:o 9—12; 68 (1901): 1—2. 8:o.

Godičnyi akt. G. 1900. 8:o.

Akademiska dissertationer. 1900/1901. 5 st. 8:o.

— *Observatoire astronomique.*

Trudy. N:o 12. 1900. 4:o.

Godovoj otčet. G. 1898—1900. 8:o.

Kjøbenhavn. *Det danske meteorologiske Institut.*

Nautisk meteorologisk Aarbog. 1900. 4:o.

Kristiania. *Norwegisches meteorologisches Institut.*

Jahrbuch für 1900. 4:o.

— *Den geografiske Opmaaling.*

24 st. kartor.

Leipzig. *Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft.*

Jahresbericht. 1901. 8:o.

Liège. *Société géologique.*

Annales. T. 28 (1901): Livr. 2. 8:o.

Lille. *Université.*

Travaux et mémoires. T. 10: Mém. 27. 1901. 8:o.

(Forts. å sid. 4)

de convergence et divergence des séries à
termes positifs.

Par HENRIK PETRINI.

Communiqué le 12 Juin 1901 par E. PHRAGMÉN.)

$n > 0$, $S = \sum_{\nu=1}^{\infty} w_{\nu}$, une série convergente ou divergente

w_{ν} . Nous voudrions chercher, dans la suite, une
chée de la quantité $S_n^{(m)}$, et cette quantité peut
comme une mesure de l'ordre de convergence resp.
la série S .

sons

$$\lambda_n = N_n - N_{n+1} \frac{w_{n+1}}{w_n}, \quad N_n > 0$$

que nous ayons réussi à déterminer N_n de manière
 $|\lambda_n|$ est fini et $\neq 0$. Nous trouverons

$$\sum_{\nu=n}^{m-1} \lambda_{\nu} w_{\nu} = \lambda' \sum_{\nu=n}^{m-1} w_{\nu} = N_n w_n - N_m w_m$$

valeur moyenne de λ_{ν} . Soit

$$= \sum_{\nu=n}^{\infty} w_{\nu}, \text{ si } S \text{ est convergente, mais}$$

$$= \sum_{\nu=n_0}^{m-1} w_{\nu}, \text{ si } S \text{ est divergente.}$$

Dans le premier cas nous supposons $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{N_{\nu}} = \infty$ et dans le deuxième cas $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n w_n = \infty$.¹⁾ L'équation (2) donne

$$(3) \quad S_n = \frac{N_n w_n}{\lambda} (1 + \varepsilon_n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

§ 2. Si nous ne réussissons pas à déterminer N_n de manière que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ est fini et $\neq 0$, nous pourrions trouver N_n telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ devient infinie. Choisissons N_n de cette manière et posons

$$(4) \quad \begin{cases} w'_n = w_n \lambda_n \\ \lambda'_n = N_n - N_{n+1} \frac{w'_{n+1}}{w'_n} \end{cases}$$

En éliminant $N_{n+1} \frac{w'_{n+1}}{w'_n}$ entre les équations (1) et (4) nous trouverons

$$(5) \quad N_n \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) = 1 - \frac{\lambda'_n}{\lambda_{n+1}} \equiv \varrho_n$$

$\therefore \sum_{\nu=n}^{m-1} \frac{\varrho_{\nu}}{N_{\nu}} = \varrho' \sum_{\nu=n}^{m-1} \frac{1}{N_{\nu}} = \frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_m} =$ une quantité à limite finie, ϱ' étant une valeur moyenne de ϱ_{ν} . Si $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{N_{\nu}} = \infty$ il faut donc que $\lim_{m \rightarrow \infty} \varrho' = 0$. Si ϱ_n garde toujours le même signe nous aurons $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 0$

$$(6) \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda'_n}{\lambda_{n+1}} = 1.$$

Nous pourrions donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. Soient $w'_n > 0$, $N_n > 0$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{N_{\nu}} = \infty$

$$\lambda'_n = N_n - N_{n+1} \frac{w'_{n+1}}{w'_n}$$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n w'_n = \infty$ pour le cas où $\sum_{\nu=1}^{\infty} w'_{\nu} = \infty$.

¹⁾ Cfr p. e. HENRIK PETRINI: »Considérations générales sur la convergence et la divergence des séries à termes positifs.« Öfvers. K. V. Akad., Sthlm 1900, p. 904—5.

Si la quantité λ_n , définie par l'équation (5), garde toujours le même signe et si $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$, nous trouverons

$$(7) \quad S_n = \frac{N_n w'_n}{|\lambda'_n - 1|} (1 + \epsilon'_n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon'_n = 0$$

en définissant $S_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} w'_\nu$, si $\sum_{\nu=1}^{\infty} w'_\nu$ est finie, mais $= \sum_{\nu=n_0}^{n-1} w'_\nu$ si $\sum_{\nu=1}^{\infty} w'_\nu = \infty$.

En effet, l'équation (2) peut s'écrire

$$\sum_{\nu=n}^{n-1} w'_\nu = \frac{N_n w'_n}{\lambda'_n - 1} (1 + \delta_n) - \frac{N_m w'_m}{\lambda'_m - 1} (1 + \delta_m)$$

en posant

$$\frac{\lambda'_{n-1}}{\lambda_n} = 1 + \delta_n.$$

L'équation (6) donne $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, d'où l'on tire l'équation (7).

§ 3. Applications. Soit

$$L_p(n) = n l n l l n \dots l_p n.$$

On trouve

$$\frac{l_p(n+1)}{l_p(n)} = 1 + \frac{1}{L_p(n)} + \dots$$

les termes omis ayant une somme qui est le terme général d'une série absolument convergente. Les termes omis dans la suite posséderont la même propriété. Nous aurons de plus

$$\frac{L_p(n+1)}{L_p(n)} = 1 + \omega_p + \dots$$

$$\omega_p = \frac{1}{n} + \frac{1}{n l n} + \frac{1}{n l n l l n} + \dots + \frac{1}{n l n \dots l_p n} = \sum_{r=0}^p \frac{1}{L_r(n)}.$$

Soient

$$(8) \quad \begin{cases} w_n > w_{n+1} > 0 \\ \frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 - \omega_p - \frac{\alpha_n}{L_p} \end{cases}$$

Si nous posons dans (1)

$$N_n = L_p(n)$$

nous aurons

$$\lambda_n = \alpha_n + L_p \tau_n, \sum_{\nu=1}^{\infty} |\tau_{\nu}| \text{ finie.}$$

Par suite, si dans (8) $|\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n| = \alpha$ est finie et > 0 , l'équation (3) donne

$$(9) \quad S_n = \frac{L_p(n)w_n}{\alpha}(1 + \varepsilon_n), \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Si dans l'équation (8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ et que $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\alpha_{\nu}|}{L_p(\nu)}$ est finie nous poserons dans (1)

$$N_n = L_{p+1}(n)$$

$$\therefore \lambda_n = L_{p+1}(n) - L_{p+1}(n)[1 + \omega_{p+1} - \dots][1 - \omega_p - \frac{\alpha_n}{L_p(n)}]$$

$$\therefore \lambda_n = -1 + \zeta_n, \zeta_n = \alpha_n \frac{L_{p+1}(n)}{L_p(n)}, \sum \frac{|\zeta_n|}{L_{p+1}(n)} \text{ finie, } \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 0.$$

$$(10) \quad \therefore S_n = L_{p+1}(n)w_n(1 + \varepsilon_n), \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Si enfin $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ et que $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\alpha_{\nu}|}{L_p(\nu)} = \infty$ nous traiterons le cas où p peut être pris assez grande pour que

$$\beta_n = \alpha_n l_{p+1n}$$

ait une limite infinie,

$$(11) \quad \therefore \frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 - \omega_p - \frac{\beta_n}{L_{p+1}}, \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n| = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{L_{p+1}} = 0.$$

Si nous posons dans (1)

$$N_n = L_p(n)$$

nous trouverons si p est indépendante de n — ce qui arrive dans tous les cas, où les séries de BERTRAND suffisent pour constater la convergence ou la divergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} w_{\nu}$ —

$$= \frac{\beta_n}{l_{p+1}(n)} (1 - \varepsilon_n) = \frac{\beta'_n}{l_{p+1}(n)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \infty,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta'_n| = \infty,$$

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{\beta'_{n+1}}{\beta'_n} \left(1 - \frac{1}{L_{p+1}} + \dots \right).$$

arde toujours le même signe et va toujours numé-
diminuant nous aurons pour n assez grande

$$0 < \frac{\beta'_{n+1}}{\beta'_n} \left(1 - \frac{1}{L_{p+1}} \right) < 1$$

$$\therefore \frac{\beta'_{n+1}}{\beta'_n} < 1 + \frac{1}{L_{p+1}}.$$

β' va toujours numériquement en augmentant nous

$$1 < \frac{\beta'_{n+1}}{\beta'_n}$$

$$\therefore \frac{\beta'_{n+1}}{\beta'_n} = 1 + \frac{\vartheta_n}{L_{p+1}(n)}, \quad 0 < \vartheta_n < 1.$$

$$+ \frac{\delta_n}{L_{p+1}} \left(1 - \frac{1}{L_{p+1}} + \dots \right) = 1 - \frac{\eta_n}{L_{p+1}}, \quad 0 < \eta_n < 1.$$

it

$$w'_n = \lambda_n c_n$$

ns

$$\omega_p - \frac{\beta_n}{L_{p+1}} \left(1 - \frac{\eta_n}{L_{p+1}} + \dots \right) = 1 - \omega_p - \frac{\beta_n + \eta_n}{L_{p+1}} + \dots$$

$$\therefore \lambda'_n = \frac{\beta_n + \eta_n}{L_{p+1}(n)} (1 - \varepsilon'_n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon'_n = 0,$$

$$\frac{\lambda'_n}{\lambda_n} = \left(1 + \frac{\eta_n}{\beta_n} \right) (1 - \varepsilon'_n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon'_n = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda'_n}{\lambda_n} = 1.$$

Par conséquent, pour trouver la valeur approchée de la série $\sum_{\nu=n}^{m-1} w'_\nu$ nous formerons la quantité λ'_n (4). Puis nous formerons les quantités $\bar{w}_n = \frac{w'_n}{\lambda'_n}$ et $\bar{\lambda}_n$ (1). Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda'_n}{\bar{\lambda}_n} = 1$ l'équation (7) aura lieu. Dans le cas actuel, si

$$\frac{w'_{n+1}}{w'_n} = 1 - \omega_p - \frac{\beta'_n}{L_{p+1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta'_n}{L_{p+1}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta'_n = \infty$$

nous trouverons qu'en général la valeur approchée de la série donnée sera

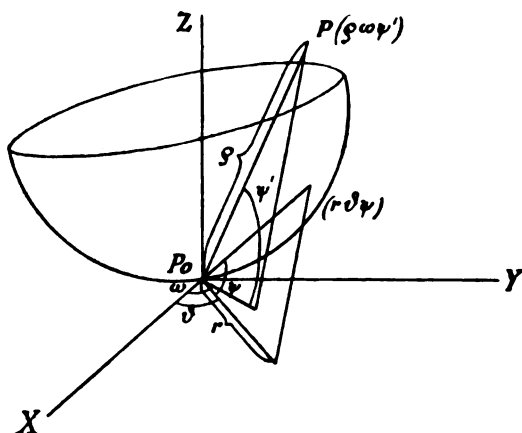
$$(13) \quad S_n = \frac{L_p(n)w'_n}{|\beta'_n|}.$$

Les limites des dérivées secondes du potentiel d'une couche simple.

Par H. PETRINI.

(Communiqué le 12 Juin 1901 par E. PHRAGMÉN.)

Soit (notations voir la figure)



$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma \frac{r dr}{R} \\ R = \sqrt{r_1^2 - 2r_1 \varrho u + \varrho^2} \\ u = \cos \psi' \cos \psi \cos (\vartheta - \omega) + \sin \psi' \sin \psi \\ r = r_1 \cos \psi. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma \left\{ -\frac{1}{R^3} + \frac{3(q \cos \psi' \cos \omega - r_1 \cos \psi \cos \vartheta)^2}{R^5} \right\} r dr \\
 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma \left\{ -\frac{1}{R^3} + \frac{3(q \cos \psi' \sin \omega - r_1 \cos \psi \sin \vartheta)^2}{R^5} \right\} r dr \\
 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma \left\{ -\frac{1}{R^3} + \frac{3(q \sin \psi' - r_1 \sin \psi)^2}{R^5} \right\} r dr \\
 (2) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma \frac{(q \cos \psi' \cos \omega - r_1 \cos \psi \cos \vartheta)(q \cos \psi' \sin \omega - r_1 \cos \psi \sin \vartheta)}{R^5} r dr \\
 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} &= 3 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma \frac{(q \cos \psi' \cos \omega - r_1 \cos \psi \cos \vartheta)(q \sin \psi' - r_1 \sin \psi)}{R^5} r dr \\
 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} &= 3 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma \frac{(q \cos \psi' \sin \omega - r_1 \cos \psi \sin \vartheta)(q \sin \psi' - r_1 \sin \psi)}{R^5} r dr.
 \end{aligned}$$

Nous étudierons dans la suite ce que deviendront ces quantités lorsque le point P se meut vers le point P_0 suivant une courbe quelconque P_0PP_1 et nous déterminerons les conditions pour que ces limites existent. En employant les-mêmes considérations que dans le cas des dérivées premières ¹⁾ nous obtiendrons les formules suivantes qu'il est du reste facile à vérifier à posteriori:

$$\begin{aligned}
 r = \varrho t, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -\frac{1}{\varrho} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{a/\varrho} \sigma \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3(\cos \psi' \cos \omega - t \cos \vartheta)^2}{p^5} \right) t dt \quad (6). \\
 p &= \sqrt{\frac{t^2}{\cos^2 \psi} - \frac{2tu}{\cos \psi} + 1}.
 \end{aligned}$$

Pour rendre ces expressions finies pour ϱ infiniment petite, nous voulons supposer que σ pourra s'écrire

¹⁾ H. PETRINI: Etude sur les dérivées premières du potentiel d'une couche simple. Öfvers. K. V. A. Sthlm 1900 p. 867—894.

$$(3) \quad \sigma = \sigma_0 + r\sigma_1, \text{ lim } \sigma_1 \text{ finie, } \sigma_0 \text{ constante.}$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{1}{\varrho} \sigma_0 A_{xx}^e + A_{xx}'^e \quad (6) \\ A_{xx}^e &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{a/\varrho} \left[-\frac{1}{p^3} + \frac{3(\cos \psi' \cos \omega - t \cos \vartheta)^2}{p^5} \right] t dt \quad (6) \\ A_{xx}'^e &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{a/\varrho} \sigma_1 \left[-\frac{1}{p^3} + \frac{3(\cos \psi' \cos \omega - t \cos \vartheta)^2}{p^5} \right] t^2 dt \quad (6) \\ u &= \cos \psi' \cos \psi \cos (\vartheta - \omega) + \sin \psi' \sin \psi. \end{aligned} \right.$$

Les quantités $A_{xx}'^e$ peuvent se transformer en

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{xx}'^e &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{a/\varrho} \sigma_1 \left[-\frac{1}{p^3} + \frac{3(\cos \psi' \cos \omega - t \cos \vartheta)^2}{p^5} \right] t^2 dt + \\ (6) \quad &+ \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{a/\varrho} \sigma_1 (1 - 3 \cos^2 \psi \cos^2 \vartheta) \cos^3 \psi \frac{dt}{t} + W_{xx}^e \\ W_{xx}^e &= - \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_r^a \sigma_1 (1 - 3 \cos^2 \psi \cos^2 \vartheta) \cos^3 \psi \frac{dr}{r}. \end{aligned} \right.$$

Si la courbe P_0PP' ne touche pas la surface, u est toujours numériquement < 1 . En passant à la limite pour $\varrho = 0$ on trouve des expressions des formes

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{\varrho=0} A^e &= A' = \int_0^{2\pi} \sigma_1 F' d\vartheta + W, \quad W = \lim_{\varrho=0} W^e \\ F' &= \frac{a'}{(1-u)^2} + \frac{b'}{1-u} + c' + d' \log(1-u) \end{aligned} \right.$$

ou les $a'b'c'd'$ sont finies et fonctions de $\psi'\omega\psi\vartheta$. En écrivant des formules analogues pour les autres dérivées nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Si la densité σ est de la forme

$$(7) \quad \sigma = \sigma_1 \cdot r$$

et si l'on s'approche de la surface suivant une courbe qui ne la touche pas, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une valeur limite finie et déterminée de la dérivée seconde du potentiel est l'existence d'une limite de la fonction W^e définie par la formule

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} W_{xx}^e &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\varrho}^a \sigma_1 (-1 + 3 \cos^2 \psi \cos^2 \vartheta) \cos^3 \psi \frac{dr}{r} \\ W_{yy}^e &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\varrho}^a \sigma_1 (-1 + 3 \cos^2 \psi \sin^2 \vartheta) \cos^3 \psi \frac{dr}{r} \\ W_{zz}^e &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\varrho}^a \sigma_1 (-1 + 3 \sin^2 \psi) \cos^3 \psi \frac{dr}{r} \\ W_{xy}^e &= 3 \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \int_{\varrho}^a \sigma_1 \cos^3 \psi \frac{dr}{r} \\ W_{xz}^e &= 3 \int_0^{2\pi} \cos \vartheta d\vartheta \int_{\varrho}^a \sigma_1 \cos^4 \psi \sin \psi \frac{dr}{r} \\ W_{yz}^e &= 3 \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_{\varrho}^a \sigma_1 \cos^4 \psi \sin \psi \frac{dr}{r} \end{aligned} \right.$$

Remarque. Si la surface n'est pas un plan, il faut que la partie qui entoure le point P_0 est tellement définie qu'il soit possible de tracer un plan de projection de manière qu'à chaque point du plan ne corresponde qu'un nombre fini de points de la surface. La fonction σ est la masse pour unité de surface de projection. Si la surface admet une normale définie, σ est la densité divisée par le cosinus de l'angle que fait cette normale avec la normale du plan considéré.

Il nous reste à considérer les conditions de l'existence des dérivées secondes d'une couche dont la masse a une densité constante pour unité de surface du plan de projection.

quantités A_{xx} etc. sont de la forme

$$A = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{a/\varrho} \frac{a + bt + ct^2 + dt^3}{p^3} dt$$

abcd ne contenant le variable t que dans l'angle écrivons

$$\psi = \psi_0 + X$$

la formule $F(\psi) = F(\psi_0) + XF'(\psi_0 + zX)$, $|z| < 1$, on sous le signe intégral nous obtiendrons la-même en y supposant $\psi = \psi_0$ et en ajoutant un terme de la forme

$$A_2 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{a/\varrho} \frac{a_1 + at + \dots + a_4 t^4}{p^7} \cdot X dt.$$

$$\therefore A = A_1 + A_2.$$

supposons

$$X = r\psi_1 \quad \lim_{r=0} \psi_1 \text{ finie}$$

ens, en écrivant $r = \varrho t$,

$$A_2 = \varrho A_3 \quad \lim_{\varrho=0} A_3 \text{ finie}$$

que la courbe P_0PP' ne touche pas la surface; $p > 0$. Quant au premier terme de l'équation écrire après l'intégration par rapport à t

$$A_1 = A_0 + \varrho P(\varrho) \quad \lim_{\varrho=0} P(\varrho) \text{ finie.}$$

$$\therefore A = A_0 + \varrho(P(\varrho) + A_3).$$

la dérivée seconde de V soit finie pour $\lim \varrho = 0$ que

$$A_0 = 0.$$

A_0 étant ce que devient A en y supposant $\lim \varrho = 0$. Dans la première intégration nous trouverons

$$(10) \left\{ \begin{aligned} A_0 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi_0 B d\vartheta, \quad \psi_0 = \lim_{r=0} \psi, \\ B_{xx} &= \frac{(a-\alpha)^2}{(1-u_0)^2} - \frac{1-\alpha^2}{1-u_0} \quad (3), \quad u_0 = \lim_{\varphi=0} u, \\ B_{xy} &= \frac{(a-\alpha)(b-\beta)}{(1-u_0)^2} + \frac{\alpha\beta}{1-u_0}, \quad (3) \\ \alpha &= \cos \psi_0 \cos \vartheta, \quad \beta = \cos \psi_0 \sin \vartheta, \quad \gamma = \sin \psi_0 \\ a &= \cos \psi' \cos \omega, \quad b = \cos \psi' \sin \omega, \quad c = \sin \psi' \\ u_0 &= a\alpha + b\beta + c\gamma = \cos \psi' \cos \psi_0 \cos(\vartheta - \omega) + \sin \psi' \sin \psi_0. \end{aligned} \right.$$

Posons $\omega = 0$ et supposons

$$\psi_0 = 0.$$

Nous trouverons

$$B_{xx} = \frac{1}{\cos^2 \psi'} \left\{ \frac{\sin^4 \psi'}{(1-u)^2} - \frac{\sin^2 \psi'}{1-u} - u \right\}, \quad u = \cos \psi' \cos \vartheta$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} B_{xx} d\vartheta = 0$$

$$B_{xy} = \sin \vartheta F(\cos \vartheta), \quad \therefore \int_0^{2\pi} B_{xy} d\vartheta = 0$$

$$B_{yy} = \frac{1}{\cos^2 \psi'} \left\{ u + \frac{1}{1-u} - \frac{\sin^2 \psi'}{(1-u)^2} \right\}, \quad \therefore \int_0^{2\pi} B_{yy} d\vartheta = 0$$

$$B_{xz} = \frac{\cos \psi - \cos \vartheta}{1-u} \cdot \sin \psi', \quad \therefore \int_0^{2\pi} B_{xz} d\vartheta = 0$$

$$B_{zx} = \frac{\sin^2 \psi'}{(1-u)^2} - \frac{1}{1-u}, \quad \therefore \int_0^{2\pi} B_{zx} d\vartheta = 0$$

$$B_{yz} = -\frac{\sin \psi' \sin \vartheta}{(1-u)^2}, \quad \therefore \int_0^{2\pi} B_{yz} d\vartheta = 0.$$

Nous pourrions donc énoncer le théorème suivant:

Soit la surface donnée déterminée de manière qu'elle ait au point P_0 un plan tangent déterminé, et soit l'angle ψ , que fait le rayon vecteur (de ce point à un point quelconque de la surface) avec sa projection r sur le plan tangent, déterminé de la manière

$$\psi = r\psi_1, \lim_{r=0} \psi_1 \text{ finie};$$

soit de plus la densité σ , comptée par unité de la projection de la surface sur le plan tangent au point P_0 , exprimée par la formule

$$\sigma = \sigma_0 + r\sigma, \sigma_0 \text{ constante et finie, } \lim_{r=0} \sigma_1 \text{ finie};$$

soient enfin les limites pour $\varrho = 0$ des quantités W^e , définies par les équations (8), finies et déterminées, alors chaque'une des six dérivées secondes du potentiel de la couche simple de la surface a une valeur limite finie et déterminée quand on s'approche de la surface suivant une courbe qui ne la touche pas.

Remarque: Lorsque $\psi = r\psi_1$ on pourra mettre $\psi = 0$ dans les conditions $\lim_{\varrho=0} W^e$ finie (équ. 8).

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 414.)

London. *Meteorological Office.*

Hourly means. Year 1897. 4:o.

Meteorological observations at stations of the second order. Year 1897. 4:o.

Charts illustrating the weather of the North Atlantic Ocean in the winter of 1898—9. 1901. Fol.

— *R. Astronomical society.*

Monthly notices. Vol. 61 (1901): N:o 6. 8:o.

— *Chemical Society.*

Journal. Vols. 79—80 (1901): 6. 8:o.

Proceedings. Vol. 17 (1901): N:o 237—238. 8:o.

— *Geological society.*

Quarterly journal. Vol. 57 (1901): P. 2. 8:o.

— *R. Meteorological society.*

Quarterly Journal. Vol. 27 (1901): N:o 118. 8:o.

— *Royal society.*

Proceedings. Vol. 68 (1901): N:o 444—445. 8:o.

London, Ont. *Entomological society of Ontario.*

The Canadian Entomologist. Vol. 33 (1901): N:o 5. 8:o.

Madras. *Observatory.*

Taylor's general catalogue of stars for the equinox 1835'0. Edinburgh 1901. 4:o.

Madrid. *R. Academia de ciencias exactas, físicas y naturales.*

Memorias. T. 19: Fasc. 1. 1893—1900. 8:o.

Manchester. *Literary and philosophical society.*

Memoirs and proceedings. Vol. 45 (1900/01): P. 2. 8:o.

Manila. *Observatorio.*

Boletín mensual. Año 1898: Trim. 4. 4:o.

Resumen general de los temporales del año 1893. 4:o.

Melbourne. *Royal society of Victoria.*

Proceedings. Vol. 13: P. 1. 1900. 8:o.

— *Observatory.*

Record of results of observations in meteorology and terrestrial magnetism. 1900. 8:o.

Mexico. *Sociedad científica »Antonio Alzate«*

Memorias y revista. T. 15 (1900/1901): N. 1—2. 8:o.

— *Instituto médico nacional.*

Anales. T. 4 (1900): Num. 15. 8:o.

— *Observatorio meteorológico central.*

Boletín mensual. 1900: 1—12. Fol.

Moscou. *Société impériale des naturalistes.*

Bulletin. 1900: N:o 3. 8:o.

(Forts. å sid. 464.)

parallaxe d'une étoile dans le voisinage de 61 Cygne.

Par ÖSTEN BERGSTRAND.

(Communiqué le 12 Juin 1901 par N. C. DUNÉR.)

es *Astronomische Nachrichten*, T. 150, M. SCHUR a
résultat très remarquable qu'il a tiré des ses recher-
parallaxe et sur le mouvement propre de 61 Cygne,
de de l'héliomètre de l'Observatoire de Göttingen.¹⁾
recherches, M. SCHUR avait employé quatre étoiles de
, à savoir $BD + 37^{\circ}4131$, $BD + 38^{\circ}4405$, $BD +$
 $D + 37^{\circ}4193$. Quant aux deux premières de ces
circonstance curieuse s'était présentée que la distance
déduite des mesures, était variable de manière à
mesure des différentes saisons. Au contraire, la di-
les deux autres étoiles s'était montrée constante.
UR est d'avis que ces variations de la distance mesu-
nt d'une grande parallaxe annuelle de l'étoile $BD +$
il trouve pour cette parallaxe la valeur $+ 0,6$.
r est plus grande que celle ordinairement admise
rallaxe de 61 Cygne, et elle n'est surpassée que
r de la parallaxe de α Centaure.

UR, Ueber die Parallaxe eines Sterns in der Nähe von 61 Cygni
Bd 150, N:o 3590, 1899).

Le résultat de M. SCHUR est d'autant plus remarquable que cette étoile qui est de la 8^{me} grandeur n'a pas de mouvement propre sensible.¹⁾ Par conséquent elle devait être jointe physiquement à notre système solaire et elle devait prendre part au mouvement de celui-ci dans l'espace. Cette circonstance intéressante serait analogue au phénomène connu sous le nom de »Star Drift«.

Comme M. SCHUR a recommandé à d'autres observateurs d'entreprendre des recherches sur cette question, j'ai entrepris une détermination photogrammétrique de cette parallaxe, à l'aide du grand réfracteur photographique de l'Observatoire d'Upsala (ouverture 33 cm., distance focale 4,36 m.) et de l'appareil de mesure de REPSOLD appartenant à l'Observatoire. Je vais ici rendre compte des méthodes de mesure et de réduction que j'ai employées et des résultats auxquels je suis venu.²⁾ Une exposition plus détaillée sera publiée plus tard.

Pour la détermination de la parallaxe, j'ai mesuré 13 clichés photographiques de la région autour de $BD + 37^{\circ}4131$, pris pendant l'espace d'un an: 1899 septembre — 1900 août. Parmi ces clichés, un a été exposé 3 fois, dix ont été exposés 4 fois et deux, 5 fois. Donc ces 13 clichés contiennent en tout 53 images de chaque étoile. Les images différentes d'une même étoile sont situées à peu près sur le même cercle de déclinaison. Sur chaque cliché, on a photographié le réseau de GAUTIER.

Comme étoiles de comparaison j'ai employé les suivantes, toutes contenues dans le catalogue de l'»Astronomische Gesellschaft« (zone de l'Observatoire de Lund):

$$a = BD + 37^{\circ}4115$$

$$b = BD + 36^{\circ}4340$$

$$c = BD + 37^{\circ}4128$$

$$d = BD + 37^{\circ}4130$$

¹⁾ Voir Observatory, T. XXII, N:o 284.

²⁾ Dans une note récemment insérée aux Astr. Nachr. j'ai déjà exposé la même chose. Cependant, j'ai fait quelques mesures ultérieures qui n'ont point changé les résultats en général, mais qui ont modifié légèrement quelques chiffres.

$$e = BD + 37^{\circ}4133$$

$$f = BD + 37^{\circ}4141.$$

Elles sont toutes de la 8^{me} à 9^{me} grandeur.

Les mesures ont été faites à l'aide du microscope à deux vis micrométriques de l'appareil de mesure, de la manière que la position de chaque image d'étoile a été déterminée relativement au trait précédant et au trait suivant du réseau, dans les deux directions des coordonnées rectangulaires.

Chaque étoile ayant été mesurée par rapport aux mêmes traits sur tous les clichés, l'influence des erreurs du réseau sur la détermination de la parallaxe a été éliminée. Les mesures ont été faites dans deux positions du cliché, de la manière que, le cliché ayant été mesuré dans une position, il fut tourné de 180°, et les mesures ont été répétées dans cette nouvelle position du cliché. Les étoiles de comparaison ont été mesurées deux fois dans chaque position du cliché; l'étoile $BD + 37^{\circ}4131$ a été mesurée quatre fois dans chaque position.

Après avoir corrigé toutes les lectures micrométriques à l'égard des erreurs périodiques et progressives des vis, j'ai formé, dans l'une et dans l'autre direction, la moyenne des lectures pour les deux traits. Cette moyenne étant ainsi la lecture pour le milieu de l'intervalle de réseau, j'ai pris la différence entre elle et la lecture pour l'étoile. Cette différence exprimée en révolutions de la vis a été transformée en fractions de l'intervalle du réseau. Cette transformation a été faite à l'aide de petites tables auxiliaires calculées spécialement pour chaque cliché. J'ai obtenu ainsi les coordonnées rectangulaires des images des étoiles par rapport aux traits du réseau.

En prenant les moyennes des différentes mesures et en y ajoutant les intervalles entiers, j'ai obtenu enfin, pour chacune des 3 à 5 poses sur le cliché, une détermination des coordonnées rectangulaires des 6 étoiles de comparaison par rapport à l'étoile $BD + 37^{\circ}4131$, située au centre du cliché. Ces coordonnées sont exprimées par l'intervalle du réseau (= 5 mm.) comme unité.

Comme toutes les plaques ont été exposées dans la même position du réfracteur, l'influence de la distorsion du champ de l'objectif est éliminée.

Les corrections de réfraction δx , δy ont été calculées d'après les suivantes formules:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} m = \cot \varphi \cos \tau_0 \\ \cot n = \sin m \operatorname{tg} \tau_0 \\ \cos n' = \sin n \cos (\delta_0 + m) \\ \cos \Theta_0 = \sin n \sin (\delta_0 + m) \\ k = 1,01539 \cdot \frac{x_0 \sin 1''}{\cos^2 \Theta_0} \\ R_1 = k \cdot \sin^2 n' \\ R_2 = k \cdot \cos n' \cos n \\ R_3 = k \cdot \sin^2 n \\ \delta x = R_1 x + R_2 y \\ \delta y = R_2 x + R_3 y \end{array} \right.$$

Dans ces formules, φ désigne la latitude de l'Observatoire, τ_0 , δ_0 l'angle horaire et la déclinaison du centre du cliché, à l'instant de l'exposition, x_0 le coefficient de réfraction, calculé à l'aide des tables de BESSEL. La quantité 1,01539 est le facteur de réduction déterminé par M. WILSING.¹⁾ — Les termes d'ordres supérieurs de la réfraction différentielle sont tout à fait à négliger pour tous les clichés. — La détermination des corrections pour l'aberration différentielle est renfermée dans la détermination de la valeur de l'échelle du cliché.

Les corrections de réfraction ayant été appliquées, j'ai formé, pour chaque cliché, les moyennes des 3 à 5 déterminations différentes des coordonnées rectangulaires, correspondantes aux 3 à 5 expositions différentes.

Pour réduire tous les clichés à la même échelle et aux mêmes axes de coordonnées, je me suis servi d'un procédé analogue à celui que j'ai employé à la détermination des parallaxes

¹⁾ WILSING, Bestimmung der atmosphärischen Refraction für die photographisch wirksamen Strahlen (Astr. Nachr., Bd 145, N:o 3474, 1898).

et de A.-Oe. 11677.¹⁾ Des observations méridiennes observatoire de Lund²⁾ j'ai tiré les positions, pour moyen de 1875,0, des étoiles de comparaison. Ayant positions à l'équinoxe moyen de 1900,0 j'ai calculé les rectangulaires des étoiles de comparaison à l'aide les:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} N = \cot \delta \cos (\alpha - \alpha_0) \\ \bar{\xi} = \frac{\operatorname{tg} (\alpha - \alpha_0) \sin N}{\sin (\delta_0 + N)} \\ \bar{\eta} = \cot (\delta_0 + N). \end{cases}$$

pour position approximative de l'origine des coordonnées δ_0) la position de $BD + 37^{\circ}4131$, tirée des observations et réduite à l'équinoxe moyen de 1900,0. Pour position de $BD + 37^{\circ}4131$ de la détermination des réduction des clichés, j'ai formé les différences des $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ pour les différentes étoiles, prises deux à deux, et les quantités σ_1 , σ_2 , σ_3 , p_1 , p_2 , p_3 d'après les suivantes:

$$\begin{cases} \sigma_1 \cos p_1 = \bar{\xi}_e - \bar{\xi}_a, \\ \sigma_1 \sin p_1 = \bar{\eta}_e - \bar{\eta}_a; \\ \sigma_2 \cos p_2 = \bar{\xi}_d - \bar{\xi}_b, \\ \sigma_2 \sin p_2 = \bar{\eta}_d - \bar{\eta}_b; \\ \sigma_3 \cos p_3 = \bar{\xi}_f - \bar{\xi}_c, \\ \sigma_3 \sin p_3 = \bar{\eta}_f - \bar{\eta}_c. \end{cases}$$

les quantités s_1 , s_2 , s_3 , q_1 , q_2 , q_3 ont été calculées cliché:

$$\begin{cases} s_1 \cos q_1 = x_e - x_a, \\ s_1 \sin q_1 = y_e - y_a; \\ s_2 \cos q_2 = x_d - x_b, \\ s_2 \sin q_2 = y_d - y_b; \end{cases}$$

BERGSTRAND, Recherches sur l'emploi de la photographie stéréométrique pour la détermination des parallaxes des étoiles fixes (Upsala 1899).
et ENGSTRÖM, Observations des étoiles de la zone entre 35° et 40° boréale, faites à l'Observatoire de Lund et réduites à l'équinoxe 1900,0, T. III, Lund 1900.

$$\begin{cases} s_3 \cos q_3 = x_f - x_c, \\ s_3 \sin q_3 = y_f - y_c, \end{cases}$$

$x_a, x_b, \dots, y_a, y_b, \dots$ étant les coordonnées rectangulaires mesurées (corrigées pour la réfraction). Ainsi on aura, pour chaque cliché, ces trois déterminations de la distance focale L et de l'angle d'orientation ψ :

$$\begin{cases} L_1 = \frac{s_1}{\sigma_2}; \psi_1 = q_1 - p_1 \\ L_2 = \frac{s_2}{\sigma_2}; \psi_2 = q_2 - p_2 \\ L_3 = \frac{s_3}{\sigma_3}; \psi_3 = q_3 - p_3. \end{cases}$$

Enfin, j'ai pris comme valeurs définitives de L et de ψ :

$$\begin{cases} L = \frac{1}{3}(L_1 + L_2 + L_3) \\ \psi = \frac{1}{3}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3). \end{cases}$$

Dans les valeurs de L et de ψ , l'influence de l'aberration, de la précession et de la nutation différentielles est aussi comprise. Il faut remarquer qu'il n'est pas nécessaire de déterminer les valeurs de L et de ψ avec la plus grande exactitude; en effet, il suffit qu'on les détermine de sorte que tous les clichés soient réduits à la même échelle et au même système de coordonnées. Une petite erreur qui est constante pour tous les clichés n'aura pas d'influence sur la détermination de la parallaxe.

Si l'on calcule, pour chaque cliché,

$$\begin{cases} C = \frac{\cos \psi}{L} \\ S = \frac{\sin \psi}{L}, \end{cases}$$

on aura les coordonnées rectangulaires définitives ξ, η d'après ces formules:

$$\begin{cases} \xi = C \cdot x + S \cdot y \\ \eta = C \cdot y - S \cdot x. \end{cases}$$

données sont exprimées par la distance focale comme

aux mouvements propres, j'ai trouvé, en comparant les observations méridiennes, faites en diverses époques, qu'il est fait à négliger, autant pour $BD + 37^{\circ}4131$ que pour les étoiles de comparaison. Les résultats de mes mesures ont complètement confirmé ce fait.

Les équations de condition ont été formées d'après ces

$$e = \Pi \cdot \pi + (\xi - \xi_0) = 0$$

$$e' = \Pi' \cdot \pi + (\eta - \eta_0) = 0,$$

où ξ_0, η_0 , les valeurs moyennes des coordonnées ξ, η , et e, e' , les corrections des valeurs ξ_0, η_0 . Eu égard à l'espace de temps que comprennent les observations, je considère ξ, η comme inconnus, les corrections e, e' comme mouvement propre, qui est tout à fait insensible. Les parallaxes Π, Π' ont été calculés d'après les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} M = \cot D \cdot \cos (A - \alpha_0) \\ \operatorname{tg} N = \sin M \cdot \operatorname{tg} (A - \alpha_0); \\ \quad - 90^\circ < M < + 90^\circ \\ \left. \begin{array}{l} \sin N < 0, \text{ si } 0^\circ < A - \alpha_0 < 180^\circ \\ \sin N > 0, \text{ si } 180^\circ < A - \alpha_0 < 360^\circ \end{array} \right\} \\ \Pi = \varrho \cdot \sin N \\ \Pi' = \varrho \cdot \cos N \cdot \cos (\delta_0 + M), \end{array} \right.$$

où α_0 est l'ascension droite et la déclinaison du Soleil, ϱ la distance du centre du cliché, et ϱ la distance de la Terre au Soleil, δ_0 l'arc du demi-grand axe de l'orbite de la Terre comme

pour chaque étoile de comparaison, j'ai obtenu ainsi deux équations. J'ai traité ces équations d'après la méthode des moindres carrés, et j'ai trouvé ainsi les valeurs des parallaxes, exprimées en secondes d'arc:

Étoile de com- paraison	Parallaxe de l'étoile $BD + 37^{\circ}4131$
<i>a</i>	$\pi = + 0'',05 \pm 0'',022$
<i>b</i>	$+ 0,02 \pm 0,016$
<i>c</i>	$+ 0,03 \pm 0,013$
<i>d</i>	$+ 0,09 \pm 0,023$
<i>e</i>	$0,00 \pm 0,029$
<i>f</i>	$+ 0,06 \pm 0,019$

Si l'on admet que les parallaxes des étoiles de comparaison soient nulles, on aura la suivante valeur définitive de la *parallaxe de l'étoile* $BD + 37^{\circ}4131$:

$$\pi = + 0'',0396 \pm 0'',0076$$

ou, en nombre rond,

$$\pi = + 0'',04 \pm 0'',008.$$

L'erreur probable d'une équation de condition, c'est-à-dire l'erreur probable d'une coordonnée rectangulaire relative d'une étoile sur un cliché, est en moyenne

$$\varepsilon = \pm 0'',07,$$

aussi bien pour les coordonnées ξ que pour les coordonnées η . —

Soit qu'on veuille attribuer à la petite valeur trouvée de la parallaxe un sens réel, ou non, le résultat est tout de même contradictoire à celui de M. SCHUR. Cependant, les six étoiles de comparaison donnent des valeurs qui sont toutes comprises entre $0'',0$ et $0'',1$; et ayant égard à ce bon accord des différentes déterminations, je crois avoir démontré avec certitude que la parallaxe de l'étoile $BD + 37^{\circ}4131$ est très petite ou nulle, et que les variations des mesures héliométriques de M. SCHUR ne peuvent pas avoir été causées par une grande parallaxe de cette étoile. Sans doute ces variations doivent s'expliquer autrement; cependant pour ma part, je n'ose pas essayer d'en proposer une explication satisfaisante.

Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre et sur la généralisation du problème de Dirichlet.

Par ERIK HOLMGREN.

(Communiqué le 12 Juin 1901 par E. PHRAGMÉN.)

I.

Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \Delta u = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right)$$

où $F(u, v, w, x, y)$ est une fonction continue admettant des dérivées partielles du premier ordre continues dans un domaine T défini par les inégalités $|u - u_0|, |v - v_0|, |w - w_0|, |x - x_0|, |y - y_0| < a$.

Prenons dans le plan xy dans T un contour simple régulièrement analytique γ enfermant le domaine Γ . Supposons qu'il existe une intégrale de (1) u_1 continue ainsi que les dérivées des deux premiers ordres dans $(\gamma + \Gamma)^1$ et que $u_1, v_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, w_1 = \frac{\partial u_1}{\partial y}$ considérées comme valeurs des variables u, v, w sont situées dans T .

¹⁾ Nous désignons par $(\gamma + \Gamma)$ le domaine Γ contour (γ) compris.

Nous allons démontrer qu'il ne peut exister une autre intégrale u_2 assujettée aux mêmes conditions que u_1 (c. à d. continue ainsi que les dérivées des deux premiers ordres et limitée de la dite manière dans T) prenant les mêmes valeurs sur γ , pourvu que la longueur de γ soit suffisamment petite. Si F ne contient pas $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ toutes les suppositions faites sur les dérivées de u_2 sont inutiles.¹⁾

On trouve immédiatement que la différence $u = u_1 - u_2$ vérifie l'équation

$$(2) \quad \Delta u = F\left(u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, x, y\right) - F\left(u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, x, y\right)$$

et s'annule sur γ .

Pour tirer des conclusions sur u et ses dérivées nous nous servirons du théorème suivant.²⁾

Si dans Γ la fonction $f(x, y)$ ainsi que ses dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues et dans $(\gamma + \Gamma)$ $|f(x, y)| < F$, l'intégrale u de l'équation

$$\Delta u = f(x, y)$$

s'annulant sur γ , est déterminée par la formule

$$(3) \quad u = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

où $G(x, y, \xi, \eta)$ est la fonction de GREEN correspondante au domaine Γ et au point x, y . Cette intégrale admet des dérivées premières continues dans $(\gamma + \Gamma)$ et les inégalités

$$(4) \quad |u|, \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| < \lambda F$$

¹⁾ Notre démonstration est sans modification essentielle applicable dans le cas où la longueur de γ est arbitraire, supposé que la surface enfermée Γ soit suffisamment petite (c. f.: PICARD, Journal de math. 1896). — Si F est linéaire dans u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ on voit immédiatement qu'une limitation de u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ est inutile.

²⁾ Voir: PICARD, Journal de math. 1900. c. f. aussi PARAF, Thèse, Paris 1892 p. 34.

sont vérifiées, où λ est une constante dépendant seulement du contour γ et tendant vers zéro quand la longueur de γ devient infiniment petite.

Appliquons ce théorème à l'équation (2). Nous aurons ici à remplacer $f(x, y)$ par

$$F\left(u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, x, y\right) - F\left(u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, x, y\right).^1)$$

Pour avoir une limite supérieure de

$$\left| F\left(u_1, \frac{\partial u_1}{\partial \xi}, \frac{\partial u_1}{\partial \eta}, \xi, \eta\right) - F\left(u_2, \frac{\partial u_2}{\partial \xi}, \frac{\partial u_2}{\partial \eta}, \xi, \eta\right) \right|$$

nous nous servirons de l'inégalité

$$\begin{aligned} & |F(u', v', w', x, y) - F(u'', v'', w'', x, y)| < \\ & < k(|u' - u''| + |v' - v''| + |w' - w''|) \end{aligned}$$

où k est une constante, qui est vérifiée quand (u', v', w', x, y) et (u'', v'', w'', x, y) appartiennent au domaine T . Soient μ, μ', μ'' les maxima absolus de $|u|$, $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ dans $(\gamma + \Gamma)$. Nous aurons donc

$$\left| F\left(u_1, \frac{\partial u_1}{\partial \xi}, \frac{\partial u_1}{\partial \eta}, \xi, \eta\right) - F\left(u_2, \frac{\partial u_2}{\partial \xi}, \frac{\partial u_2}{\partial \eta}, \xi, \eta\right) \right| < k(\mu + \mu' + \mu'').$$

Les inégalités (4) nous donnent maintenant

$$\begin{aligned} \mu &< \lambda k(\mu + \mu' + \mu'') \\ \mu' &< \lambda k(\mu + \mu' + \mu'') \\ \mu'' &< \lambda k(\mu + \mu' + \mu'').^2) \end{aligned}$$

Supposons que la longueur de γ soit assez petite pour que $\lambda k < \frac{1}{3}$. Les inégalités donnent donc par addition la contradiction

$$\mu + \mu' + \mu'' < \mu + \mu' + \mu''.$$

De là résulte que $u_1 \equiv u_2$. Le théorème énoncé est ainsi démontré.

¹⁾ Si F ne contient pas $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ l'existence et la continuité des dérivées premières de $F(u_1) - F(u_2)$ se démontre par la formule (3).

²⁾ Si F ne contient pas $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, nous n'avons besoin que de la première des inégalités.

II.

Dans ce paragraphe nous allons établir un théorème sur la convergence uniforme des séries, qui est d'une certaine importance dans diverses questions de convergence dans la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles. (Dans le n° III nous en donnons une application simple).

Considérons la série

$$(1) \quad f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

où les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... sont continues dans l'intervalle $a \leq x \leq b$ et admettent des dérivées jusqu'à l'ordre n inclus.

Nous supposons que cette série converge en tous les points rationnels de ce domaine et de plus qu'il existe un nombre G indépendant de x tel que

$$(2) \quad |f_1^{(n)}(x) + f_2^{(n)}(x) + \dots + f_r^{(n)}(x)| < G$$

pour chaque valeur de l'indice r .

Cela posé les séries

$$(3) \quad f_1^{(k)}(x) + f_2^{(k)}(x) + \dots + f_n^{(k)}(x) + \dots [f_n^{(0)}(x) = f_n(x)]$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ sont uniformément convergentes dans l'intervalle $(a \dots b)$.¹⁾

Nous démontrons d'abord ce théorème dans le cas de $n=1$.²⁾ A cette fin divisons l'intervalle $(a \dots b)$ par des points rationnels x_2, x_3, \dots, x_{r-1} ($x_1=a, x_r=b$) en parties plus petites que $\frac{\sigma}{4G}$, où σ est un nombre positif aussi petit que l'on veut.

La série (1) étant convergent en tous les points rationnels, nous pouvons trouver un nombre entier positif N de sorte que

$$(4) \quad \left| \sum_{\nu=i}^{s+p} f_\nu(x_i) \right| < \frac{\sigma}{2}$$

($i = 1, 2, \dots, r$),

quand $s > N$ et $p = 1, 2, 3, \dots$

¹⁾ Ce théorème est donné par M. E. LINDELÖF comme une généralisation d'un théorème de M. BENDIXSON. (Bulletin des sciences math. 1901). Son démonstration diffère de celle donnée dans la texte.

²⁾ Le théorème de M. BENDIXSON. (Svenska Vet. Akad. Öfversigt 1898).

un point arbitraire dans $(a \dots b)$. D'après le théorème de la moyenne on a si

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

$$f_p(x_i) + (x - x_i) \sum_{\nu=i}^{s+p} f'_\nu(x_i + \theta(x - x_i)), \quad 0 < \theta \leq 1$$

il résulte à cause des inégalités

$$\left| \sum_{\nu=1}^{s+p} f'_\nu(x) - \sum_{\nu=1}^{s-1} f'_\nu(x) \right| < 2G, \quad x - x_i < \frac{\sigma}{4G} \text{ et (4)}$$

$$\left| \sum_{\nu=i}^{s+p} f'_\nu(x) \right| < \sigma,$$

, $p = 1, 2, 3, \dots$

le point x dans l'intervalle $(a \dots b)$.

l'approximation uniforme de (1) est ainsi établie.

Passons maintenant le cas général. Faisons d'abord des séries (3) convergent en chaque point rationnel de $(a \dots b)$.

En un point arbitraire rationnel dans $(a \dots b)$, $x + h_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $n-1$ autres points rationnels dans le même intervalle, en appliquant la formule de TAYLOR à la fonction

on aura

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=i}^{s+p} f_\nu(x + h_i) - \sum_{\nu=i}^{s+p} f_\nu(x) &= \frac{h_i}{1} \sum_{\nu=i}^{s+p} f'_\nu(x) + \\ &+ \dots + \frac{h_i^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\nu=i}^{s+p} f^{(n-1)}_\nu(x) + \frac{h_i^n}{n!} \sum_{\nu=i}^{s+p} f^{(n)}_\nu(x + \theta h_i), \quad |\theta| < 1 \\ (i = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Pour abréger

$$\sum_{\nu=i}^{s+p} f^{(k)}_\nu(x), \quad B_i = \sum_{\nu=i}^{s+p} f_\nu(x + h_i) - \sum_{\nu=i}^{s+p} f_\nu(x),$$

$$C_i = \frac{1}{n!} \sum_{\nu=i}^{s+p} f^{(n)}_\nu(x + \theta h_i)$$

le système par rapport à A_1, A_2, \dots, A_{n-1} .

Nous trouvons ainsi

$$A_k = \frac{A_k}{A} \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

où

$$A_k = \begin{vmatrix} h_1, & \dots, & h_1^{k-1}, & B_1 & -h_1^n & C_1, & h_1^{k+1}, & \dots, & h_1^{n-1} \\ h_2, & \dots, & h_2^{k-1}, & B_2 & -h_2^n & C_2, & h_2^{k+1}, & \dots, & h_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-1}, & \dots, & h_{n-1}^{k-1}, & B_{n-1} & -h_{n-1}^n & C_{n-1}, & h_{n-1}^{k+1}, & \dots, & h_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} h_1, & h_1^2, & \dots, & h_1^{n-1} \\ h_2, & h_2^2, & \dots, & h_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-1}, & h_{n-1}^2, & \dots, & h_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Supposons maintenant que $h_i = ih$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

l'expression pour $\sum_{\nu=s}^{s+p} f_{\nu}^{(k)}(x)$ se réduit alors à

$$\sum_{\nu=s}^{s+p} f_{\nu}^{(k)}(x) = k! A_k = h^{-k} \{ \alpha_1^{(k)} B_1 + \alpha_2^{(k)} B_2 + \dots + \alpha_{n-1}^{(k)} B_{n-1} \} \\ + h^{n-k} \{ \beta_1^{(k)} C_1 + \beta_2^{(k)} C_2 + \dots + \beta_{n-1}^{(k)} C_{n-1} \},$$

où $\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_{n-1}^{(k)}, \beta_1^{(k)}, \dots, \beta_{n-1}^{(k)}$ sont des constantes (finies par ce que $A \neq 0$) qui ne dépendent que de k . Il résulte de l'inégalité $|C_i| < \frac{2G}{n!}$, qu'on peut donner à h une valeur assez petite pour que

$$|h^{n-k} \{ \beta_1^{(k)} C_1 + \beta_2^{(k)} C_2 + \dots + \beta_{n-1}^{(k)} C_{n-1} \}| < \frac{\sigma}{2} \text{ si } s > N$$

quels que soient les nombres p, k ; à cause de la convergence de la série (1) aux points rationnels, on peut trouver un nombre positif entier N , de sorte que pour chaque valeur de p et k

$$|h^{-k} \{ \alpha_1^{(k)} B_1 + \alpha_2^{(k)} B_2 + \dots + \alpha_{n-1}^{(k)} B_{n-1} \}| < \frac{\sigma}{2}$$

V. Par suite

$$\left| f_p^{(k)}(x) \right| < \sigma, \text{ pour } s \geq N \text{ et } p = 1, 2, 3, \dots$$

La convergence des séries (3) au point rationnel arbitraire x est

La convergence uniforme se démontre par l'application successive du théorème dans le cas déjà démontré ($n=1$). D'abord on applique par cette application pour la dernière des séries (3); on conclut pour la série précédente en se rappelant, qu'il existe un nombre G' tel que $|f_1^{(n-1)}(x) + \dots + f_r^{(n-1)}(x)| < G'$ pour toutes les valeurs de r et x . En continuant cette procédure on démontre la convergence uniforme de toutes les

Le théorème énoncé et son démonstration s'étendent facilement au cas de plusieurs variables.

Le cas de deux variables, il prend la forme suivante:
On suppose que la série

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) + \dots + f_r(x, y) + \dots$$

..., $f_r(x, y)$, ... sont des fonctions continues dans

le domaine $a \leq x \leq b$ admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n

et convergente pour chaque système de valeurs rationnelles de x et y et de plus qu'il existe un nombre G tel que pour tout r on ait

$$\left| \frac{f_r(x, y)}{r!} + \frac{\partial^{i+k} f_2(x, y)}{\partial x^i \partial y^k} + \dots + \frac{\partial^{i+k} f_r(x, y)}{\partial x^i \partial y^k} \right| < G,$$

où $i+k = n$, quels que soient x et y .

On suppose

$$\left| \frac{f_r(x, y)}{r!} + \frac{\partial^{i+k} f_2(x, y)}{\partial x^i \partial y^k} + \dots + \frac{\partial^{i+k} f_r(x, y)}{\partial x^i \partial y^k} + \dots \right|$$

$$i + k = n - 1$$

converge uniformément dans le domaine $a \leq x \leq b$.

III.

Soit donnée l'équation

$$(1) \quad \Delta u = F(u, x, y),$$

où F est une fonction positive continue, croissante en même temps que u et admettant des dérivées premières continues. M. PICARD a appliqué la méthode des approximations successives à cette équation.¹⁾ Nous allons ajouter une remarque à l'analyse de M. PICARD. A cette fin reprenons-la succinctement.

Soit γ un contour fermé simple régulièrement analytique renfermant le domaine Γ .

Considérons le système

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= F(0, x, y) \\ \Delta u_2 &= F(u_1, x, y) \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta u_n &= F(u_{n-1}, x, y) \end{aligned}$$

et intégrons successivement les équations avec la valeur nulle sur le contour γ (on peut aussi prendre des valeurs arbitraires continues sur γ).

La formule (3) p. 438 nous donne

$$(2) \quad u_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \int_{\gamma} F(u_{n-1}, \xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

De cette formule on conclut facilement en se rappelant les hypothèses faites sur F que

$$\begin{aligned} u_1 &< u_3 < u_5 < \dots < u_{2n-1} < \dots \\ u_2 &> u_4 > u_6 > \dots > u_{2n} > \dots \end{aligned}$$

et $u_{2n-1} < u_{2n}$. Ainsi les u à indices impair ont une limite u , les u à indices pair une autre limite v . Entre ces limites existe la relation

$$u \leq v.$$

¹⁾ Journal de mathématiques 1890, Bulletin de la société math. 1900.

Si l'on peut démontrer que u et v sont des fonctions continues, il s'ensuit que u et v sont nuls sur le contour et satisfont au système

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta u = F(v, x, y) \\ \Delta v = F(u, x, y). \end{cases}$$

M. PICARD a donné la démonstration de la continuité de u et v dans un cas spécial. La remarque que nous voulions faire est qu'une démonstration générale peut se déduire comme une conséquence immédiate du théorème dans la fin du numéro précédent.

En effet de l'équation (2) on conclut (voir p. 438) parce que $|F(u_{n-1}, \xi, \eta)| < G$ où G est une constante finie

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| < M, \quad \left| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right| < M$$

dans $(\gamma + \Gamma)$, M étant une constante finie indépendant de n . D'après le théorème cité les deux séries

$$\begin{aligned} u &= u_1 + (u_3 - u_1) + \dots + (u_{2n+1} - u_{2n-1}) + \dots \\ v &= u_2 + (u_4 - u_2) + \dots + (u_{2n} - u_{2n-2}) + \dots \end{aligned}$$

convergent donc uniformément dans $(\gamma + \Gamma)$. Leurs sommes u et v sont ainsi des fonctions continues dans $(\gamma + \Gamma)$.

Les formules (3) donnent maintenant

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi} \int \int_{\Gamma} F(v, \xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \\ v &= -\frac{1}{2\pi} \int \int_{\Gamma} F(u, \xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que u et v satisfont au système (5).

IV.

Nous allons examiner l'équation

$$(1) \quad \Delta u = F(u, x, y)$$

dans le cas où $F(u, x, y)$ est une fonction analytique de u, x, y . Nous ferons voir que dans ce cas *toutes les intégrales de (1), qui sont continues ainsi que les dérivées des deux premiers ordres sont analytiques.*

Soit u une intégrale arbitraire de (1), qui est continue dans un certain domaine ainsi que les dérivées des deux premiers ordres. Dans ce domaine décrivons autour d'un point arbitrairement choisi — que nous prenons comme origine — un cercle Γ de rayon aussi petit que l'on veut. Sur ce cercle la fonction u prend des valeurs, qui définissent une fonction continue de l'arc admettant des dérivées continues des deux premiers ordres. Par la méthode appliquée par M. PICARD aux équations linéaires ¹⁾ nous allons former une intégrale analytique de (1) qui prend ces valeurs sur le cercle. Le théorème du § I fait voir que cette intégrale coïncide nécessairement avec u (si Γ est choisi suffisamment petit). Alors il est démontré que la fonction u est analytique.

Nous citons d'abord quelques théorèmes connus sur les séries trigonométriques, dont nous avons besoin pour ce qui suit.

Soit

$$(2) \quad f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{0n} x^n + a_{1n-1} x^{n-1} y + \dots + a_{n0} y^n)$$

une série de puissances, qui converge quand $|x|, |y| < P$. Considérons des valeurs réelles des variables et posons

$x = r \cos \vartheta, y = r \sin \vartheta$. Nous aurons donc

$$(3) \quad f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_{0n} \cos^n \vartheta + a_{1n-1} \cos^{n-1} \vartheta \sin \vartheta + \dots + a_{n0} \sin^n \vartheta).$$

¹⁾ Journal de l'école polyt. 1890; voir aussi PICARD, Comptes rendus 1900 et PARAF, l. c. p. 72.

En développant l'expression dans la parenthèse en une série trigonométrique finie nous aurons

$$\begin{aligned} a_{0n} \cos^n \vartheta + a_{1n-1} \cos^{n-1} \vartheta \sin \vartheta + \dots + a_{n0} \sin^n \vartheta = \\ = \frac{b_0^{(n)}}{2} + \sum_{m=1}^n \{b_m^{(n)} \cos m\vartheta + c_m^{(n)} \sin m\vartheta\} \\ b_m^{(n)} = \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^n a_{r, n-r} \int_0^{2\pi} \cos^{n-r} \vartheta \sin^r \vartheta \cos m\vartheta d\vartheta \\ c_m^{(n)} = \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^n a_{r, n-r} \int_0^{2\pi} \cos^{n-r} \vartheta \sin^r \vartheta \sin m\vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

La valeur de $b_m^{(n)}$ et $c_m^{(n)}$ est nulle lorsque m est impair.¹⁾

En substituant ces expressions pour les coefficients b, c dans (2) et groupant les termes nous aurons une série de la forme

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (P_n \cos n\vartheta + Q_n \sin n\vartheta)$$

où

$$\begin{aligned} P_n &= p_{n,0} r^n + p_{n,1} r^{n+2} + \dots + p_{n,\nu} r^{n+2\nu} + \dots \\ Q_n &= q_{n,0} r^n + q_{n,1} r^{n+2} + \dots + q_{n,\nu} r^{n+2\nu} + \dots \end{aligned}$$

Nous disons qu'une série de la forme (4) est absolument convergente lorsque $r \leq R$, si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{\bar{P}_n + \bar{Q}_n\}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{P}_n &= |p_{n,0}| R^n + |p_{n,1}| R^{n+2} + \dots + |p_{n,\nu}| R^{n+2\nu} + \dots \\ \bar{Q}_n &= |q_{n,0}| R^n + |q_{n,1}| R^{n+2} + \dots + |q_{n,\nu}| R^{n+2\nu} + \dots \end{aligned}$$

est convergente.

Pour abrégé nous désignons dans ce qui suit par $[f]_R$ (ou \mathcal{J}) la série $\sum_{n=0}^{\infty} \{\bar{P}_n + \bar{Q}_n\}$ correspondant à la fonction f , représentée par la série (4).

¹⁾ C. f. PARAF p. 73.

Nous allons démontrer maintenant que la série (4) est absolument convergente quand $r < P$, d'où il suit qu'elle représente $f(x, y)$ parce que le passage de (3) à (4) est justifié.

Nous avons

$$|b_m^{(n)}|, |c_m^{(n)}| < 2 \sum_{p=0}^n |a_{r, n-p}|$$

et ainsi

$$(5) \quad [f]_r < |a_{0,0}| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n (2n+3) \sum_{r=0}^n |a_{r, n-r}|.$$

La série (4) est donc absolument convergente quand $r < P$. Remarquons qu'il résulte de l'inégalité (5) que l'on a

$$(6) \quad [f]_{P/6} < \sum_{n=0}^{\infty} (|a_{0n}| |x|^n + |a_{1n-1}| |x|^{n-1} |y| + \dots + |a_{nn}| |y|^n)$$

où $|x| = |y| = P - \sigma$, σ étant suffisamment petite.

Chaque série de puissances (2) peut ainsi s'écrire sous la forme (4).

Inversement chaque série absolument convergente de la forme (4) peut s'écrire comme une série de puissances.

En effet on peut arranger les termes de (4) de façon à rendre identique à une telle série.¹⁾

Dans la suite nous devons considérer les développements en série trigonométrique des fonctions

$$\begin{aligned} F(x, y, u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x, y) u^n = \sum_{l, m, n} b_{l, m, n} x^l y^m u^n \\ F_1(x, y, u, v) &= \frac{F(x, y, u) - F(x, y, v)}{u - v} = \sum_{m, n} \beta_{m, n} u^m v^n \\ &= \sum_{l, m, n, r} c_{l, m, n, r} x^l y^m u^n v^r \end{aligned}$$

où les séries de puissances sont convergentes quand $|x|, |y|, |u|, |v| < P$, quelles que soient les valeurs de u et v . (Pour simplifier

¹⁾ c. f. PARAF p. 73.

faisons cette dernière hypothèse). Les u et v sont ici supposées être des fonctions de x et y , développables en séries absolument convergentes de la forme (4) dans le domaine $r \leq R$, où $R < \frac{\varrho}{6}$.

Il est maintenant facile de voir que F et F_1 , sont développables en séries de la forme (4) absolument convergentes dans le cercle $r \leq R$. Il suffit d'observer que le produit de deux séries absolument convergentes de la forme (4) f_1 et f_2 est une série absolument convergente de la forme (4) et que $[f_1 f_2]_R < [f_1]_R [f_2]_R$.¹⁾

Alors nous trouvons facilement (en appliquant la formule (6)) que

$$(7) \quad [F(u, x, y)]_R < \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n(x, y)] [u]^n < \sum_{l, m, n} |\gamma_{l, m, n}| \varrho^{l+m} [u]^n$$

et

$$(8) \quad [F_1(u, v, x, y)]_R < \sum_{m, n=0}^{\infty} [\beta_{m, n}(x, y)] [u]^m [v]^n < \sum_{l, m, n, r} |c_{l, m, n, r}| \varrho^{l+m} [u]^n [v]^r.$$

Citons maintenant le lemme de M. PICARD sur lequel repose la méthode de M. PICARD.²⁾

Considérons l'équation différentielle

$$\Delta u = f(x, y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta)$$

où la série est de la forme (4) absolument convergente dans le cercle $r \leq R$. L'intégrale de cette équation s'annulant sur le cercle de rayon $r = R$, est une série absolument convergente de la forme (4)

$$u = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta).$$

Nous aurons en désignant par $\bar{\alpha}_n$, \bar{a}_n , $\bar{\beta}_n$, \bar{b}_n , la somme des modules des termes des séries de puissances, α_n , a_n , b_n , β_n pour $r = R$

¹⁾ c. f. PARAF p. 63. Après la multiplication des séries nous faisons application de la formule $\cos m\vartheta \cos n\vartheta = \frac{1}{2} \cos (m+n)\vartheta + \frac{1}{2} \cos (m-n)\vartheta$ et des formules analogues.

²⁾ Journal de l'école polyt. I. c.

$$\sum_{l, m, n} |b_{l, m, n}| q^{l+m} (2\mu)^n = M$$

$$\sum_{l, m, n, r} |c_{lmnr}| q^{l+m} (2\mu)^{n+r} = G.$$

avons d'après (7)

$$[F(u_0, x, y)]_R < M$$

appliquant la formule (12)

$$[v_1]_R < \lambda RM.$$

supposons maintenant que $[u_1] < 2\mu$, il suit que

$$[u_0, x, y]_R < [v_1]_R [F_1(u_1, u_0, x, y)]_R < \lambda RMG$$

(2)

$$[v_2]_R < (\lambda RG)^2 \frac{M}{G}.$$

Édant de la même manière nous trouvons successive-

$n = 3, 4, \dots$ la formule

$$[v_n]_R < (\lambda RG)^{n-1} \frac{M}{G}$$

hèse $[u_1], [u_2], \dots, [u_{n-1}] < 2\mu$. Cette hypothèse

si nous prenons R si petit que

$$\frac{M}{G} + (\lambda RG)^2 \frac{M}{G} + \dots + (\lambda RG)^{n-1} \frac{M}{G} + \dots < 2\mu$$

en appliquant successivement pour $n = 2, 3, \dots$ la

$$[u_n]_R < [u_0] + [v_1] + \dots + [v_n].$$

ons ainsi

$$[u_0]_R + [v_1]_R + \dots + [v_n]_R + \dots < 2\mu$$

n nombre indépendant de R , si R ne dépasse pas

limite.

$$U = u_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

vergente et peut se mettre sous la forme d'une

ment convergente de la forme (5) dans le cercle de

La fonction U est ainsi une fonction analytique. Elle prend sur la périphérie de Γ les mêmes valeurs que u , et satisfait à (1) comme il suit par différentiation ¹⁾ de la formule facilement établi

$$U - u_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} F(U, \xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

D'après ce qui précède U jouit de la propriété $|u| < 2\mu$ où μ est indépendant de R si R est au-dessous d'une certaine limite. Pour $|u|$ une telle limitation existe évidemment. Nous sommes maintenant en état d'appliquer le théorème du § I. Si nous prenons R suffisamment petit, les deux fonctions u et U coïncident. u est ainsi une fonction analytique; notre théorème est établi.

V.

Du théorème du n° IV nous allons tirer une conséquence intéressante pour la théorie des surfaces à courbure constante positive, à savoir :

*Toutes les surfaces à courbure constante positive sont analytiques.*²⁾

Supposons que

$$(1) \quad \begin{cases} x = \varphi_1(u, v) \\ y = \varphi_2(u, v) \\ z = \varphi_3(u, v) \end{cases}$$

définissent une surface à courbure constante $+1$ (sans nuire à la généralité, nous pouvons faire dans la démonstration de notre théorème cette dernière supposition) rapportée à ses lignes de courbure. Soit r_1 le rayon de courbure principale correspondant

¹⁾ c. f. p. 438. $\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}$ sont finies et continues dans $(\gamma + I')$.

c. f. LINDBERG, Thèse, Helsingfors 1900 p. 16.

²⁾ M. HILBERT dans son conférence faite au congrès de Paris 1900 dit (§ 19) qu'il considère le théorème comme probable. —

Pour les considérations suivantes voir: BIANCHI, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig 1899.

à la courbe $u = \text{const.}$, r_2 celui correspondant à $v = \text{const.}$ Soit u_0, v_0 (P) un point régulier de la surface c . à d. situé dans un domaine où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont continues ainsi que les dérivées partielles des trois premiers ordres, et $EG - F^2 > 0$, E, F, G étant les coefficients de la première forme fondamentale attachée à la surface. Supposons pour fixer les idées que $r_1 > 1$ (et ainsi $r_2 < 1$, parce que $r_1 r_2 = 1$) en ce point. Soit S un domaine régulier de la surface autour du point P , qui soit assez petit pour que r_1 reste > 1 dans tout ce domaine.

Parce que les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sont les lignes de courbure de la surface nous avons $F = 0$ et les coefficients de la seconde forme fondamentale

$$(2) \quad D = -\frac{E}{r_2}, \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{G}{r_1}$$

Entre les quantités E, G, r_1, r_2 existent les deux relations de CODAZZI

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\sqrt{E}}{r_2} \right) = \frac{1}{r_1} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\sqrt{G}}{r_1} \right) = \frac{1}{r_2} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

et celle de GAUSS

$$(4) \quad r_1 r_2 = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right] = 1.$$

Introduisons la fonction auxiliaire ω , défini par l'égalité

$$(5) \quad r_1 = \frac{e^\omega + e^{-\omega}}{e^\omega - e^{-\omega}}$$

Les équations (3) donnent donc

$$(6) \quad \sqrt{E} = \frac{e^\omega - e^{-\omega}}{2}, \quad \sqrt{G} = \frac{e^\omega + e^{-\omega}}{2}$$

et l'équation (4)

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \frac{e^{-2\omega} - e^{2\omega}}{4}.$$

La fonction ω qui admet nécessairement des dérivées partielles des deux premiers ordres continues dans S satisfait ainsi à une équation du type considéré dans le n° IV. On voit donc que ω est une fonction analytique (régulière dans S).

Les formules (2), (5) et (6) font maintenant voir que les coefficients des deux formes fondamentales E, F, G, D, D', D'' des fonctions analytiques régulières dans S . E et G ne s'annulent pas dans S .

Désignons par

$$(8) \quad \xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2; \xi_3, \eta_3, \zeta_3$$

les cosinus directeurs des directions positives des tangentes aux courbes v et u et de la normale positive à la surface en un point arbitraire. Ces fonctions de u et v sont continues et que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres existent. Les trois systèmes de fonctions $\xi_1, \xi_2, \xi_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3; \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ satisfont au système d'équations aux différentielles totales complètement intégrable

$$d\Omega_1 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \Omega_2 + \frac{D}{\sqrt{E}} \Omega_3 \right\} du + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \Omega_2 dv$$

$$d\Omega_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \Omega_1 du + \left\{ -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \Omega_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}} \Omega_3 \right\} dv$$

$$d\Omega_3 = -\frac{D}{\sqrt{E}} \Omega_1 du - \frac{D''}{\sqrt{G}} \Omega_2 dv,$$

dont tous les coefficients sont réguliers et analytiques. D'après la théorie des systèmes complètement intégrables il existe un et un seul système d'intégrales continues

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$$

se réduisant pour le point $u_0 v_0(P)$ aux valeurs initiales

$$\Omega_1^{(0)}, \Omega_2^{(0)}, \Omega_3^{(0)} \quad . \quad ^1)$$

Les fonctions de ce système sont analytiques et régulières dans un certain domaine entourant le point P . En appliquant ce théorème nous voyons que les fonctions (8) sont des fonctions analytiques régulières dans le domaine du point P .

La surface S , qui est déterminée par les formules

¹⁾ c. f. BIANCHI l. c.

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} \{ \sqrt{E} \xi_1 du + \sqrt{G} \xi_2 dv \} \\
 y &= y_0 + \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} \{ \sqrt{E} \eta_1 du + \sqrt{G} \eta_2 dv \} \\
 z &= z_0 + \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} \{ \sqrt{E} \zeta_1 du + \sqrt{G} \zeta_2 dv \},
 \end{aligned}$$

où x_0, y_0, z_0 désignent les coordonnées du point P est ainsi analytique. Notre théorème est ainsi démontré.

En ce lieu je veux remarquer *l'existence des surfaces à courbure constante négative non analytiques*. Ce fait presque évident peut se démontrer de la manière suivante.

On peut d'abord réduire la question à démontrer l'existence d'intégrales non-analytiques de l'équation

$$(9) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin z.$$

Car supposons qu'il existe une solution non analytique de (9). Considérons l'expression

$$(10) \quad du^2 + 2 \cos z du dv + dv^2.$$

L'on peut trouver une surface S , qui admet (10) comme élément linéaire et sur laquelle $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sont les lignes asymptotiques et z l'angle entre elles au point u, v . En effet on peut déterminer D et D' de manière que les équations de CODAZZI sont vérifiées (l'équation de GAUSS est vérifiée parce que z satisfait à (9)). Cette surface à courbure constante -1 n'est évidemment pas analytique.

Ainsi nous avons donc à établir l'existence d'une intégrale non-analytique de (9).

A cette fin donnons pour $x=0$ une fonction continue ainsi que $\varphi'(y)$, $\varphi''(y)$, $\varphi'''(y)$ dans l'intervalle $0 \leq y \leq a$ mais ayant la dérivée $\varphi^{IV}(y)$ discontinue dans tout intervalle de $(0 \dots a)$ pris aussi petit que l'on veut. Pour $y=0$ donnons une fonction $\psi(x)$ continue

ainsi que $\psi'(x)$, $\psi''(x)$, $\psi'''(x)$ si $0 \leq x \leq b$ ($\varphi(0) = \psi(0)$). M. PICARD a démontré par la méthode des approximations successives l'existence d'une intégrale de (9) continue ainsi que les dérivées des trois premiers ordres dans le rectangle $0 \leq y \leq a$, $0 \leq x \leq b$ et qui se réduit pour $x = 0$ à la fonction $\varphi(y)$ et pour $y = 0$ à la fonction $\psi(x)$.¹⁾ Cette intégrale n'est pas analytique. Supposons en effet qu'elle le soit dans un domaine de Γ . Soit x, y_1 un point de ce domaine et supposons que y_1 soit une valeur pour laquelle $\varphi^{IV}(y)$ est discontinue. La dérivée $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ est donnée par la formule

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \varphi'''(y) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \cos z \frac{\partial z}{\partial y} \right\} dx.$$

Les fonctions $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ et $\int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \cos z \frac{\partial z}{\partial y} \right\} dx$ ont des dérivées continues par rapport à y , mais $\varphi'''(y)$ a par hypothèse une dérivée discontinue au point $y = y_1$. Cette contradiction entraîne que z ne peut pas être analytique au point x, y_1 . Mais de tels points existent dans tout domaine de Γ aussi petit qu'il soit choisi. z ne peut donc être analytique en aucun point de Γ .

¹⁾ Note I dans le quatrième volume de la Théorie des surfaces de M. DARBOUX.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

261. Om Para-Nitrobenzolsulfonsyra.

Af ALFR. EKBOM.

(Meddeladt den 12 Juni 1901 genom P. T. CLEVE.)

Limpricht har i *Annalen der Chemie und Pharmacie* 177.60 redogjort för sina undersökningar öfver salpetersyras inverkan på benzolsulfonsyra och svafvelsyras på nitrobenzol. Han fann därvid, att i bägge fallen tre isomera nitrobenzolsulfonsyror bildades. För att skilja dem från hvarandra öfverförde han kaliumsalterna i klorider och dessa i amider. På så sätt erhöles 95 % metasyra samt 5 % orto- och parasyra. Den sistnämnda syran har han karaktäriserat genom kloriden, amiden samt genom åtskilliga salter. L. anger, att kloriden är flytande, att amiden smälter vid 131°, att kaliumsaltet är vattenfritt m. m.

Att kloriden är flytande är ju rätt egendomligt; redan detta tyder därpå, att materialet ej är rent. För att få visshet härom har jag på samma sätt som L. nitrerat och sulfonerat benzol. Den amidblandning, jag sålunda erhållit, behandlades enligt L:s föreskrifter. På så sätt fick jag en svårlöslig amid med smtpkt 190°—191° C. (L. 188° C.). Moderlutarna till denna innehöllo samtliga syrornas amider. Jag har gjort upprepade försök med olika lösningsmedel och blandningar af lösningsmedel att särskilja dem; blott en blandning af 2 volymer eter och 1 volym alkohol lämnade ibland, då kristallisationen ej stördes, något så när tillfredsställande resultat. Härvid erhöles jag en ringa kvantitet af en amid, som kristalliserade i fjäll, en amid, som kristalliserade antingen i nålar eller i kompakta taflor eller i pyramidiska kristaller, samt en amid, som kristalliserade i prismatiska kristaller. Genom att utplocka de olika kristallerna och genom att

omkristallisera dem ur vatten erhöj jag så af fjällen ortosyrans amid, af nålarna metasyrans amid (smtpt 163° — 164° C.; L. 161° C.). De prismatiska kristallerna åter smälta skarpt vid 177° — 178° C. och böra på grund af hvad som nyss är nämndt tillhöra p-syran.

Å dessa, torkade vid 107° C., gjordes nedanstående analyser:

1) 0.1670 gr. gaf vid förbränning med PbCrO_4 i bajonett-rör 0.0505 gr. H_2O (= 0.005611 gr. väte) samt 0.2197 gr. CO_2 (= 0.059918 gr. C.).

2) 0.1721 gr. gaf 20.8 (cm)³N-gas vid 764.9 mm bar.-tryck samt $20^{\circ}.8$ C.

3) 0.2186 gr. gaf vid förbränning med KOCIO_2 och Na_2CO_3 0.2616 gr. BaSO_4 .

I procent:

	Ber. för $\text{C}_6\text{H}_4\text{NO}_2\text{SO}_2\text{NH}_2$.		Funnet		
			1.	2.	3.
C ₆	72	35.64	35.87	—	—
H ₄	6	2.97	3.35	—	—
N ₂	28	13.86	—	14.19	—
S	32	15.84	—	—	16.43
O ₄	64	31.69	—	—	—
	202	100.00			

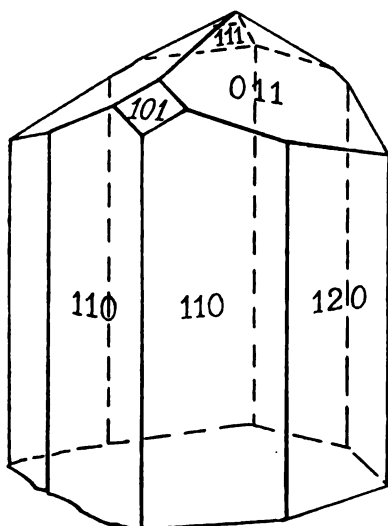


Fig. 1.

Fil. kand. C. Benedicks har undersökt kristallformen å den nu analyserade föreningen och därom meddelat:

»*Kristallsystem*: Monokliniskt.

$$a : b : c = 0.6501 : 1 : 0.5184,$$

$$\beta = 79^{\circ} 48'.$$

Iakttagna ytor:

(110), (120), (011), (101), ($\bar{1}11$).

Kristallerna voro ljusgula, genomskinliga, efter C-axeln utsträckta prismor (Fig. 1). Ytorna gifva goda bilder och de skilda mätningarna differera föga från hvarandra med un-

dantag af (120), som ej gaf väl öfverensstämmande värden. Tvillingsbildning och genomgångar iakttogos icke.

Optiska egenskaper: Optiska axelplanet parallelt med 010. Spetsiga bissektisen bildar med c-axeln en vinkel af 7° bakåt. Den inre (verkliga) axelvinkeln är cirka 59° .

Medeltal af mätningarna:

	Antal		Funnet.	Beräknadt.
	kristaller.	kanter.		
{ * 110:110	18	26	$66^\circ 3'$	—
{ 110:120	13	30	$18^\circ 46'$	$19^\circ 24'$
{ 120:120	15	16	$75^\circ 59'$	$75^\circ 8'$
* 011:011	8	8	$54^\circ 48\frac{1}{2}'$	—
{ $\bar{1}$ 10:011	6	7	$83^\circ 19'$	$83^\circ 10'$
{ 101:011	7	8	$43^\circ 0'$	$42^\circ 59'$
{ 110:101	7	8	$53^\circ 52'$	$53^\circ 51'$
* 110:011	5	8	$67^\circ 36'$	—
$\bar{1}$ 11: $\bar{1}$ $\bar{1}$ 1	2	2	$47^\circ 44'$	$48^\circ 0'$
011:111	2	4	$38^\circ 1'$	$38^\circ 12'$
$\bar{1}$ 10: $\bar{1}$ $\bar{1}$ 1	3	5	$51^\circ 9'$	$50^\circ 57'$

Smältpunkten till p-syrans amid fann LIMPRICHT som nämdt ligga vid 131° . Olikheten mellan hans och mina uppgifter anser jag vara ganska lätt att förklara, ity att nitroamidblandningens smältpunkt ofta ligger vid denna temperatur — denna blandning smälter dock ej skarpt. Jag har vidare omkristalliserat den ofvan analyserade föreningen ur vatten och ur alkohol samt i bägge fallen erhållit smältpunkten 177° — 178° C. Då jag således ej kunnat uppdelat föreningen, är jag förvissad, att den samma utgör amiden till p-syran.

Något som bestyrker min förmodan är följande: Vid ett tillfälle afsatte sig ur de sista moderlutarna till kaliumsalterna kompakta, sferolitiskt grupperade nålar, vidt skilda till utseendet från m-nitrokaliumsaltet. Dessa togos för sig och omkristalliserades ur vatten. Den för ögat att döma enhetliga produkten behandlades med fosforpentaklorid, och den så erhållna fasta råprodukten omkristalliserades ur ligroin. Ur ligroinlösningen utkristalliserade vackra nålar med smtpkt 79.5° — 80.5° C. Omkristalliserad ur ligroin, visade föreningen samma smpkt.

Analysen å öfver svafvelsyra till konstant vikt torkadt material:

1) 0.3206 gr. gaf 0.0633 gr. H_2O ($=0.007033$ gr. H_2) samt 0.3829 gr. CO_2 ($=0.104427$ gr. C.).

2) 0.1800 gr. gaf vid förbränning 0.0412 gr. H_2O ($=0.004577$ gr. H_2) samt 0.2150 gr. CO_2 ($=0.058636$ gr. C.).

3) 0,1544 gr. gaf vid förbränning efter KLASONS metod 0.1007 gr. AgCl samt 0.1574 gr. Ba SO_4 .

4) 0.1507 gr. gaf vid förbränning efter KLASONS metod 0.0951 gr. AgCl samt 0.1645 gr. Ba SO_4 .

I procent:

		Ber. för	Funnet.			
		$\text{C}_6\text{H}_4\text{NO}_2\text{SO}_2\text{Cl}$.	1.	2.	3.	4.
C_6	72	32.52	32.57	32.55	—	—
H_4	4	1.80	2.19	2.54	—	—
N	14	6.82	—	—	—	—
O_4	64	28.90	—	—	—	—
S	32	14.45	—	—	13.98	14.99
Cl	35.4	16.01	—	—	16.13	15.59
		221.4	100.00			

Fil. kand. C. BENEDICKS har undersökt kristallformen å kloriden och därom meddelat:

»*Kristallsystem*: monokliniskt.

$$a : b : c = 1.3042 : 1 : 1.1369; \beta = 74^\circ 21'.$$

Iakttagna ytor: (001), (100), (011), (01 $\bar{1}$), (02 $\bar{1}$), (211), (111)? Ljusgula, mycket små kristaller af växlande utseende, dock vanligen utbildade som figuren 2 anger. Ur konc. lösning erhöles

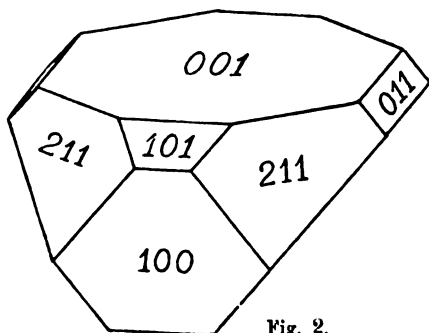


Fig. 2.

tunna tafloer. Ytorna gåfvo goda spegelbilder utom (211), som var matt och ej medgaf några mätningar (Indices bestämda ur läget). Kristallerna äro ofta sammanvuxna tre och tre med ytan (001) gemensam och 120° mellan symmetriplanen.

Optiska egenskaper: Axelplanet parallelt med 010. Bissektrisen bildar en vinkel af $33^{\circ}.6$ mot c-axeln framåt. Axelvinkeln i luft cirka 65° . Optisk negativ.

Medeltal af mätningarna:

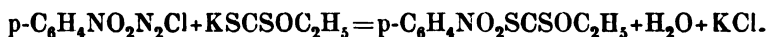
	Antal		Funnet.	Beräknadt.
	kristaller.	kanter.		
* 001 : $\bar{1}00$	8	11	$105^{\circ} 39'$	—
001 : 100	4	5	$74^{\circ} 23'$	$74^{\circ} 21'$
* 100 : 101	4	7	$40^{\circ} 9'$	—
001 : 101	3	5	$34^{\circ} 12'$	$34^{\circ} 12'$
* 001 : 011	13	20	$48^{\circ} 40'$	—
011 : 011	2	2	$82^{\circ} 28'$	$82^{\circ} 40'$
001 : 011	9	9	$131^{\circ} 19\frac{1}{2}'$	$131^{\circ} 20'$
001 : 02 $\bar{1}$	2	3	$113^{\circ} 35'$	$113^{\circ} 44'$
01 $\bar{1}$: 021	3	4	$17^{\circ} 47'$	$17^{\circ} 36'$
100 : 011	2	2	$79^{\circ} 49'$	$79^{\circ} 44'$
100 : 01 $\bar{1}$	9	9	$100^{\circ} 9'$	$100^{\circ} 16'$
001 : 111?	1	3	$49^{\circ} 13'$	$48^{\circ} 51'.$

Då därpå denna klorid behandlades med ammoniak, fick jag en amid, som smälte vid 177° — 178° C., alltså samma smältpunkt som nyss. Af 2 gr. klorid erhöles 1.7 gr. ren amid (beräknadt 1.8 gr.). *Kloriden med smtpkten $79^{\circ}.5$ — $80^{\circ}.5$ måste alltså tillhöra p-syran.*

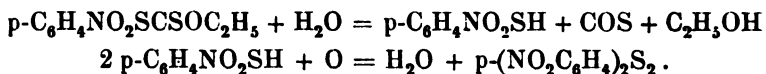
Men detta allt är ju endast indirekta bevis för ohållbarheten af LIMPRICHTS uppgifter. Direkta sådana äro erforderliga. Att öfverföra p-nitrobenzolsulfonsyrekloriden i p-amidobenzolsulfonsyra och denna i p-diklorbenzol vore ju ett, men besvärligt sätt, hvarpå man alltid förlorar ganska mycket material. Att undersöka den bildade sulfanilsyran är ej håller bevisande, ty samtliga amidobenzolsulfonsyror äro ju så lika i flera afseenden. Att öfverföra nitrobenzolsulfonsyrekloriden medelst destillation med fosforpentaklorid i p-diklorbenzol har jag försökt, men på samma gång som innehållet i retorten exploderade, öfverdestillerade endast en ringa kvantitet p-nitroklorid.

Jag var därför tvungen att försöka få direkta bevis på annat sätt. LEUCKART har i Journal f. pr. Chemie 1890 angifvit en generell metod, som ger godt utbyte, för framställande af aroma-

tiska merkaptaner. Bland annat har han i denna afhandling framställt p-dinitrodifenyldisulfid. Han diazoterade fördenskull p-nitranilin och fick härigenom $p\text{-C}_6\text{H}_4\text{NO}_2\text{N}_2\text{Cl}$. Behandlas denna därpå med xanthogensyradt kalium, erhöill han en produkt af sammansättningen $p\text{-C}_6\text{H}_4\text{NO}_2\text{SCSOC}_2\text{H}_5$ enligt likheten:



Försåpas därpå denna, bildas genom inverkan af luftens syre lätt disulfid enligt ekvationerna:



Den på detta sätt erhållna disulfiden, som kristalliserar i små vackra kristaller, har enligt LEUCKART smtpkten 168° — 170° C.

Genom att reducera kloriden med smtpkt $79^\circ.5$ — $80^\circ.5$ C. med jodväte antog jag nu, att jag skulle erhålla denna förening. Men i stället erhöills ett i vackra mikroskopiska taflor kristalliserande ämne, som smälte vid 181° C.

Å öfver svafvelsyra till konstant vikt torkadt material gjordes följande analys:

0.1235 gr. gaf 0.0394 gr. H_2O ($=0.00437$ gr. H_2) samt 0.2118 gr. CO_2 ($=0.057764$ gr. C).

I procent:

C	46.77
H	3.48

Analysen visar, att föreningen utgjordes af dinitrodifenyl-disulfid. Denna fordrar nämligen i procent: kol $=46.75\%$ samt väte 2.60% . För att förklara differensen i smältpunkt mellan min och LEUCKATS förening har jag repeterat L:s experiment. Jag använde därvid på 2 gr. p-nitroanilin 4 gr. 37% klorvätesyra, 1.2 gr. natriumnitrit löst i 2 gr. vatten samt 2.3 gr. xanthogensyradt kalium samt erhöill omsider, ehuru i ringa mängd, en substans, som kristalliserade i fjäll med smtpunkten 180° — 181° C. Denna, torkad öfver svafvelsyra till konstant vikt, gaf vid analys:

0.1176 gr. gaf 0.0416 gr. H_2O ($=0.004622$ gr. H_2) samt 0.2017 gr. CO_2 ($=0.055009$ gr. C) eller

I procent:

C	46.78
H	3.93

Substansen utgöres alltså af $p-(NO_2 C_6 H_4)_2 S_2$. Härmed anser jag mig hafva bevisat dels att LEUCKARTS *förening* ej var fullt ren, dels, att LIMPRICHTS *p-syra* är oren. Af detta följer ock, att de arbeten, som basera sig på LIMPRICHTS *p-syra*, böra revideras.

Slutligen har jag framställt kaliumsaltet till *p-syran*. Jag kokade fördenskull kloriden med vatten, afdunstade klorvätet och neutraliserade den fria *p-syran* med kaliumkarbonat. Saltet ansköt vid lösningens afdunstning i taflor.

Å ur vatten omkristalliseradt och öfver svafvelsyra till konst. vikt torkadt material gjordes följande

Analys:

0.2918 gr. förlorade vid upphettning till 115° under 4 timmar 0.0208 gr.

0.2684 gr. vid 115° torkadt material gaf efter behandling med svafvelsyra 0.0971 gr. $K_2 SO_4$.

I procent:

H_2O	Ber. för $p-NO_2 C_6 H_4 SO_3 K + H_2 O$	6.95	Funnet	7.13
K	Ber. för $p-NO_2 C_6 H_4 SO_3 K$	16.29		16.24

Kaliumsaltet till *p-syran* äger alltså sammansättningen $p-NO_2 C_6 H_4 SO_3 K + H_2O$. (LIMPRICHT $p-NO_2 C_6 H_4 SO_3 K$.)

Skänker till K. Vetenskaps-Akademions bibliotek.

(Forts. från sid. 428.)

München. *K. B. Akademie der Wissenschaften.*

Sitzungsberichte. Philos.-philol. Cl. 1901: H. 1. 8:o.

— *K. B. Meteorologische Central-Station.*

Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern.
1901: 3. 4:o.

Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*

Rendiconto. (3) Vol. 7 (1901): Fasc. 4. 8:o.

New York. *Botanical Garden.*

Bulletin. Vol. 1 (1896—1900): Title & Index; 2 (1901): N:o 6. 8:o.

Nice. *Société de médecine et de climatologie.*

Nice-médical. Année 24 (1900): N:o 4—5, 9, 11—12; 25 (1900): 1—3.
8:o.

Odessa. *Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.*

Mémoires. T. 19; 23: 1—2. 1899. 8:o.

Ottawa. *Field-naturalists' Club.*

The Ottawa naturalist. 1901: 5. 8:o.

Palermo. *Circolo matematico.*

Rendiconti. T. 15 (1901): Fasc. 1—2. 8:o.

Paris. *Société de géographie.*

La Géographie. Année 1901: N:o 5. 8:o.

Pola. *K. u. K. Hydrographisches Amt der K. u. k. Kriegs-Marine.*

Meteorologische Termin-Beobachtungen. 1901: 4. 4:o.

Riga. *Naturforscher-Verein.*

Arbeiten. N. F. H. 10. 8:o.

Roma. *R. Accademia dei Lincei.*

Cl. di scienze fisiche . . .

Rendiconti. (5) Vol. 10 (1901): Sem. 1: Fasc. 8—10. 8:o.

Cl. di scienze morali . . .

Rendiconti (5) Vol. 10 (1901): Fasc. 1—2. 8:o.

— *R. Istituto Botanico.*

Annuario. Anno 9: Fasc. 2. 1901. 8:o.

San Francisco. *California academy of sciences.*

Proceedings. Bot. (3) Vol. 1: N:o 6—10; 2: 1—2. 1899—1900. 8:o.

» Geol. (3) Vol. 1: N:o 5—9. 1899—1900. 8:o.

» Math.-Phys. (3) Vol. 1: N:o 5—7. 1899—1900. 8:o.

» Zool. (3) Vol. 1: N:o 11—12; 2: 1—6. 1898—1900. 8:o.

Occasional papers. 6—7. 1899—1900. 8:o.

— *Astronomical Society.*

Publications. Vol. 13 (1901): Num. 78. 8:o.

San José. *Instituto fisico-geografico.*

Boletín. Año 1: 2—4. 8:o.

S:t Petersburg. *Hortus Petropolitanus.*

Acta. T. 18: Fasc. 3. 1901. 8:o.

— *Russisch-Kaiserliche Mineralogische Gesellschaft.*

Verhandlungen. (2) Bd 38 (1900): Lief. 2. 8:o.

(Forts. å sid. 474.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1901. N:o 6.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

262. Bidrag till kännedomen om svafveldioxids inverkan på diazoföreningar.

Af ALFR. EKBOM.

(Meddeladt den 12 Juni 1901 genom P. T. CLEVE.)

Som innehafvare af ROBSAHMS resestipendium vistades jag under Juni och Juli månader 1898 å Universitetslaboratoriet för kemi i Würzburg. Af dess direktor, Prof. A. HANTZSCH, erhöll jag då som uppgift att undersöka svafveldioxids inverkan på p-nitrodiazobenzol.

Innan jag redogör för resultatet af mina arbeten, meddelar jag en kort litteraturofversikt öfver hvad man hittills känner om svafveldioxids inverkan på diazoföreningar.

KÖNIGS¹⁾ har undersökt, huru en sur lösning af saltsyra eller svafvelsyra dizaobenzol förhåller sig till en konc. vattenlösning af svafveldioxid. Han fann därvid, att en förening af sammansättningen $C_6H_5NHNH\cdot SO_2C_6H_5$ bildades, en förening, som förut framstälts af E. FISCHER²⁾ genom inverkan af fenyldiazin på benzolsulfonsyreklorid och af ESCALES³⁾ genom att låta i värme vattenlösningar af benzolsulfonsyra och fenyldiazinklorhydrat inverka på hvarandra vid närvaro af stark klorvätesyra.

V. ULATOWSKI⁴⁾ erhöll denna och liknande föreningar eller »sulfazider» genom att lösa en amin i med svafveldioxid mättad

¹⁾ Berichte d. d. ch. Ges. 10.1581

²⁾ » » » » » 8.1007.

³⁾ Ber. d. d. chem. Ges. 18.895.

⁴⁾ Ber. d. d. chem. Ges. 20.1238.

95 % alkohol och därpå inleda i lösningen salpetersyrighet eller sätta till lösningen en konc. kaliumnitritlösning. På detta sätt har han framställt utom fenylobenzolsulfazid, o-, m- och p-nitro-fenylnitrobenzolsulfazid, o- och p-tolytoluolsulfazid samt nitro-tolylnitrotoluolsulfazid.

Härmed öfvergår jag till mina

Undersökningar öfver svafveldioxids inverkan på p-nitrodiazobenzol.

Framställning af p-nitrodiazobenzol.

För att framställa denna förening utgick jag från p-nitro-anilin och skaffade mig först enligt SCHRAUBE & SCHMITTS metod ¹⁾ p-nitrofenylnitrosaminnatrium, $\text{p-NO}_2 \text{C}_6\text{H}_4 \text{N Na NO}$, löste därpå denna förening i vatten af 0° samt tillsatte så mycket isättika, som erfordras för att ersätta natrium med väte. Därvid bildades en kristallinisk hvitgul fällning af p-nitrodiazobenzol. Denna af-sögs, tvättades med vatten af 0° samt torkades skyndsamt å thonteller. Sönderdelningspunkten å föreningen var den i litteraturen uppgifna 54°—55° C.

Inverkan af svafveldioxid å p-nitrodiazobenzol, löst i abs. alkohol.

Torr svafveldioxid inleddes vid 0° cirka 1 timas tid i lösningen. En rödgul kristallinisk fällning utföll härunder. Den affiltrerades och tvättades med abs. alkohol. Vid upphettning å platinableck förpuffade densamma. Den löses hvarken i etyl- eller metylalkohol, ej håller i eter; kallt vatten äfvensom klorvätesyra, natron och kaustik ammoniak inverka vid vanlig temperatur ej å föreningen. Däremot löses den något af varm isättika och af varm benzol. Varm ättiketer löser den i större mängd; ur lösningen utkristalliserar vid afvalning mikroskopiska, gulröda nålar, hvilka vid 135° C. sönderdelas.

Af 3.45 gr. p-nitrofenylnitrosaminnatrium erhöles vid ett tillfälle 1.85 gr. råprodukt och 0.91 gr. kristalliserad substans (sönder-

¹⁾ Ber. d. d. chem. Ges. 27.514.

delningspunkt 135° C.); vid ett annat tillfälle erhöles af 3 gr. p-nitrofenylnitrosaminnatrium 1.3 gr. råprodukt och 0.83 gr. ren förening.

Analysen å öfver svafvelsyra till konstant vikt torkadt material:

1) 0.1141 gr. gaf 0.0333 gr. H_2O ($=0.0037$ gr. H_2) samt 0.1779 gr. CO_2 ($=0.048518$ gr. C)

2) 0.1633 gr. gaf 0.0363 gr. H_2O ($=0.004033$ gr. H_2) samt 0.2575 gr. CO_2 ($=0.070227$ gr. C)

3) 0.1492 gr. gaf 0.0384 gr. H_2O ($=0.004266$ gr. H_2) samt 0.2356 gr. CO_2 ($=0.064254$ gr. C)

4) 0.1015 gr. gaf 14.8 (cm)³ N-gas vid 757 mm och 18° C.

5) 0.1155 gr. gaf 17.1 (cm)³ N-gas vid 755 mm och 21.5° C.

6) 0.1025 gr. gaf enligt CARIUS' metod 0.0718 gr. BaSO_4 .

7) 0.1160 gr. gaf vid förbränning enligt KLASONS metod 0.0809 gr. BaSO_4 .

I procent:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
C	42.52	43.00	43.06	—	—	—	—
H	3.20	2.47	2.85	—	—	—	—
N	—	—	—	16.88	17.11	—	—
S	—	—	—	—	—	9.62	9.47

För kolbestämningarna blir medeltalet 42.86 %, för vätebestämningarna 2.84 %, för kväfvebestämningarna 16.99 % samt för svafvelbestämningarna = 9.55 %. Alltså atomförhållandet:

$$\text{C} : \text{H} : \text{N} : \text{S} : \text{O} = 3.571 : 2.840 : 1.213 : 0.298 : 1.735 = \\ = 11.987 : 9.528 : 4.069 : 1 : 5.810 .$$

Alltså den empiriska formeln $\text{C}_{12} \text{H}_{10} \text{N}_4 \text{SO}_6$ eller, då vätebestämningarna sannolikt äro för höga, $\text{C}_{12} \text{H}_9 \text{N}_4 \text{SO}_6$.

Den förra fordrar i procent:

C_{12}	144	42.60
H_{10}	10	2.95
N_4	56	16.57
S	32	9.46
O_6	96	28.42
	338	100.00

Den senare formeln åter fordrar i procent:

C ₁₂	144	42.85
H ₁₆	8	2.88
N ₄	56	16.66
S	32	9.52
O ₆	96	28.59
	336	100.00

I förra fallet kunde man välja på $p\text{-NO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NHSO}_2\text{NHC}_6\text{H}_4\text{NO}_2$ el. $p\text{-NO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NHNHSO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NO}_2$; i senare fallet är näppeligen någon annan formel acceptabel än $p\text{-NO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{N}=\text{NSO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NO}_2$.

Som föreningen $p\text{-NO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NHSO}_2\text{NHC}_6\text{H}_4\text{NO}_2$ sannolikt ej är stabil, återstår alltså att afgöra om föreningen i fråga har formeln $p\text{-NO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NHNHSO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NO}_2$ el. $p\text{-NO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{N}=\text{NSO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NO}_2$.

$p\text{-NO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NHNHSO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NO}_2$ har jag framställt genom att vid närvaro af något kaliumkarbonat låta alkohollösningar af *p*-nitrofenylhydrazin och *p*-nitrobenzolsulfonsyreklorid ¹⁾ inverka på hvarandra. Den erhållna råprodukten omkristalliserades ur utspädd alkohol. Därvid erhöles gula små nålar med sönderdelningspunkt 171°—172° C. Af 1 gr. *p*-klorid vans 0.58 gr. af substansen med sönderdelningspunkt 171°—172° C.

Å öfver svafvelsyra till konstant vikt torkadt material gjordes följande

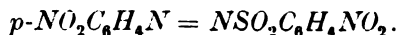
Analys:

0.1231 gr. gaf vid förbränning 0.0306 gr. H₂O (= 0.0034 gr. H₂) samt 0.1903 gr. CO₂ (= 0.0519 gr. C.).

I procent:

	Ber. för $p\text{-NO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NHNHSO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NO}_2$.	Funnnet.
C	42.60	42.16
H	2.95	2.76

Häraf följer, att svafveldioxidprodukten med all sannolikhet äger sammansättningen



¹⁾ Se föregående meddelande.

För att direkt bevisa detta har jag dels spaltat föreningen med konc. klorvätesyra, dels syntetiserat densamma.

Spaltning med klorvätesyra.

Exp. 1. 0.95 gr. upphettades med konc. klorvätesyra (36 %) i slutet rör i vattenbad under 2 timmar 35 min. Ringa tryck förmärktes vid rörets öppnande. Uti röret hade bildats färglösa nålar tillsammans med ett gult amorft ämne. Vid tillsats af vatten uppstod en emulsion. Fällningen fränfiltrerades, tvättades med vatten och lufttorkades. Dess vikt belöpte sig till 0.4 gr. Densamma ägde en om nitrobenzol påminnande lukt. Filtratet koncentrerades och gaf i två omgångar 0.1 gr. af ett i brunhvita nålar kristalliserande ämne med smtpkt 178° — 180° C. Filtratet efter denna substans afdunstades å vattenbad, tills all lukt af klorväte försvunnit. Därvid erhöles en tungflytande, svagt gulaktig vätska, som inom kort stelnade kristalliniskt. Denna löstes i vatten, och lösningen försattes med kaliumkarbonat och upphettades; därvid kunde ej någon lukt af ammoniak förnimmas. Då därpå denna lösning afdunstades, utkristalliserade gula fjäll. Af dessa erhöles 0.43 gr.

De 0.4 gr. tillsammans med 0.35 gr. af samma vara (dessa hade erhållits vid ett föregående experiment) underkastades destillation med vattenånga. Vid destillationen samlades i förlaget hvita nålar med om nitrobenzol erinrande lukt. Dessa smälte vid 83° — 84° C., ägde en brännande, söt smak samt löste sig lätt i alkohol, men föga af vatten. Inalles erhöles af dessa 0.34 gr. Uti kolfven åter kvarstannade det ofvan omnämnda gula amorfa ämnet = 0.25 gr. Detta ämne löses svårt i alkohol, däremot lätt i varm isättika. Ur isättiklösningen utföllo brungula nålar med smtpkt 179° — 180° C., hvilka utan allt tvifvel äro identiska med de nyss omnämnda (= 0.1 gr.).

Experiment 2. 2.24 gr. upphettades som nyss under cirka 1 timmar tid. Innehållet behandlades som i experiment 1. Nämlarna och det gula amorfa ämnet vägde 1.19 gr. Häraf erhöles vid destillation med vattenånga 0.49 gr. med smtpkt 83° — 84° C.

I kolfven kvarstannade 0.35 gr.; denna kvantitet omkristalliserades ur isättika samt gaf såsom i exp. 1 kristaller med smtpkt 179° — 180° C. Vid koncentrerings af moderluten till de 1.19 gr. utföll inalles 0.17 gr. af det i brunhvita nålar kristalliserande ämnet (jfr exp. 1). Moderluten efter de 0.17 gr. gaf vid afdunstning en i vatten löslig, i nålar kristalliserande substans. Lösningen af denna försattes som förut med kaliumkarbonat; därvid utvecklades koldioxid, men någon ammoniaklukt förmärktes ej. Då denna lösning afdunstades, utkristalliserade tafloer (= 0.91 gr.).

Vi se af experimenten 1 och 2, att vid inverkan af klorvätesyra bildas tre produkter: 1) Ett ämne med smtpkt 83° — 84° C. 2) Ett ämne med smtpkt 179° — 180° C. 3) Ett i nålar kristalliserande ämne.

Å material från experimenten 1 och 2, torkadt till konstant vikt öfver svafvelsyra, gjordes följande analyser.

Analysen på produkten med smältpunkt 83° — 84° C.:

1) 0.1169 gr. gaf vid förbränning 0.0332 gr. H_2O (= 0.00368 gr. H_2) samt 0.1923 gr. CO_2 (= 0.052445 gr. C.)

2) 0.1341 gr. gaf vid förbränning enligt KLASONS metod 0.1189 gr. AgCl .

I procent:

C	44.9
H	3.1
Cl	21.9

Dessa analyser, hvilka utfördes å *destillationsprodukten*, kunna ju ej gifva så goda värden, men visa dock tydligt, att produkten med smältpunkt 83° — 84° C. utgöres af *p-nitroklorbenzol* (C=45.7 %, H=2.6 %, Cl=22.5 %). Denna förenings egenskaper stämma ock öfverens med destillationsprodukten.

Analysen å produkten med smältpunkt 179° — 180° C.:

1) 0.1008 gr. gaf 0.0354 gr. H_2O (= 0.00393 gr. H_2) samt 0.1586 gr. CO_2 (= 0.043254 gr. C.).

2) 0.0761 gr. gaf 0.1194 gr. CO_2 ($=0.03256$ gr. C.).

3) 0.0956 gr. gaf vid förbränning enligt KLASONS metod 0.1309 gr. BaSO_4 .

I procent:

	1.	2.	3.
C	42.91	42.78	—
H	3.90	—	—
S	—	—	18.80

Dessa värden visa, att *substansen med smtpkten $179^\circ - 180^\circ \text{ C.}$ måste utgöras af $p\text{-(NO}_2\text{C}_6\text{H}_4)_2\text{S}_2\text{O}_2$.* (Denna fordrar C = 42.36 %, H = 2.36 % samt svafvel = 18.80 %).

Analysen å de gula taflorna:

0.1377 gr. förlorade vid torkning under 3 timmar vid 130° C. 0.01 gr., d. ä.

I procent:

H_2O	7.26.
----------------------	-------

0.1272 gr. vattenfri substans gaf 0.0459 gr. K_2SO_4 , d. ä.

I procent:

K	16.19.
---	--------

*Således utgör denna produkt $p\text{-NO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{SO}_3\text{K} + \text{H}_2\text{O}$.*¹⁾

(Denna fordrar $\text{H}_2\text{O} = 6.95\%$ samt K (ber. å vattenfritt salt) 16.29 %.)

Jag öfverförde för att stärka detta påstående kaliumsaltet i klorid; ur ligroin utkristalliserade nålar med smtpkt $79.5^\circ - 80.5^\circ \text{ C.}$, alltså p-syrans klorid.¹⁾ (Af 0.85 gr. erhöles 0.53 gr. kristalliserad klorid, ber. 0.78 gr.)

Å öfver svafvelsyra till konstant vikt torkadt material gjordes följande

Analys:

0.1177 gr. gaf 0.1178 gr. BaSO_4 samt 0.0767 gr. AgCl eller

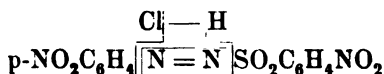
I procent:

	Ber.	Funnet.
S	14.44	13.75
Cl	16.03	16.12

¹⁾ Se föregående meddelande.

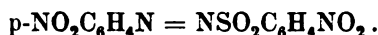
Härmed är alltså bevisadt, att föreningen (med sönderdelningspunkten 135° C.) spaltas af HCl i p-nitroklorbenzol, p-dinitrodifenylidisulfoxid samt i p-nitrobenzolsulfonsyra.

Denna spaltningsprocess försiggår antagligen enligt schemat:



d. v. s. först bildas kväfgas, p-nitroklorbenzol samt p-nitrobenzolsulfonsyra. Som emellertid dessa syror sönderfalla vid närvaro af mineralsyror i disulfoxid och sulfonsyra, blifva slutprodukterna vid spaltningsprocessen kväfgas, p-nitroklorbenzol, p-dinitrodifenylidisulfoxid och p-nitrobenzolsulfonsyra.

Af spaltningsprodukterna åter kan man med visshet sluta till, att den produkt, som bildas, då svafveldioxid får inverka på p-nitrodiazobenzol, har sammansättningen



Syntetisk framställning af föreningen.

Fördenskull reducerade jag 3 gr. p-nitrobenzolsulfonsyreklorid med 4 gr. kristalliseradt natriumsulfit löst i 6 gr. vatten och förfor för öfrigt enligt LIMPRICHTS föreskrifter.¹⁾ Jag erhöi omsider ett mycket lösligt natriumsalt, å hvilket dock ej någon analys utfördes. (Saltet anskjuter ej i tydliga kristaller.) Behandlades därpå detta med p-nitrodiazobenzolklorid,²⁾ utföll ett gulrödt ämne, hvilket omkristalliserades ur ättiketer. Ur ättiketerlösningen utkristalliserade gulröda, mikroskopiska nålar, hvilkas sönderdelningspunkt låg vid 135° C. Å öfver svafvelsyra till konstant vikt torkadt material gjordes följande

Analys:

0.1493 gr. gaf 0.0309 gr. H_2O ($= 0.003433$ gr. H_2) samt 0.2345 gr. CO_2 ($= 0.063954$ gr. C.), d. ä.

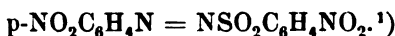
¹⁾ Ber. d. d. chem. Ges. 25.75. (Reduktion af m. nitrobenzolsulfonsyreklorid med alkalisulfit.)

²⁾ Jfr Ber. d. d. chem. Ges. 10.1532.

I procent:

C	42.88
H	2.29

Som föreningen $p\text{-NO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{N}=\text{NSO}_2\text{C}_6\text{H}_4\text{NO}_2$ fordrar 42.82% C samt 2.38 % H, är härmed alltså fullt bevisadt, att produkten, som bildas, då svafveldioxid får inverka på p-nitrodiazobenzol eller p-nitrofenyldiazoparanitrofenylsulfon, äger sammansättningen



För att förklara uppkomsten af denna förening kunde man antaga, att af p-nitrodiazobenzol under kväfgas- och syrgasutveckling bildas p-nitrobenzolsulfinsyra, och att därpå denna med kvarvarande p-nitrodiazobenzol ger föreningen.

Framställningen af och analyserna å p-nitrofenyldiazoparanitrofenylsulfon äro utförda i Würzburg, det öfriga i Upsala.

¹⁾ Dylika föreningar eller »diazosulfoner» hafva förut framställts af KOENIGS, H. v. PECHMANN, HANTZSCH & SINGER, E. v. MEYER samt TROEGER & EWERS dels genom att behandla diazoniumsalter med sulfinsyror resp. sulfinsyrade salter dels genom att behandla diazoetrar äfvensom diazocyanider med sulfinsyror. Härvid hafva dock (liksom vid inverkan af svafveldioxid å p-nitrodiazobenzol) aldrig stereoisomera diazosulfoner erhållits. Närmare härom i Ber. d. d. chem. Ges. 10, 1532, 28, 862, 30, 312 och i Journal für pr. Chemie [2], 56, 272 samt [2], 62, 369.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 464.)

Stettin. *Entomologischer Verein.*

Stettiner entomologische Zeitung. Jahrg. 62 (1901): N:o 1—6. 8:o.

Sydney. *Australian museum.*

Memoir 4. 1901. 8:o.

Records. Vol. 4: N:o 1. 1901. 8:o.

— *Observatory.*

Results. 1898. 8:o.

Tacubaya. *Observatorio astronómico nacional.*

Boletín. T. 2: Núm. 7. 1901. Fol.

Tokyo. *College of science, Imp. University.*

Journal. Vol. 15 (1901): P. 1. 4:o.

— *Central meteorological observatory.*

Weather map. 1901: 2—3. Fol.

Toronto. *Meteorological service of Canada.*

Cloud observations during 1896 and 1897 at Toronto. 1901. 4:o.

Monthly weather review. Vol. 24 (1900): N:o 1—12. 4:o.

Washington. *Smithsonian Institution.*

Annual report. Year 1897: P. 2; 1898. 8:o.

Miscellaneous collections. Vol. 41: 1253. 1901. 8:o.

— *Academy of sciences.*

Proceedings. Vol. 3: pp. 157—216. 1901. 8:o.

— *Department of agriculture.*

Publications. 1901: 3. 18 nummer.

— *Weather Bureau.*

Monthly weather review. Vol. 29 (1901): N:o 2—3. 4:o

— *U. S. Naval observatory.*

Publications. (2) Vol. 1. 1900. 4:o.

— *Coast and geodetic Survey.*

Report of the Superintendent. 1898/99. 4:o.

Winnipeg. *Historical and Scientific Society of Manitoba.*

Transactions. N:o 57—59. 1901. 8:o.

Annual report. Year 1900. 8:o.

Wien. *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.*

Verhandlungen. Bd 51 (1901): H. 3. 8:o.

Botanik und Zoologie in Österreich in den Jahren 1850 bis 1900.

Festschrift. 1901. 8:o.

— *K. K. Naturhistorisches Hofmuseum.*

Annalen. Bd 13 (1898): Nr. 2—4; 14 (1899): 1—4; 15 (1900): 1—2. 8:o.

— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*

Verhandlungen. 1901: Nr 4—6. 8:o.

Wooster. *Ohio agricultural experiment station.*

Bulletin. 110—120. 1899—1900. 8:o.

Würzburg. *Physikalisch-medicinische Gesellschaft.*

Verhandlungen. N. F. Bd 34 (1901): Nr 2—6. 8:o.

Sitzungsberichte. 1900: Nr 2—4. 8:o.

(Forts. å sid. 489.)

Meddelande från Upsala Univ. Fysiska Institution.

Beiträge zur Kenntniss der Wärmeabsorption in Kohlensäure.

Von JOHN KOCH.

(Mitgeteilt am 12. Juni 1901 durch K. ÅNGSTRÖM.)

1. Einleitung.

Das Absorptionsvermögen der Kohlensäure für strahlende Wärme ist Gegenstand einer grossen Zahl von Untersuchungen gewesen. Man hat teils die Absorption der totalen Strahlung von verschiedenen Wärmequellen und für verschiedene Kohlensäureschichten, teils auch das Absorptionsspektrum bestimmen wollen.¹⁾

Untersuchungen der erstgenannten Art sind von FRANZ,²⁾ MAGNUS,³⁾ TYNDALL,⁴⁾ LECHER & PERNTER,⁵⁾ LECHER,⁶⁾ RÖNTGEN,⁷⁾ HEINE,⁸⁾ KEELER,⁹⁾ ÅNGSTRÖM,¹⁰⁾ KURLBAUM¹¹⁾ und ARRHENIUS¹²⁾ ausgeführt worden. Gegen mehrere von diesen

¹⁾ Da Untersuchungen dieser Art etwas abseits der in dieser kleinen Arbeit behandelten Frage liegen, sei nur an die Untersuchungen von ÅNGSTRÖM, PASCHEN und RUBENS & ASCHKINASS erinnert, durch welche das Absorptionsspektrum der Kohlensäure bis zu $20\ \mu$ bekannt ist.

²⁾ R. FRANZ, Pogg. Ann. **94**, p. 337, 1855.

³⁾ G. MAGNUS, Pogg. Ann. **112**, p. 514, 1861.

⁴⁾ J. TYNDALL, Contributions to molec. Physics . . . of Radiant Heat, 1872.

⁵⁾ E. LECHER & J. PERNTER, Wied. Ann. **12**, p. 180, 1881.

⁶⁾ E. LECHER, Wied. Ann. **12**, p. 467, 1881.

⁷⁾ W. C. RÖNTGEN, Wied. Ann. **23**, p. 259, 1884.

⁸⁾ H. HEINE, Wied. Ann. **16**, p. 441, 1882.

⁹⁾ J. E. KEELER, Americ. Journ. of Sc. **28**, p. 190, 1884.

¹⁰⁾ K. ÅNGSTRÖM, Wied. Ann. **39**, p. 267, 1890.

¹¹⁾ F. KURLBAUM, Wied. Ann. **61**, p. 417, 1897.

¹²⁾ Sv. ARRHENIUS, Ann. der Physik, **4**, p. 690, 1901.

Untersuchungen lassen sich jedoch Einwendungen machen. FRANZ hatte die Kohlensäure in lange Röhren eingeschlossen, deren Enden mit Glasplatten verschlossen waren, welche offenbar den grössten Teil des ultrarothern Spektrums absorbirten. MAGNUS, LECHER & PERNER und LECHER hatten sowohl Wärmequelle wie Messinstrument (Thermosäule) in demselben verschlossenen Raum placirt, in dem auch die Kohlensäure enthalten war, ohne Rücksicht darauf zu nehmen, dass die Angaben der Thermosäule in Luft und in Kohlensäure nicht direkt mit einander vergleichbar sind.

RÖNTGEN und HEINE bestimmten die Absorption, indem sie die Druckzunahme massen, die in einer eingeschlossenen Gasmenge bei Wärmeabsorption entsteht; ein wie grosser Bruchteil der totalen Strahlung absorbirt wurde, kann man aus ihren Angaben kaum berechnen.

Im übrigen hat man zur Bestimmung der Absorption im allgemeinen mit Kohlensäureschichten verschiedenen Drucks gearbeitet. Es ist indessen von grossem Interesse zu wissen, wie die Absorption in Kohlensäure von konstantem Druck mit der Schichtdicke variirt. Aus Prof. K. ÅNGSTRÖM's hier vorher veröffentlichten Untersuchungen ¹⁾ geht nämlich hervor, dass die Absorption nicht, wie man bisher angenommen, unabhängig von der Gasdichte ist (d. h. dieselbe ist, sobald das Produkt aus Gasdichte und Schichtdicke das gleiche bleibt). Eine Wiederaufnahme der Frage von der Wärmeabsorption der Kohlensäure erscheint also aus mehreren Gründen wünschenswerth, weshalb auch Herr Prof. K. ÅNGSTRÖM mich aufforderte, die Absorption in Kohlensäureschichten von verschiedener Länge unter Anwendung von Wärmequellen niedriger Temperaturen zu untersuchen.

2. Versuchsanordnung.

Bei meiner Untersuchung habe ich eine Methode angewendet, welche der von Prof. ÅNGSTRÖM angegebenen ²⁾ gleich ist, weshalb

¹⁾ K. ÅNGSTRÖM, Öfversigt af K. Sv. Vet.-Akad. Förhandl. 58, p. 371, 1901.

²⁾ K. ÅNGSTRÖM, Wied. Ann. 89, p. 267, 1890.

eine nähere Beschreibung überflüssig sein dürfte — nur die Hauptzüge derselben will ich in Kürze anführen.

Aus einer Kohlensäurebombe wurde die Kohlensäure durch Phosphorsäureanhydrid enthaltende Trockenröhren in die Versuchsröhre geleitet, die mit einer geeigneten Anzahl Diaphragmen versehen und deren Enden durch Steinsalzplatten verschlossen waren. Die Versuchsröhre stand ausserdem in Verbindung mit einer Luftpumpe und einem Quecksilbermanometer. Als Wärmequelle wurde eine geschwärzte Platinspirale verwendet, die in eine stark reflektirende Hülle gesetzt und mittelst eines elektrischen Stromes auf ca. 100° resp. ca. 300° C. erhitzt wurde; die Stromstärke wurde an einem Präzisionsampèremeter abgelesen. Bei ein par Versuchen diente mir als Wärmequelle auch ein Hohlkörper, der mittelst Wasserdampfes auf ca. 100° C. erwärmt wurde. Zwischen Wärmequelle und Versuchsröhre befand sich ein beweglicher Wasserschirm. Die Strahlung wurde mittelst Bolometer gemessen. Das von mir angewendete Galvanometer war von ÅNGSTRÖM'scher Konstruktion und hatte, wenn die Rollen nebeneinander geschaltet waren einen inneren Widerstand von 10 Ohm.

Im übrigen war die ganze Anordnung durch Pappschirme und Baumwolle gegen Luftströme und schnelle Temperaturschwankungen wohlgeschützt.

Um die Absorption in der Kohlensäure zu bestimmen, wurde abwechselnd die Strahlung durch die mit trockener Luft und mit trockener Kohlensäure gefüllte Röhre beobachtet. Vorausgesetzt wurde hierbei, dass die Luft keine nennenswerte Absorption ausübt; zwar wurde die Luft nicht von ihrem Kohlensäuregehalt befreit, jedoch liegt der hierdurch entstehende Fehler ganz im Bereich der Beobachtungsfehler.

3. Beobachtungsergebnisse.

Auf oben angegebene Weise habe ich die Absorption in Kohlensäureschichten von je 12, 20, 31, 98 und 389 cm Länge

und drei verschiedenen Drucken: $\frac{1}{2}$, 1 und 2 Atm. bestimmt. In den Tab. 1 und 2 sind die Ergebnisse mitgeteilt; die Zahlen bezeichnen hier Mittelwerte aus mehreren (5—10, häufig mehr) Einzelbestimmungen.

Tab. 1.

Temperatur der Wärmequelle: ca. 100° C.

Schichtdicke in cm.	Absorption in Proc. bei Druck von		
	$\frac{1}{2}$	1 (= 760 mm.)	2 Atm.
12	5.9 (6.1)	8.1	—
20	7.9 (8.1)	9.5	11.3 (10.6)
31	8.9 (9.2)	10.2	—
98	9.9 (10.2)	11.7	13.7 (12.9)
389	—	—	—

Tab. 2.

Temperatur der Wärmequelle: ca. 300° C.

Schichtdicke in cm.	Absorption in Proc. bei Druck von		
	$\frac{1}{2}$	1	2 Atm.
12	—	—	—
20	6.0 (6.2)	7.6	9.6 (9.0)
31	—	—	—
98	8.6 (8.9)	10.5	12.6 (11.8)
389	11.9 (12.3)	13.1	16.0 (15.0)

Aus diesen Tabellen ersehen wir, dass die Absorption in 98 cm Kohlensäure von 2 Atm. Druck z. B. grösser ist als die Absorption in 389 cm Kohlensäure von $\frac{1}{2}$ Atm. Druck, wie auch Prof. ÅNGSTRÖM's Untersuchungen es erfordern; die Absorption nimmt verhältnismässig mit dem Druck zu. Ein ungefähres Mass für diese Zunahme erhalten wir durch folgende Betrachtung. Die Absorption in 98 cm Kohlensäure von 4 Atm. Druck ergab sich mit 16.2 % (für eine Wärmequelle von 300°

1 (nach Tab. 2) 389 cm Kohlensäure von 1 Atm. % absorbieren — die Zunahme der Absorption infolge beträgt also 23.7 % oder per Atm. 5.9 %. Mit approximativen Bestimmung habe ich die bei $\frac{1}{2}$ Druck gemachten Bestimmungen auf 1 Atm. von n resp. halb so grossen Schichtdicke umgerechnet; stehenden Zahlen geben diese so erhaltenen Werte. 1 sind die in Tab. 1 und 2 mitgeteilten Werte orption graphisch wiedergegeben. Kurve I bezieht b. 1 (der mit — — — — — bezeichnete Teil der durch Extrapolation erhalten), Kurve II auf Tab. 2. en sind die absorbirten Wärmemengen in Procenten Strahlung und als Abscissen die entsprechenden n in cm und für 1 Atm. Druck abgetragen; hierbei e bei $\frac{1}{2}$ und 2 Atm. Druck gemachten Beobach- 1 Atm. reduziert, indem ich als Schichtdicke das s Länge in cm und Druck in Atm. setzte, und als erte dabei die in () stehenden Zahlen nahm.

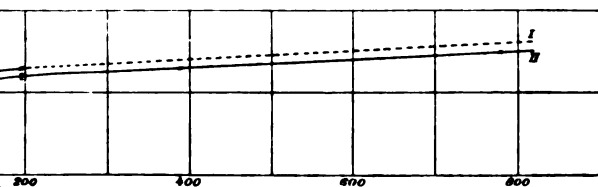


Fig. 1.

hen hieraus, dass die Absorption im Anfang sehr n aber ziemlich langsam mit der Schichtlänge zu- absorbieren z. B. 50 cm Kohlensäure von 1 Atm. n 9.2 % der Strahlung einer Wärmequelle von 300° 200 cm nur 12.0 %, 400 cm 13.2 % und 800 cm absorbieren — die letzte Zahl ist etwas unsicher.

ereinstimmung zwischen meinen Werten und KEELER's 1) der Absorption in 340 cm Kohlensäure von 1 (= 11 %) ist ziemlich gut. Als Wärmequelle diente

KEELER, l. c. p. 197.

ihm ein berusstes Kupferblech von ungef. 270° C. Die Bestimmung wurde ohne Anwendung von Steinsalzplatten gemacht; berechnet man (siehe unten), was er unter Anwendung von solchen gefunden haben würde, so findet man 11.5—12 %, während der entsprechende Wert bei mir 12.8 % ist.

Dagegen weicht meine Kurve sehr bedeutend von der, die Prof. ARRHENIUS¹⁾ gefunden hat ab. Er bestimmte die Absorption in einer Kohlensäureschicht von 50 cm Länge und 1—8 Atm. Druck. In Tab. 3 gebe ich die von ihm für eine Wärmequelle von 100° C. gefundenen Absorptionswerte, und zur Vergleichung auch die von mir erhaltenen, die letzteren der Kurve I, Fig. 1 entnommen. In der 4:ten Kolumne stehen die Differenzen in Procenten zwischen den entsprechenden Zahlen in Kolumne 2 und 3, in der 5:ten Kolumne schliesslich die Differenzen in Procenten per Atm.

Tab. 8.

Schichtdicke in cm.	Absorption in Proc. nach		Diff. in Proc.	Diff. in Proc. pr Atm.
	ARRHENIUS.	KOCH.		
50	10.4	10.6	—	—
140	14.3	12.3	16.3	5.8
155	15.0	12.5	20.0	6.4
170	15.8	12.7	24.4	7.2
200	15.9	13.0	22.8	5.6
275	18.1	13.4	35.1	6.4
300	18.8	13.6	34.6	5.8
400	20.0	14.2	40.8	5.1

Mittel: 6.0

Wir sehen, dass für eine Schichtlänge von 50 cm, wo der Druck bei Prof. ARRHENIUS' Untersuchung 1 Atm. betrug und die Beobachtungen also unter gleichen Versuchsbedingungen wie bei mir angestellt wurden, die Übereinstimmung auch vollständig ist, dass aber seine Werte dann bedeutend schneller mit der Schichtlänge wachsen als die meinen. Wir sehen ferner aus den

¹⁾ SV. ARRHENIUS, l. c. p. 692.

Zahlen in Kolumne 5 der obigen Tab. 3, wenn wir sie mit der Bestimmung der Veränderung mit dem Druck per Atm. auf S. 478 vergleichen, dass diese Abweichung sich vollkommen aus dem Einfluss des Drucks erklärt.

Eine derartige Ungleichheit der Ergebnisse herrscht auch zwischen TYNDALL's und meinen Bestimmungen, soweit sie unter verschiedenen Versuchsbedingungen gemacht worden sind. In Tab. 4 gebe ich die Bestimmungen TYNDALL's ¹⁾ für die Absorption der Strahlung einer Wärmequelle von 100° C. in Kohlen-säure, wie sie von Prof. VERY ²⁾ und Prof. ARRHENIUS ³⁾ in Procente umgerechnet worden sind.

Tab. 4.

Druck in engl. Zoll (Schicht- dicke = 120 cm).	Absorption nach			Ber. Schicht- dicke in cm (Druck = 1 Atm. nach ARRHENIUS).
	TYNDALL in Galv.- Grad.	Very in Proc.	ARRHENIUS in Proc.	
0.5	5.0	1.50	1.4	2.08
1.0	7.5	2.25	2.1	4.06
1.5	10.5	3.14	3.0	6.09
2.0	14.0	4.19	4.0	8.12
2.5	17.8	5.33	5.1	10.15
3.0	21.8	6.53	6.1	12.18
3.5	24.5	7.34	6.7	14.2
5.0	25.0	7.49	6.9	20.8
10.0	36.0	10.78	10.0	40.6
15.0	42.5 (48)	(14.37)	11.8	60.9

Totale Strahlung = $\begin{cases} 360 \text{ Einheiten' nach ARRHENIUS' Annahme (p. 19 Contrib.).} \\ 334 \text{ „ „ „ VERY's „ (p. 18—19 „).} \end{cases}$

Wir sehen, dass TYNDALL's Absorptionskurve ein anderes Aussehen hat als die meine. Dies ist indessen nichts anderes, als was wir im voraus erwarten konnten. Wir müssen uns er-

¹⁾ J. TYNDALL, l. c. p. 37.

²⁾ F. W. VERY, U. S. Department of Agriculture, Bull. G. p. 87, 1900.

³⁾ Sv. ARRHENIUS, l. c. p. 692.

innern, dass diese Bestimmungen TYNDALL's teils bei ziemlich niedrigen Drucken gemacht wurden, teils auch dass TYNDALL bei diesen Versuchen mit einer innen hochpolirten Messingröhre ohne Diaphragmen arbeitete, in welcher also eine störend einwirkende Reflexion vorhanden war.¹⁾

Ich habe mit Tab. 4 auch die Unsicherheit zeigen wollen, die den umgerechneten TYNDALL'schen Daten anhaftet, und die teils darauf beruht, dass TYNDALL nicht selbst die Absorption in Procenten angegeben hat, sondern in Galvanometergraden und ohne die Stärke der totalen Strahlung unzweideutig anzugeben.

Dagegen herrscht eine verhältnismässig gute Übereinstimmung zwischen TYNDALL's und meinen Bestimmungen für die Absorption der Strahlung einer Wärmequelle von 270—300° C. Es ist zu beachten, dass diese sämtlich bei atmosphärischem Druck angestellt wurden.

In Tab. 5 sind einige von TYNDALL's Werten²⁾ angeführt.

Tab. 5.

Schichtdicke in engl. Zoll.	Absorption in Proc.	Schichtdicke in cm.
0.01	0.86	0.03
0.05	2.1	0.13
0.1	3.8	0.25
0.5	5.7	1.27
1.0	6.8	2.54
1.5	6.7	3.81
2.0	7.6	5.08
12.0	8.4	30.8
33.0	8.0	83.8

Die beiden letzten Bestimmungen in obiger Tabelle finden sich nicht direkt in Procenten angegeben, sondern sind berechnet.

Nach Tab. I und II auf S. 407 der Contributions ist nämlich die Absorption in 12 engl. Zoll Kohlensäure = 37° und die

¹⁾ J. TYNDALL, l. c. p. 35 u. 38.

²⁾ J. TYNDALL, l. c. p. 80, 170, 407.

totale Strahlung = 79.8° (= 440 Einheiten nach der Angabe auf S. 260 l. c.), die Absorption beträgt demnach 8.4 Proc.

Wir finden ferner nach Tab. 1 S. 80 der Contributions als relative Werte der Absorption für Kohlensäure 90 und für Ammoniak 1195 (Schichtdicke = 33 engl. Zoll. Druck = 1 Atm.). Ausserdem beobachtete TYNDALL, dass, wenn die Röhre mit Ammoniak gefüllt war und ein Metallschirm zwischen Wärmequelle und Thermosäule eingeschoben wurde, dies sehr unbedeutend den Ausschlag erhöhte. Die Zahl 1195 stellt also nahezu 100 % Absorption dar, sodass wir also als Wert für die Absorption in 83.8 cm Kohlensäure ca. 8 Proc. finden.

Wie erwähnt, ist die Übereinstimmung hier, wo die Beobachtungen unter ähnlichen Verhältnissen ausgeführt wurden, auch besser.

Ausser den auf S. 478 in Tab. 1 mitgeteilten Beobachtungen habe ich auch Bestimmungen über die Absorption in Kohlensäureschichten von 31 resp. 12 cm Länge bei verschiedenen Drucken ausgeführt, die ich hier nur im Vorbeigehen anführe (Tab. 6). Die für die 12 cm Röhre angeführten Werte sind durch Interpolation zwischen 50 bis 60 direkten Bestimmungen erhalten.

Tab. 6.

Temp. der Wärmequelle: ca. 100° C.

Druck in mm Hg.	Absorption in Proc. bei	
	31 cm Röhre.	12 cm Röhre.
760	10.2	8.1
647	10.1	7.7
548	9.8	7.2
445	9.4	6.5
345	8.6	5.6
242	7.3	4.4
123	4.7	2.9
99	4.4	2.1
52	3.4	1.1
23	1.8	0.5

4. Der Einfluss der Steinsalzplatten auf die obigen Ergebnisse.

Die obigen Bestimmungen für die Absorption gelten für Kohlensäure zwischen 5—7 mm dicken Steinsalzplatten. Um den Einfluss dieser Platten auf die gefundenen Resultate zu ermitteln, führte ich einige Versuche aus, über die ich hier kurz berichten will.

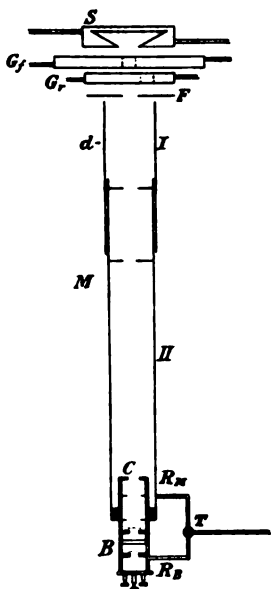


Fig. 2.

Nebenstehende Fig. 2 gibt uns eine schematische Darstellung der Anordnung.

M bedeutet eine vertikal stehende, innen geschwärzte Messingröhre, bestehend aus zwei Teilen (*I* und *II*), die mit Friktion in einander geschoben werden können; in das untere Ende desselben ist die Bolometerröhre *B* eingesetzt. *S* bedeutet die Wärmequelle (ein Hohlkörper von ca. 100° C.), *G_f* und *G_b* einen festen resp. einen beweglichen Wasserschirm. *F* ist ein festes Diaphragma; zwei solche sind ausserdem in der Röhre *M_{II}* angebracht. Durch den Hahn *T* kann Kohlensäure entweder durch die Röhre *R_M* oder durch die Röhre *R_B* in *M* und *B* eingelassen werden.

Bei allen Versuchen mit dieser Methode, bei welcher also die Röhre oben offen war, strömte die Kohlensäure langsam durch die Röhre *R_M* ein, um den Verlust durch Diffusion an dem oberen Ende der Röhre *M* zu ersetzen.

Aus Prof. KURLBAUM's Untersuchungen ¹⁾ wissen wir, dass die Angaben des Bolometers für dieselbe Bestrahlung in Luft und in Kohlensäure beträchtlich verschieden sind. Um diese Veränderung bei meinem Instrument zu untersuchen, ging ich

¹⁾ F. KURLBAUM, l. c.

de Weise vor. Die Mündung C der Bolometerröhre
 t einer Steinsalz- (oder Flussspat-) Scheibe bedeckt.
 mit trockener Kohlensäure gefüllt, während in B Luft
 die Strahlung (u_i) bestimmt. Hierauf wurde die Luft
 h trockene Kohlensäure ersetzt und gleichzeitig die
 bis zur Marke d heruntergeschoben, sodass die Kohlen-
 t über dem bestrahlten Bolometergitter auch jetzt die
 nge wie vorher hatte. Die Stärke (u_k) der Strahlung
 s Neue bestimmt. Die gleiche Wärmequantität wirkte
 Fällen auf den Bolometer ein, folglich giebt $\frac{u_k}{u_i}$ das
 zwischen den Angaben des Bolometers in Kohlensäure
 uft an. In untenstehender Tab. 7 sind die Werte
 die ich auf diese Weise erhalten habe. Über jeder
 st der Stoff angegeben, aus dem die Deckplatte bestand.

Tab. 7.

Flussspat	Steinsalz
Dicke: 1 mm.	Dicke: 5 mm.
1.100	1.103
1.104	1.103
1.102	—
1.105	—
1.101	—

giebt sich hiernach als Mittelwert $\frac{u_k}{u_i} = 1.103$. (Es

ohl kaum gesagt zu werden, dass dieser Wert nur für
 untersuchte Instrument Geltung hat.)

abe nun teils die Absorption in Kohlensäure ohne
 g von Steinsalzplatten bestimmt — aus welcher wir
 mit Hülfe der Tab. 1 die Korrektion für die Absorp-
 Steinsalzplatten würden berechnen können — teils
 versucht auf einem mehr direkten Wege zu dieser Kor-
 kommen. In Folgenden habe ich mit Hülfe der auf
 ere Weise bestimmten Korrektion die ohne Steinsalz-

platten erhaltenen Bestimmungen in die Werte umgerechnet, die sie mit solchen ergeben haben würden, um schliesslich diese so umgerechneten Werte mit den vorher (Tab. 1 oder Fig. 1) gefundenen zu vergleichen.

Zur Bestimmung der Kohlensäureabsorption wurde die Deckplatte vor der Mündung *C* weggenommen und die Stärke der Strahlung beobachtet, wenn die Röhren *M* und *B* mit Luft und mit Kohlensäure gefüllt waren; da wir die Veränderung in den Angaben des Bolometers auf jeden Fall kennen, können wir hieraus die Absorption in Kohlensäure berechnen, unter der Voraussetzung nämlich dass die Absorption der Luft vernachlässigt werden kann. Der Fehler, den wir hierbei begehen, liegt jedenfalls vollkommen innerhalb der Beobachtungsfehler. In Tab. 8 gebe ich das Ergebnis dieser Bestimmungen der Absorption.

Tab. 8.

Schichtdicke in cm von 1 Atm. Druck.	Absorption in Proc.
54.8	9.7
53.4	9.5
49.2	9.5
48.4	9.4
43.4	9.8
22.8	9.0

Um die Korrektur für die Absorption der Steinsalzplatten mehr direkt zu erhalten, wurde folgendes Verfahren angewendet.

Ein System von zwei Steinsalzplatten — ich führte dieselbe Untersuchung auch für Flusspat aus — wurde mit etwas Zwischenraum zwischen ihnen, in einen Rahmen auf dem Schirme *F* (Fig. 2) gelegt, so dass sie immer in dieselbe Lage gebracht werden konnten. Das Verhältnis (*g*) zwischen der Strahlung mit und ohne Platten wurde beobachtet, während zwischen Bolometer und Wärmequelle verschiedene Kohlensäureschichten sich befanden. In Tab. 9 sind die hierbei gefundenen Werte mitgeteilt.

Tab. 9.

Kohlensäure in cm.	<i>g</i>	
	Steinsalz	Flussspat
0	0.756	0.510
22.8	0.749	0.545
42.7	0.749	0.548
49.0	0.748	0.548

Von den bei diesem Versuch angewendeten Steinsalzplatten — es waren eben dieselben, die bei der 31 cm-Röhre angewendet wurden — war die eine 3 mm, die andere 5 mm dick; die beiden Flussspatscheiben besaßen jede eine Dicke von 1 mm.

Mittelst dieser Tabelle können wir nun die Korrektion für die Absorption der Steinsalzplatten berechnen.

Wir hatten für Luft $g_l = 0.756$
und z. B. für 49.0 cm Kohlensäure $g_k = 0.748$.

Bedeutet nun a die unkorrigirte Kohlensäureabsorption und a' die korrigirte, so ist offenbar

$$\frac{1 - a'}{1 - a} = \frac{g_l}{g_k}$$

(die Reflexion an den Oberflächen ist ja durch dieses Verfahren eliminirt) woraus wir, da a durch die vorhergehenden Versuche bekannt ist

$$\frac{a'}{a} = 0.91$$

erhalten.

Dieses Ergebnis stimmt ausnehmend gut mit dem überein, das Prof. ARRHENIUS ¹⁾ aus den Beobachtungen von RUBENS & TROWBRIDGE ²⁾ (= 0.93) berechnet hat. Dagegen hat Prof. VERY ³⁾ diese Korrektion bedeutend grösser (= 0.75) gefunden; die Verschiedenheit erklärt sich jedoch daraus, dass letzterer nicht die Reflexion an den Oberflächen eliminirt hat.

¹⁾ Sv. ARRHENIUS, l. c. p. 697.

²⁾ H. RUBENS & J. TROWBRIDGE, Wied. Ann. 60, p. 724. 1897.

³⁾ F. W. VERY, l. c. p. 108; Astrophys. Journ., Vol. 8, p. 211, Nov. 1898.

In Tab. 10 gebe ich schliesslich zur Vergleichung die aus Tab. 8 umgerechneten Werte, die also hier für Kohlensäure zwischen Steinsalzplatten gelten, zugleich mit den entsprechenden, der Kurve I Fig. 1 entnommenen.

Tab. 10.

Kohlensäure in cm von 1 Atm. Druck.	Absorption in Proc. nach	
	Tab. 8 (ber.). Kurv. I Fig. 1.	
54.8	10.7	10.7
53.4	10.4	10.6
49.2	10.4	10.5
48.4	10.3	10.4
43.4	10.2	10.4
22.8	9.9	9.6

Man sieht, dass die Übereinstimmung zwischen den entsprechenden Zahlen in Kol. 2 und 3 der obigen Tabelle recht befriedigend ist.

In dieser kleinen Arbeit ist also das Absorptionsvermögen der Kohlensäure von verschiedenen Schichtdicken — zwischen Steinsalzplatten — von *konstantem* Druck ($\frac{1}{2}$, 1 und 2 Atm.) ermittelt, und auch der Einfluss der Absorption der Steinsalzplatten auf die Kohlensäureabsorption bestimmt.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 474.)

Af utgifvarne:

La Feuille des jeunes naturalistes. Publ. par M. A. DOLLFUS. (4)
Année 31 (1901): N:o 368. 8:o.

Af förläggarne:

Bilder ur Nordens flora. H. 1. Stockholm, WAHLSTRÖM & WISTRAND.
1901. 8:o.

Af Dr. V. Carlheim-Gyllensköld:

Tillägg till de år 1899 och 1900 utfärdade instruktioner och program
för den svenska afdelningen af gradmätningsexpeditionen till Spets-
bergen. Stockholm 1901. 8:o.

Af författarne:

BERGENDAL, D., J. G. Agardh, minnestal. Malmö 1901. 8:o.

— J. G. Agardh, minnesteckning. Göteborg 1901. 8:o.

CLEVE, P. T., The seasonal distribution of Atlantic Plankton organ-
isms. Göteborg 1901. 8:o.

HOLST, N. O., The Glacial period and oscillation of the land. Lond.
1901. 8:o.

JOHNSON, K. R., 2 småskrifter. 8:o.

LAGERHEIM, G., 5 småskrifter. 8:o.

NATHORST, A. G., Två somrar i Norra Ishafvet. H. 10. Sthlm 1901.
8:o.

— Bidrag till nordöstra Grönlands geologi. Sthlm 1901. 8:o.

WIMAN, A., Bemerkungen über eine von Gylden aufgeworfene Wahr-
scheinlichkeitsfrage. Lund 1901. 8:o.

WITTRÖCK, V., Om höstväxter. Sthlm 1901. 12:o.

ALBERT I, prince de Monaco, Resultats des campagnes scientifiques.
Fasc. 15. Monaco 1900. Fol.

BERTHELOT, M., Les carbures d'hydrogène 1851—1901. T. 3. Paris
1901. 8:o.

BUCHANAN, J. Y., On a solar calorimeter. London. 8:o.

KÖPPEN, W., Versuch einer Klassifikation der Klimate. Lpz. 1901.
8:o.

MEINARDUS, W., Einige Beziehungen zwischen der Witterung und
den Ernte-Erträgen in Nord-Deutschland. Berl. 1900. 8:o.

ROY, J. E., Voyage de Kalm au Canada. Levis 1900. 8:o.

WOLFER, A., Sur l'existence, la distribution et le mouvement des
principaux centres présumés de l'activité solaire. Rome 1901. 4:o.

ZEUNER, G., Technische Thermodynamik. Bd 2. Lpz. 1901. 8:o.

Stockholm 1901. Kungl. Boktryckeriet.

.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 58.

1901.

N:o 7.

Onsdagen den 11 September.

INNEHÅLL.

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	aid. 491.
WINKLER, Zur Zusammensetzung des Eisens von Ovivak in Grönland und der bituminösen Kohle (des Kolms) aus der cambrischen Formation Westergötlands	» 495.
NORDENSKIÖLD, Einige Bemerkungen zu der vorstehenden brieflichen Mittheilung des Herrn Professors Clemens Winkler	» 505.
JÄDERHOLM, Beiträge zur Kenntnis der Laubmoosflora Novaja Semljas	» 515.
ERICSON-AURÉN und W. PALMÉR, Ueber die Auflösung von Metallen	» 525.
WIMAN, Über die durch Radicale auflösbaren Gleichungen, deren Grad eine Potenz von 2 ist	» 543.
MURBECK, Über einige amphicarpe nordwestafrikanische Pflanzen	» 549.
CLEVE, A., Bidrag till kännedom om ytterbium	» 573.
EKHOLM, Sur la hauteur de l'atmosphère homogène et la masse de l'atmosphère	» 619.
PETRINI, Continuité et discontinuité des dérivées du potentiel	» 633.
Skänker till Akademiens bibliotek och till Zoologiska stationen Kristineberg	sidd. 493, 504, 514, 542, 572, 632, 648.

Tillkännagafs, att bland Akademiens inländska ledamöter Presidenten HANS LUDVIG FORSSELL och Intendenten för Riksmuseets mineralogiska afdelning, Professorn Friherre ADOLF ERIK NORDENSKIÖLD med döden afgått.

Med anledning af Kongl. Maj:ts remiss å en på diplomatisk väg framförd anmodan från Kejsrerliga Tyska Regeringen om deltagande från Sveriges sida i internationella jordmagnetiska observationer samtidigt med dylika observationers anställande af de under åren 1901 och 1902 pågående sydpolar-expeditionerna, afgåfvo Herrar DAHLANDER och HASSELBERG infordradt utlåtande i ämnet, hvilket utlåtande af Akademien godkändes.

Från den internationella Akademiska Associationen hade inkommit en cirkulärskrifvelse om åtgärders vidtagande för underlättande af internationel utlåning af handskrifter, öfver hvilket ärende Herrar RETZIUS och DAHLGREN afgåvo infordradt utlåtande, som af Akademien för dess del godkändes, skolande underdånig framställning i ämnet till Kongl. Maj:t aflåtas.

Anmälades, att berättelser om resor, som för vetenskapliga ändamål blifvit på bekostnad eller med understöd af Akademien utförda, blifvit afgifna dels af Docenten H. O. JUEL, som i egenskap af Letterstedtsk stipendiat utfört resor till Tyskland, Frankrike och Medelhafstrakterna för idkande af botaniska forskningar, och dels af Fil. Kandidaten A. G. KELLGREN, som under resor i Lappmarkerna jemväl idkat botaniska studier.

Herr ERIKSSON redogjorde för innehållet af Docenten JUELS ofvannämnda reseberättelse.

På tillstyrkan af komiterade antogos följande afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter:

i Akademiens Handlingar: »Untersuchungen über den Blattbau der Mangroven Pflanzen» af Professor ARESCHOUG;¹⁾

i Bihanget till Handlingarne: 1:o) »Ex herbario Regnelliano. Part. 5. Violaceæ, Vitaceæ, Rhamnaceæ, Eriocaulaceæ» af Doktor G. O. MALME, 2:o) »Beiträge zur Kenntniss der südamerikanischen Arten der Gattung Pterocaulum» af densamme, 3:o) »Beiträge zur Kenntniss der Hieracium-flora Oesels» af Amanuensen H. DAHLSTEDT;

i Öfversigten: de i innehållsförteckningen angifna 9 uppsatser.

Följande skänker anmälades:

Till Akademiens Zoologiska Station Kristineberg.

Af en person, som önskar icke blifva nämnd, har till stationens föreståndare Professor THÉEL ingått följande skrifvelse:

»Sedan det kommit till min kunskap, att Vetenskapsakademiens zoologiska station Kristineberg är i behof af en kraftig motor för att drifva hafsvattnet i tillräcklig mängd upp i akvarierna, äfvensom af

¹⁾ Sedermera återtagen af författaren.

lämplig belysning i ett tillämnadt vinterlaboratorium, anhåller jag härmed att till nämnda station såsom gåfva få öfverlemna en fotogenmotor om 4 å 5 hästkrafter jämte passande pump samt därjemte ett acetyलगasverk om 30 lågor, och förbinder jag mig att leverera motorn och gasverket, när helst det för stationen befinnes lämpligast.»

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *K. Statistiska centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. C: 1900; O: XXXIII; T: XXVIII; V: XVII; Y I: 1899. 1901. 4:o.

— *K. Nautisk-meteorologiska byrån.*

Medelvattenstånd i Mälaren och Saltsjön hänfödda till vestra sluss-tröskeln i Stockholm kl. 8 f. m. fr. o. m. år 1894 t. o. m. år 1900.

Suppl. 1 till Iakttagelser öfver Mälarens vattenstånd insaml. o. bearb. af F. S. MALMBERG. 1901. 8:o.

— *Generalstaben.*

Rikets allmänna kartverk, 1 : 200,000. Bl. 47. 1901. Fol.

— *Karolinska mediko-kirurgiska institutet.*

Inbjudning till prof. E. HOLMGRENS installation. 1901. 4:o.

— *K. Kommerskollegium.*

Arbetsstatistik. III: 1. 1901. 8:o.

— *Svenska trädgårdsföreningen.*

Tidskrift. Ny följd. 1901: Nr 5. 8:o.

— *Svenska turistföreningen.*

Vägvisare. N:o 17. 1901. tv. 4:o.

— *Sveriges geologiska undersökning.*

Ser. Aa. Kartblad med beskrifningar. N:o 115. 8:o & Fol. 1901.

» Bb. Specialkartor med beskrifn. N:o 9: Atlas. 1901. Fol.

» C. Afhandlingar och uppsatser. N:o 172, 180, 183 & Atlas, 184—188. 1899—1901. 8:o, 4:o & Fol.

» Ca. Afhandlingar och uppsatser i 4:o. N:o 1 & Kartor. 1900.

Uppsala. *Geological Institution of the university.*

Bulletin. Vol. 5 (1900): P. 1. 8:o.

Aachen. *K. Preuss. Meteorologisches Institut.*

Ergebnisse der Beobachtungen. Jahr 1900. 4:o.

Agram. *Meteorologisches Observatorium.*

Meteorologische Beobachtungen in den Jahren 1898—1900. tv. fol.

— *Societas historico-naturalis Croatica.*

Glasnik. Godina 12: Broj 4—6. 1901. 8:o.

Albany. *New York state museum.*

Bulletin. N:o 45. 1901. 8:o.

Amsterdam. *Wiskundig genootschap.*

Nieuw archief voor wiskunde. (2) D. 5: St. 2. 1901. 8:o.

Revue semestrielle des publications mathématiques. T. 9: P. 2 (1900/01). 8:o.

Angers. *Société d'études scientifiques.*

Bulletin. N. S. Année 29 (1899). 8:o.

- Auxerre.** *Société des sciences historiques et naturelles de l'Yonne.*
Bulletin. Vol. 54 (1900). 8:0.
- Baltimore.** *Peabody Institute.*
Annual report. 34 (1900/01). 8:0.
— *Johns Hopkins University.*
Circulars. Vol. 20 (1901): N:o 152—153. 4:0.
American chemical journal. Vol. 25 (1901): N:o 3—5. 8:0.
American journal of mathematics. Vol. 23 (1901): N. 2. 4:0.
The American journal of philology. Vol. 21 (1900): 4. 8:0
Studies in historical and political science. Ser. 19: N:o 4—5. 1901. 8:0.
- Batavia.** *K. Natuurkundige Vereeniging in Nederl.-Indië.*
Natuurkundig tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. D. 60. 1901. 8:0.
- Belgrad.** *Académie Royale de Serbie.*
Spomenik. 35; 38. 1901, 1900. 4:0.
Posebna dela.
VOJNOVIĆ, L., Dubrovnik i osmansko carstvo. 1. 1898. 8:0.
Svečani pomen prosvetnom dobrotvoru pokojnom Dimitrju Stamenkovu trgovcu iz Beograda 8. Sept. 1900. god. 1901. 8:0.
Stojanovi Katalog rukopisa i starich štampanich knjiga. 1901. 8:0.
- Bergen.** *Museum.*
Aarbog. 1901: H. 1. 8:0.
- Berlin.** *K. Preussische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. 1901: 23—38. 8:0.
— *K. botanischer Garten und Museum.*
Notizblatt. N:o 26. 1901. 8:0.
— *Deutsche geologische Gesellschaft.*
Zeitschrift. Bd 53 (1901): H. 1. 8:0.
— *Deutsche physikalische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Jahrg. 3 (1901): N:r 8—10. 8:0.
— *Entomologischer Verein.*
Berliner entomologische Zeitschrift. Bd 46 (1901): H. 1. 8:0.
- Besançon.** *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Procès-verbaux et mémoires. Année 1899. 8:0.
- Blue Hill.** *Meteorological observatory.*
Bulletin. N:o 1. 1900. 4:0.
- Bonn.** *Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*
Sitzungsberichte. 1900: H. 2. 8:0.
— *Naturhistorischer Verein d. preuss. Rheinlande.*
Verhandlungen. Jahrg. 57 (1900): H. 2. 8:0.
— *K. Sternwarte.*
Veröffentlichungen. N:o 5. 1901. 4:0.
- Bordeaux.** *Société Linnéenne.*
Actes. Vol. 55. 1900. 8:0.
Catalogue de la bibliothèque. Fasc. 2. 1901. 8:0.

(Forts. à sid. 504.)

Zur Zusammensetzung des Eisens von Ovifak in Grönland und der bituminösen Kohle (des Kolms) aus der cambrischen Formation Westergötlands.

VON CLEMENS WINKLER.

Auszug aus einem Briefe an den Professor Freiherrn A. E. NORDENSKIÖLD.

[Mitgetheilt am 11. September 1901 durch A. E. NORDENSKIÖLD.]

. . . . Es handelte sich, wie Sie sich dessen gefälligst erinnern wollen, darum, nachzuweisen, ob in dem mir überlassenen Kohlen-Nickel-Eisen von Ovifak ein Rückhalt von Kohlenoxyd enthalten sei, in welchem Falle die von mir ausgesprochene Vermuthung der Ablagerung des Eisens aus seiner Carbonyl-Verbindung (Ber. d. math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Sitzung vom 5. Februar 1900) Bestätigung erfahren haben würde.

Diesen Nachweis zu erbringen, war um deshalb sehr schwierig, weil es sich um nur sehr minimale Einschlüsse von Kohlenoxyd handeln konnte, denn das Eisencarbonyl zerfällt bei der Erhitzung glatt in metallisches Eisen und gasförmig freiwerdendes Kohlenoxyd. Letzteres könnte also eigentlich nicht mehr vorhanden sein. Aber angenommen selbst, das Eisen hätte einen kleinen Rest davon als mechanischen Einschluss zurückgehalten, so würde dessen Austreibung durch erneute, etwa bis zum Glühen gesteigerte Erhitzung schon um deshalb resultatlos verlaufen müssen, weil das vorhandene Eisenoxyd mehr als ausreichend ist, seine Verbrennung zu Kohlensäure herbeizuführen. Der einzige Weg, zum Nachweis etwa vorhandenen Kohlenoxydes zu

gelingen, bestand darin, dass man das fragliche Eisen durch Erwärmen mit Chlorwasserstoffsäure in Lösung brachte und das dabei entwickelte Wasserstoffgas der Behandlung mit einem geeigneten Absorptionsmittel für Kohlenoxyd unterwarf. Wie ich früher (Zeitschrift für analyt. Chemie 28, 1889, S. 275) dargethan habe, eignet sich als solches vorzüglich eine Auflösung von Kupferchlorür in Chlornatrium, und man kann darin noch 0,01 ccm. = 0,0000125 gr. Kohlenoxyd mit Sicherheit nachweisen, wenn man sie nach vorausgegangener Verdünnung mit einem Tropfen Natrium-Palladiumchlorür versetzt, wobei sich dann schwarze Wolken von feingetheiltem Palladium abscheiden.

Der Versuch wurde zunächst mit dem in grösserer Menge mir zu Verfügung gestellten »Verwitterten Kohlen-Nickel-Eisen von Ovifak« vorgenommen. 25 gr. desselben wurden mit 150 ccm. Chlorwasserstoffsäure von 1,19 spez. Gew. in einem Entwicklungskolben gelinde erwärmt, das sich entwickelnde Wasserstoffgas, welches Kohlenwasserstoff und etwas Schwefelwasserstoff enthielt, erst durch Kalilauge, dann durch Wasser gewaschen und nun sehr langsam durch 25 ccm. einer Kupferchlorürlösung geleitet, die 100 gr. Kupferchlorür im Liter nahezu gesättigter Kochsalzlösung enthielt. Der Versuch nahm drei Stunden in Anspruch; nach Beendigung desselben wurde ein Theil der Kupferchlorürlösung in einem Probircylinder mit der vierfachen Menge Wasser verdünnt und ein Tropfen Natrium-Palladiumchlorür zugegeben: Es trat keine Schwärzung ein, es war also in dem untersuchten Eisen kein Kohlenoxyd enthalten gewesen. Ebenso wenig liess sich in dem nicht oxydirten, in ein Glasrohr eingeschmolzenen Kohlen-Nickel-Eisen von Ovifak, welches ich Ihrer Güte verdanke, ein Kohlenoxydgehalt nachweisen, ein solcher war aber auch nicht in dem metallischen Nickel aufzufinden, welches durch Erhitzung von dampfförmigen Nickelcarbonyl dargestellt worden war. Dieser negative Ausfall ist insofern nicht befremdlich, als ja eben die Carbonylverbindungen des Eisens und des Nickels in höherer Temperatur in ihre Componenten zerfallen.

Das »Verwitterte Kohlen-Nickel-Eisen von Ovivak« ist auf meine Veranlassung von Herrn PHILIPP A. IWANOFF aus St. Saratow in Russland, einem in meinem Laboratorium arbeitenden, sehr geschickten jungen Analytiker, untersucht worden, und es hat mir Derselbe über seine Arbeit das Folgende berichtet:

Das Untersuchungsobjekt ist magnetisch, spröde, sehr porös und oberflächlich stark oxydirt. Durch Zerkleinern und Sieben lassen sich die metallischen von den oxydischen Theilen trennen. Erstere bestehen aus groben Körnern, die sich auf dem Amboss durch Hammerschläge weiter zerkleinern lassen. Sie zeigen dann auf dem Bruche dunkelgraue Farbe und metallischen Glanz. Der oxydische Theil lässt sich ohne Mühe zu feinem braunem Pulver zerreiben.

Beim Erhitzen im einseitig geschlossenen Glasrohr liefert die Substanz sauer reagirendes Wasser und später eine geringe Menge weissen, an der Luft sich gelblich färbenden Sublimates, welches vorwiegend aus den Chloriden des Eisens und Natriums bestand, aber auch wenig Chlorkalium und Schwefelsäure enthielt.

Ueber die Einwirkung von Lösungsmitteln auf das verwitterte Kohlen-Nickel-Eisen ist Folgendes zu sagen:

Schon durch Wasser wird ein merklicher Betrag an löslichen Verbindungen extrahirt, doch muss die Behandlung damit unter Luftabschluss erfolgen und mehrere Tage andauern, wenn sie erschöpfend sein soll. Die Lösung trübt sich an der Luft unter Abscheidung von braunem basischem Eisenoxydsalz; ursprünglich enthält sie das Eisen in Gestalt von schwefelsaurem Eisenoxydul und Eisenchlorür neben den Chloriden des Natriums, Kaliums und Magnesiums.

Chlorwasserstoffsäure führt anfangs nur den oxydischen Theil in Gestalt von Eisenchlorid in Lösung über, bald darauf beginnt aber auch das metallische Eisen sich unter Wasserstoffentwicklung zu lösen, namentlich bei Anwendung von Wärme. Das Wasserstoffgas besitzt den bekannten unangenehmen Geruch, wie er sich beim Auflösen kohlenstoffhaltigen Eisens bemerkbar macht.

Auch Salpetersäure äussert zunächst ihren Angriff vorwiegend auf das vorhandene Oxyd und greift dann erst das Metall an. Die in der Kälte bereitete Auflösung zeigt einen auffallenden Gehalt an Chlor, der auch zur Bestimmung gebracht wurde. Derselbe gehört ursprünglich der Rostschicht an und ist darin als basisches Oxychlorid enthalten, doch liessen sich auch geringfügige Mengen Calcium- und Magnesiumchlorid nachweisen, die durch Wasser nicht extrahirt worden waren.

In Salpeter-Salzsäure löst sich das Kohlen-Nickel-Eisen beim Erwärmen seiner ganzen Masse nach leicht auf, doch bleibt dabei eine beträchtliche Menge Rückstand, welcher der mikroskopischen Untersuchung nach hauptsächlich aus Feldspath (Plagioklas) mit eingesprengten schwarzen Partikelchen besteht, welche Letztere man für schwarzen Spinell und Augit halten kann.

Bei der Untersuchung wurden der in Wasser lösliche und der in Säure lösliche Theil gesondert der Analyse unterworfen. Zur Extraktion mit Wasser dienten 20 gr. Substanz, und es wurde dieselbe unter Luftabschluss drei Tage lang fortgesetzt, worauf rasche Filtration der Lösung und Auswaschen des Rückstandes erfolgte. Letzterer wurde sodann mit Salpetersäure in der Kälte behandelt, um in der erhaltenen Lösung das Chlor durch Ausfällung mit Silbernitrat bestimmen zu können. Das Filtrat wurde vom Silberüberschuss befreit, der ungelöst gebliebene Rest mit Königswasser behandelt und beide Lösungen vereinigt, worauf die Analyse nach dem gewöhnlichen Gange erfolgte.

Die Bestimmung des Kohlenstoffs erfolgte unter Anwendung einer besonderen Substanzmenge durch Ueberführung desselben in Kohlensäure unter Anwendung von Chrounsäure und Schwefelsäure als Oxydationsmittel; ebenso wurden zur Bestimmung des Schwefels im Eisen und derjenigen der Schwefelsäure im oxydischen Theil, ferner zur Bestimmung des Sauerstoffs und des Wassers besondere Mengen Substanz verwendet.

Ergebniss der Gesamtanalyse war folgendes:

	Fe = 0,57	2,11 % Wässrige Lösung.
	Na = 0,18	
	K = 0,11	
	Mg = 0,01	
	Cl = 0,68	
	SO ₃ = 0,47	89,03 % Saure Lösung (metallischer & oxydischer Theil).
Sulfatbildung	O = 0,01	
	Fe = 75,34	
	Ni = 1,85	
	Co = 0,48	
	Cu = 0,13	
	C = 2,29	
	S = 0,18	
	Ca = 0,07	
	Mg = 0,04	
	Cl = 0,96	8,96 % Unlöslicher Rück- stand.
	SO ₃ = 0,06	
	O = 4,42	
	H ₂ O = 3,21	
Rückstand	= 8,96	

100,10 %.

oxydischen, einen braunen Rost bildenden Theil sind
selbständig bestehend bekannte Verbindungen an-

hes Hydroxyd

$\text{Fe}_4(\text{OH})_6\text{O}_3$ (entsprechend $2\text{Fe}_2\text{O}_3 + 3\text{H}_2\text{O}$)

hes Oxychlorid

$\text{Fe}_{14}\text{Cl}_6(\text{OH})_{18}\text{O}_9$ (entsprechend $6\text{Fe}_2\text{O}_3, \text{Fe}_2\text{Cl}_6 + 9\text{H}_2\text{O}$),

hes Sulfat

$\text{Fe}_8(\text{OH})_{22}\text{SO}_4$ (entsprechend $4\text{Fe}_2\text{O}_3, \text{SO}_3 + 11\text{H}_2\text{O}$).

ringfügigen Mengen vorhandenen Calciums und Mag-
kommen kaum in Betracht; sie sind als mechanisch
ene Chloride in Rechnung gesetzt worden.

Hieraus berechnet sich für das verwittrte Kohlen-Nickel-Eisen folgende Zusammensetzung:

Fe	= 64,66	} 69,59 % metallischer Theil.
Ni	= 1,85	
Co	= 0,48	
Cu	= 0,13	
C	= 2,29	
S	= 0,18	
$\text{Fe}_4(\text{OH})_6\text{O}_3$	= 12,98	} 18,79 % oxydischer Theil.
$\text{Fe}_{14}\text{Cl}_6(\text{OH})_{18}\text{O}_9$	= 4,83	
$\text{Fe}_8(\text{OH})_{22}\text{SO}_4$	= 0,68	
CaCl_2	= 0,20	
MgCl_2	= 0,16	
FeSO_4	= 0,89	} 2,03 % in Wasser löslicher Theil.
FeCl_2	= 0,43	
NaCl	= 0,46	
KCl	= 0,21	
MgCl_2	= 0,04	
Unlöslicher Rückstand =	8,96	} 9,62 %.
Uebrigcs Wasser	= 0,66	
		100,03 %.

Das »übrige Wasser« ist dasjenige, welches zwar gefunden worden ist, sich aber in der Rechnung nicht unterbringen lässt. Es kann als hygroskopisches Wasser angesehen werden, schliesst aber auch die Analysen-Fehler in sich. Man kann jedoch auch annehmen, dass es den im wasserlöslichen Theile enthaltenen Salzen zugehört. So würden die gefundenen 0,89 % FeSO_4 schon 0,71 % H_2O erfordern, um in $\text{FeSO}_4 + 7\text{H}_2\text{O}$ überzugehen.

In Prozenten ausgedrückt würde die Zusammensetzung der Einzelbestandtheile des verwittrten Kohlen-Nickel-Eisens sein:

1. *Metallischer Theil:*

Fe	= 92,91
Ni	= 2,66
Co	= 0,69
Cu	= 0,19
C	= 3,29
S	= 0,26
	<hr/>
	100,00.

2. *Oxydischer Theil:*

$\text{Fe}_4(\text{OH})_6\text{O}_3$. . .	= 68,82
$\text{Fe}_{14}\text{Cl}_6(\text{OH})_{18}\text{O}_9$.	= 25,65
$\text{Fe}_8(\text{OH})_{22}\text{SO}_4$. .	= 3,62
CaCl_2	= 1,06
MgCl_2	= 0,85
	<hr/>
	100,00.

3. *In Wasser löslicher Theil:*

FeSO_4	= 43,84
FeCl_2	= 21,18
NaCl	= 22,66
KCl	= 10,35
MgCl_2	= 1,97
	<hr/>
	100,00.

Die Thatsache, dass das Grönländische Eisen in Museen leichter verwittert, als an freier Luft, ist vielleicht dadurch zu erklären, dass bei beschränktem Feuchtigkeitszutritt sich lösliche Oxychloride des Eisens zu bilden vermögen, während bei ungehindertem und reichlichem Feuchtigkeitszutritt die Entstehung unlöslicher basischer Chloride eintritt.

**Kolm, Kohlen von der Cambrischen Formation
Westergötlands.**

(Die Asche enthält bis 3 % Uran.)

Die Untersuchung der Kohle erfolgte durch Herrn HANS LIEBERT aus Posen.

Die Kohle war von bräunlich-schwarzer Farbe, zeigte matten Glanz, muscheligen Bruch, dichte Struktur, gab bräunlich-schwarzen Strich und liess sich nur schwierig zerkleinern.

Die vollkommene Einäscherung der pulverisirten Kohle erfolgte langsam. Bei der Bestimmung des Aschengehaltes wurde ein Sauerstoffstrom in Anwendung gebracht.

Die Bestimmung des Gehaltes an hygroskopischem Wasser wurde durch Trocknung der gepulverten Kohle bei 100° in einen Strom von Kohlensäuregas und Auffangung des Wassers im gewogenen Chlorcalciumrohr vorgenommen.

Bei der Untersuchung wurden Kohlenstoff und Wasserstoff durch Elementaranalyse bestimmt und dabei der Sauerstoffgehalt aus der Differenz gefunden. Die Bestimmung des Stickstoffs erfolgte nach der Methode von KJELDAHL, diejenige des Gesamtschwefels durch Erhitzung des mit Kobaltoxyd und kohlensaurem Natrium gemengten Kohlepulvers im Sauerstoffstrom. Der der Asche zugehörige Schwefelgehalt wurde in dieser besonders bestimmt und vom Gesamtschwefelgehalt in Abzug gebracht.

Gefunden:

C	=	60,24
H	=	4,64
O	=	3,50
N	=	0,50
S	=	3,99
H ₂ O	=	4,85
Asche	=	22,28 (entsprechend 0,05 S)
		<hr/> 100,00.

Auffallend erscheint der niedrige Sauerstoffgehalt, der an Anthracit erinnert.

Die aschenfrei gedachte Kohle enthält:

C	=	88,10	
H (disponibel)	=	6,14	} 6,78	
H (gebunden)	=	0,64		
O	=	5,12	
			<hr/> 100,00.	

othe Asche der Kohle enthielt:

U_3O_8	=	2,87
Fe_2O_3	=	19,65
Al_2O_3	=	21,14
Mn_2O_3	=	0,32
MgO	=	1,58
CaO	=	Spur
K_2O	}	5,98 (aus der Differenz bestimmt)
Na_2O		
SO_3	=	0,60
SiO_2	=	49,86
		<hr/>
		100,00.

ur Untersuchung einer anderen Aschenprobe wurden nur O_8 gefunden.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 494.)

Bordeaux. *Société des sciences physiques et naturelles.*

Mémoires. (5) T. 5: Cah. 2. 1901. 8:o.

Procès-verbaux des séances. Année 1899/1900. 8:o.

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le dép. de la Gironde. 1899/1900. 8:o.

Boston. *American academy of arts and sciences.*

Proceedings. Vol. 36 (1900/1901): N:o 20—29. 8:o.

Breslau. *K. Universitäts-Sternwarte.*

Mitteilungen. Bd 1. 1901. 4:o.

Brooklyn. *Museum of the Brooklyn institute of arts and sciences.*

Science Bulletin. Vol. 1: No. 1. 1901. 8:o.

Bruzelles. *Académie Royale de Belgique.*

Classe des lettres... Bulletin. 1901: N:o 5—7. 8:o.

» des sciences. Bulletin. 1901: N:o 5—7. 8:o.

— *Musée du Congo.*

Annales. Botanique. Sér. 3. T. 1: Fasc. 1. 1901. Fol.

» Zoologie. Sér. 1. T. 1: Fasc. 6. 1900. Fol.

Mission scientifique du Ka-Tanga. Mém. 3—11 & 2 kartor. 1899—1900. 4:o.

— *Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie.*

Bulletin. T. 15 (1901): Fasc. 3—4. 8:o.

— *Société Royale malacologique de Belgique.*

Annales. T. 35 (1900). 8:o.

Budapest. *Magyar tudományok akadémia.*

Almanach. 1901. 8:o.

Archæologiai értesítő (Archæologisches Bulletin). Kötet 20 (1900): Sz. 3—5; 21 (1901): 1—2. 8:o.

Mathematikai és természettudományi értesítő (Math. u. naturwiss. Anzeiger). Kötet 18: Füz. 3—5; 19: 1—2. 1900—1901. 8:o.

Mathematikai és természettudományi közlemények (Math. u. naturwiss. Mittheilungen). Kötet 27: Sz. 5. 1901. 8:o.

Rapport sur les travaux. 1900. 8:o.

DADAY, J., A magyarországi kagylósrakok magánrajza. 1900. 8:o.

— *K. Ungarische geologische Anstalt.*

Földtani közlöny (Geolog. Mittheilungen). Kötet 30 (1900): Füz. 10—12; 31 (1901): 1—4. 8:o.

— *Statistisches Bureau der Haupt- u. Residenzstadt Budapest.*

Publicationen. 29: 1; 30—31. 1900—1901. 8:o.

— *Ungarische ornithologische Centrale.*

HERMAN, OTTO, A madarak hasznáról és káráról. (Über die Nützlichkeit und Schädlichkeit der Vögel). 1901. 8:o.

— *Musée national de Hongrie.*

Természettajzi füzetek. (Journal de zoologie, de botanique, de minéralogie et de géologie.) Vol. 24 (1901). P. 1 2. 8:o.

(Forts. á sid. 514.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1901. N:o 7.
Stockholm.

**Einige Bemerkungen zu der vorstehenden brieflichen
Mittheilung des Herrn Professors CLEMENS
WINKLER.**

VON A. E. NORDENSKIÖLD.

[Mitgetheilt am 11. September 1901.]

I. Zur Analyse des Eisens von Ovifak.

Es sind schon eine Menge chemische und mikroskopische Analysen des Eisens von Ovifak und der dasselbe begleitenden Steinarten ausgeführt worden, so z. B. VON A. E. NORDENSKIÖLD (1870), G. LINDSTRÖM (1870), TH. NORDSTRÖM (1870), DAUBRÉE (1870 u. 1872), WÖHLER (1872), G. NAUCKHOFF (1874), K. J. V. STEENSTRUP (1875, 1876 u. 1882), TÖRNEBOHM (1878), L. SMITH (1879), J. LORENZEN (1882), E. COHEN (1897), TH. NICOLAU (1901) u. a. Eine Zusammenstellung der meisten dieser Analysen nebst Literaturanweisungen findet man in TH. NICOLAU's Untersuchungen der eisenführenden Gesteine der Insel Disko. Meddelelser om Grönland, H. XXIV, Kjöbenhavn, 1901. Um die bedeutenden Abweichungen der Ergebnisse der Analysen von einander zu erklären, ist es vielleicht gut, daran zu erinnern, dass das grönländische Eisen sowohl in seiner chemischen, wie mineralogischen Zusammensetzung sehr wechselt. Man trifft hier fast alle Varietäten der Meteoritenreihe: kieselfreie Holosiderite, Siderite mit eingesprengten Silicaten, Pallasite, Sporadosiderite, sehr kohlenreiche Substanzen, Kohlen. Nickeleisen ohne Wid-

manstättensche Figuren, Nickeleisen mit Widmanstättenschen Figuren, fast unmittelbar nach dem Zerschlagen an der Luft zerfallendes Eisen, sich an der Luft ziemlich gut haltendes Eisen, z. B. das schöne, c. 4,000 Kgr. wiegende Stück, das ich der Universität zu Helsingfors gegeben habe, unter der Bedingung, um es vor dem Verwittern zu schützen, es nicht im Museum, sondern im Freien aufzubewahren. Das Verwittern ist eine sehr fatale, aber, wie wohl alle Vorsteher grösserer Meteoritensammlungen beobachtet haben, sehr gewöhnliche Eigenschaft nicht nur des grönländischen Eisens, sondern auch der meisten bekannten Meteoreisen.

Das Vorkommen von Nickeleisen in anstehendem Basalt auf Disko wurde von mir schon im Jahre 1870 entdeckt (A. E. NORDENSKIÖLD, Redogörelse för en expedition till Grönland. Öfversigt af Kongl. Vetensk. Akad. Förhandl. Dec. 1870). Meine Erklärung des Ursprunges dieser merkwürdigen kosmischen oder pseudokosmischen Mineralien habe ich in der Abhandlung »Om den geologiska betydelsen af kosmiska ämnens nedfallande till jordytan, särskildt med afseende på den Kant-Laplace'ska teorien«, gedruckt in »Studier och Forskningar, föranledda af mina resor i den höga norden«. Stockholm, 1883, S. 205—227 ¹⁾), dargelegt und begründet.

Seitdem habe ich meine Ansichten in dieser sowohl für die Kosmologie, wie für die Geologie wichtigen Frage insofern modificirt, als ich annehme, dass, wie aus dem Vorkommen von gediegenem Nickeleisen in den *Blasenräumen* des Basalts bei Ovifak deutlich hervorgeht, sich gediegenes Nickeleisen durch Transport des Eisens im Innern der Basaltmagma als Eisen-carbonyl auch secundär in den Blasenräumen des Basalts gebildet hat.

In dieser Abhandlung über die Kant-Laplace'sche Theorie suche ich darzuthun: 1) Dass sich die Erde durch allmälliche

¹⁾ A. E. NORDENSKIÖLD. Ueber die geologische Bedeutung des Herabfallens kosmischer Stoffe auf die Oberfläche der Erde mit besonderer Berücksichtigung der Kant-Laplaceschen Theorie in »Studien und Forschungen, veranlasst durch meine Reisen im hohen Norden«. Leipzig. F. A. BROCKHAUS. 1885.

Anhäufung von kosmischem Staub gebildet hat, und *nicht*, wie man gewöhnlich annimmt, durch Condensation einer gasförmigen Masse zu einem glühenden, tropfbar flüssigen Sphäroid, das später durch Abkühlung mit einer festen, für das Thier- und Pflanzenleben geeigneten Kruste bedeckt worden ist; 2) dass Anhäufung von kosmischem Material auf der Erde noch immer stattfindet, wenn auch vielleicht in geringerem Massstabe als in früheren geologischen Zeiten; 3) dass dieser kosmische Staub und die grösseren Staubindividuen, die wir Meteorite nennen, theils von Staubmassen, denen die Erde bei ihrer Bewegung im Weltraume zufällig begegnet, theils von Staubwolken, die sich um die Sonne in Kometenbahnen bewegen, theils auch von einem grossen Staubring, der unsere Erde ungefähr in der Aequatorialebene umgiebt und der wahrscheinlich auch die Ursache des Zodiacallichtes bildet, herrühren; 4) dass das plötzliche Auftreten von eigenthümlichen chemischen Bestandtheilen in grossen geologischen Horizonten leicht durch die Annahme zu erklären ist, dass unser Sonnensystem auf seiner Bahn im Weltraum weit-ausgedehnte kosmische Wolken von verschiedener Zusammensetzung durchkreuzt hat; 5) dass die basaltischen Gebilde von kosmischen Sedimenten herrühren, die sich unter günstigen Umständen zu dem über weite Gebiete der Erde verbreiteten Basaltgesteine erhärtet haben. Bisweilen hat sich auch die ursprüngliche basaltische Magma, nachdem sie von anderen, mächtigen Sedimenten überlagert worden ist, durch chemische Veränderungen im Innern bis zum Glühen und Schmelzen erhitzt und dann als geschmolzene Lava in Spalten nach oben und unten ausgebreitet. Hierdurch sind die vulcanischen Erscheinungen hervorgerufen worden, die zu dem Ultra Plutonismus Veranlassung gegeben haben.

Giebt es im Innern der grönländischen Basaltgebilde noch Räume, die mit unerhärteter Basaltmagma erfüllt sind? Zwei Beobachtungen, die eine von mir im Jahre 1870, die andere von K. J. V. STEENSTRUP im Jahre 1871 gemacht, sprechen möglicherweise dafür.

Als ich im Jahre 1870 den Umanakfjord besuchte, traf ich bei einer Excursion in der Nähe von Kome einen Strom von schwarzer, halb flüssiger Basaltmagma (?), die sich hier von dem Basaltlager, welches die Kreidelager bedeckte, über einen steilen Abhang langsam herabwälzte. Mit anderen Untersuchungen beschäftigt, kam ich leider nicht dazu, dieser Erscheinung eine nähere Untersuchung zu widmen.

In Meddelelser om Grönland, H. XXIV, Kjöbenhavn, 1901, S. 280, berichtet STEENSTRUP über eine ähnliche, ebenfalls nicht weiter verfolgte Beobachtung Folgendes:

»Als ich mich 1871, nachdem ich das Waigatt umfahren, bei Ujaragsugsuk aufhielt, um mich für die Heimreise vorzubereiten, wollte ich, da ein zu starker Wind wehte, um mit dem Boote fahren zu können, längs des Strandes nach Amisut gehen. Ich bat deshalb den Vorsteher der Station, mir einen Grönländer zu schaffen, der mir den Weg weisen könne; zu meinem Erstaunen bekam ich die Antwort, dass sich keiner finde, der dieses thun wolle, da der Weg nicht passirbar sei. Man sagte, dass sich kurz vor meiner Anknufft ein gewaltiger Lehmstrom von den Bergen herab in das Wasser hinaus ergossen habe, welcher Lehm so weich sei, dass er uns unmöglich tragen könne. Da ich diese Erzählung nicht begreifen konnte, glaubte ich, dass sie nur einen Vorwand bildete und dass man nur nicht geneigt war, diesen Weg zu gehen; aber ungeachtet ich mich erbot, mehr als gewöhnlich zu zahlen, bekam ich stets die Antwort, dass es unmöglich sei. Da ich deshalb beschloss, allein zu gehen, erbot sich der Vorsteher der Station, mir ein paar von seinen kleineren Kindern mitzugeben, mit der eigenthümlichen Motivirung, dass dieselben vielleicht leicht genug seien, um von der erstarrten Lehmmasse getragen werden zu können. Als ich zur Stelle kam, erhielt ich wirklich volle Bekräftigung, dass die Aussage der Grönländer über den Lehmstrom richtig war. Eine caotische Mischung von Lehm und aufgeweichtem Basalttuff war wie ein »dicker Brei« den Berg herabgestürzt, an ihrer Oberfläche gewaltige Basaltblöcke mit sich führend, und hatte sich

wie ein kleines Vorgebirge in das Wasser hinaus geschoben, das in weiter Entfernung vom Lehme gefärbt war. Es hatte seine Schwierigkeit, über diesen Lehmstrom zu kommen, da wir, um nicht in den Lehm hinabzusinken, von Stein zu Stein springen mussten. Die Kinder kamen leicht hinüber, während ich wiederholt mit den Beinen tief einsank. In welchem Verhältniss dieser Lehmstrom zu dem »todten« Gletscher, ein Begriff, den ich übrigens damals noch nicht kannte, stand, kann ich jetzt nicht entscheiden; dass dieses aber ein Phänomen ist, das für das Studium der orographischen Verhältnisse Bedeutung hat, unterliegt keinem Zweifel.»

II. Ueber den Kolm in unserer cambrischen Formation und die anthracitähnlichen Mineralien unserer Erzlagerstätten.

Mit dem Namen *Kolm* wird in Schweden eine bituminöse Kohle bezeichnet, die den Alaunschiefer der cambrischen Formation Westergötlands und Nerikes begleitet. Der Name scheint englischen Ursprunges zu sein ¹⁾ und kommt in der schwedischen Literatur zuerst bei CRONSTEDT vor (Försök till Mineralogie, Stockholm, 1758, S. 142). Der Kolm bildet kleine, gewöhnlich in linsenartigen Massen abgesonderte Lager im Alaunschiefer. In einigen Schieferbrüchen kommen diese Lager in solcher Menge vor, dass man den Kolm als Brennmaterial benutzt, und man hat sogar vorgeschlagen, das Mineral für die Gewinnung des Urans auszubeuten. Die Kolmfundorte bilden, obschon der procentische Urangehalt des Gesteines sehr gering ist, wahrscheinlich die reichsten der jetzt bekannten Uranlagerstätten der Erde. Schon vor mehr als 10 Jahren habe ich entdeckt, dass die Asche des Kolms von allen Fundorten, von wo ich Proben erhalten, ausser Kieselsäure, Thonerde, Eisenoxydul, Man-

¹⁾ »Culm, Kulm, Coilm a soft and slaty inferior kind of anthracite.« The century dictionary.

gan, Kalk, Magnesia, Alkali etc. auch Uran, doch in wechselnder Menge, enthält (1—3 Proc. der nach der Verbrennung des Minerals rückständigen lichtbraunen Asche). Hierzu kommen kleine Mengen Schwefel, Nickel, Zink, Kupfer, Molybdän und Vanadin sowie Spuren von Cerit- und Gadoliniterden. Auch die Asche der in unseren Eisenlagerstätten im Grundgebirge und in unseren Pegmatitgängen vorkommenden anthracitähnlichen Mineralien enthält oft Uran.

So gab z. B. ein *anthracitähnliches Mineral* aus der Eriksgrube bei Hellefors 12 Proc. Asche mit einem Gehalt von 0,8 Proc. Uranoxydul nebst Spuren von Cerit- und Gadoliniterde.

Ein *anthracitähnliches Mineral* aus der Eisengrube Danne-mora giebt bei Verbrennung eine sehr wechselnde Menge Asche. Diese enthält, nach Amanuens G. LINDSTRÖM:

Kieselsäure	72.66,
Thonerde	0.68,
Eisenoxyd	16.17,
Manganoxydul	0.18,
Zinkoxyd	0.14,
Uranoxydul	0.06,
Kalkerde	7.71,
Magnesia	0.21,
Kali	0.40,
Natron	0.15,
	<hr/> 100.16.

Ein *asphaltähnliches Mineral*, welches in der Grube Lilla Kallmora in ziemlich reichlicher Menge vorkommt, giebt, wenn es rein ist, nur 13 Proc. Asche mit einem Gehalt von 7 Proc. Uranoxydul nebst Cerit- und Gadoliniterden. Die von den Ceriterden mittelst neutralem Kaliumsulfat geschiedene Gadoliniterde hatte ein Moleculargewicht von 255.6. Dieses Gewicht stimmt vollständig mit dem Moleculargewicht der Mischung von Gadoliniterden, der in den gewöhnlichen Pegmatitgängen vorkommenden Mineralien der seltenen Erden, überein, ein in Anbetracht

der genetischen Verschiedenheit der anthracitähnlichen Kohle unserer Eisenlagerstätten und der Pegmatitmineralien Gadolinit, Fergusonit, Yttrotantal, Xenotim u. s. w. sehr merkwürdiges Verhältniss.

Weiter habe ich Uran in *Grahamit* von einem nicht näher angegebenen Fundort in Pennsylvanien angetroffen. Dieses Mineral gab nur 2.6 Proc. Asche, welche 2 Proc. Uranoxydul und ebenso viel Nickeloxyd enthielt.

Folgende Substanzen habe ich mit negativem Ergebniss auf Uran untersucht.

Alaunschiefer aus den cambrischen Schichten Ölands.

Russ, gebildet bei der Verbrennung von Petroleum von Baku.

Asphalt von Trinidad.

Anthracit aus dem Gouvernement Olonetz.

Steinkohle, theils bituminöse, theils nicht bituminöse, aus verschiedenen englischen Gruben.

Elastischer Asphalt und *Asphalt*, mit etwas Magneteisen untermischt, von NORBERG.

Asphalt aus Stribergs Grube. Gab bei Verbrennung 6.7 Proc. Asche, die kein Uran, aber etwas Nickel enthielt.

Asphalt von Pajsberg. Enthielt kein Uran, aber Spuren von Nickel. Das Mineral wurde, aus Furcht, dass das Uran sich bei der Verbrennung an der Luft in Verbindung mit Kohlenoxyd verflüchtigen könne, mit rauchender Salpetersäure oxydirt.

Bituminöser Gneiss aus dem Nullaberg, von IGELSTRÖM entdeckt (On the existence of rocks containing organic substances in the fundamental gneiss of Sweden. Stockholm), enthält kein Uran. Dagegen ist das in diese merkwürdige Felsart eingesprengte Mineral, für welches FR. EKMAN den Namen Huminit vorgeschlagen hat, uranhaltig. Die Asche des Huminit hat jedoch eine von der der Asphaltmineralien unserer Eisengruben ganz verschiedene Zusammensetzung. Der Huminit enthält, nach EKMAN,

Kohle	44.17,
Wasserstoff	1.68,
Sauerstoff	19.62,
Stickstoff	0.31,
Wasser	22.74 (entweicht beim Trock-
	nen bei 140°),
Asche	11.48
	<hr/> 100.00.

Die Asche wurde leider nicht vollständig analysirt, doch zeigen die folgenden approximativen Zahlen deutlich, dass der Huminit, ungeachtet einer äusseren Aehnlichkeit, ein von dem Anthracit unserer Eisengruben und dem Kolm ganz verschiedenes Mineral ist. Die Asche des Huminit enthält

Kieselsäure	1.7 Proc.
Thonerde	50 »
Kalkerde	20 »
Ceriterde	5 »
Uranoxyd	2 »
Magnesia	2.5 »
Alkali	3 »

etwas Blei, Kupfer, Eisen, Chlor, Schwefel und Phosphorsäure.

Asphalt, als kleine Körner in pegmatitähnlichem Granit von Grängesberg eingesprengt, giebt 8 Proc. Asche, in welcher kein Uran vorhanden ist, aber Spuren von Cerit- und Gadoliniterde.

Basalkohle von Radotin in Böhmen entwickelt bei Erwärmung nicht unbedeutende Gase, enthält aber kein Uran.

Ich habe beim Glühen dieser Kohle ein sehr überraschendes Phänomen beobachtet, das, wie mir scheint, für eine richtige Auffassung des tropfbar flüssigen Aggregatzustandes von Bedeutung sein kann. Wenn diese Substanz, um die Kohle zu verbrennen, fein gepulvert in einem Platintiegel schwach geglüht wurde, nahm sie, ohne zu schmelzen, alle Eigenschaften einer ziemlich leicht beweglichen Flüssigkeit an. Die Oberfläche war ganz horizontal und spiegelnd. Bei Störung des Gleich-

gewichtetes oder bei der Entwicklung von Gasen aus dem unteren Theil der glühenden Masse entstanden Wellen. Man konnte die Pseudoflüssigkeit aus einem Gefäss in ein anderes giessen. Und doch verwandelte sich die »Flüssigkeit« bei Abkühlung wieder in ein schwarzes, aus ganz ungeschmolzenen Körnern bestehendes Pulver. Dieses Phänomen zeigt deutlich, dass sich die Gase, welche bei Erhitzung der Substanz entweichen, anfangs um die kleinen Körner lagern und ihnen dadurch die Beweglichkeit gegen einander verleihen, welche den Flüssigkeiten eigen ist. Diese Eigenschaft trifft man auch bei anderer bituminösen Kohle, aber bei keiner, die ich untersucht habe, so ausgeprägt, wie bei dieser böhmischen Basaltkohle. Leider ist es mir nicht möglich gewesen, mir wenigstens 1 Kilogramm dieser merkwürdigen Substanz für fernere Untersuchungen zu verschaffen. Es wäre jedoch sehr interessant, den Ausdehnungscoefficient und die Zusammendrückbarkeit solcher künstlichen Flüssigkeiten sowie die Kapillaritätserscheinungen derselben näher zu studiren.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 504.)

Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*

Anales. T. 51 (1901): Entr. 5. 8:o.

Buffalo. *Society of natural sciences.*

Bulletin. Vol. 7: N:o 1. 1901. 8:o.

Buitenzorg. *Jardin botanique.*

Annales. (2) Vol. 2: P. 2. 1901. 8:o.

Bulletin. N:o 8. 1901. 8:o.

Catalogus plantarum phanerogamarum quæ in Horto Botanico Bogoriensi coluntur herbaceis exceptis. Fasc. 2. 1901. 8:o.

Mededeelingen. 46—48. 1901. 8:o.

HISSINK, J., Grondsoortenkaart van een gedeelte van Deli. Schaal 1 : 100,000. & Toelichting. 1901. 8:o & Fol.

Caen. *Société Linnéenne de Normandie.*

Bulletin. (5) Vol. 3 (1899)—4 (1900). 8:o.

Mémoires. Vol. 20: Fasc. 1—3. 1899—1901. 4:o.

Calcutta. *Indian Museum.*

ALCOCK, A., A descriptive catalogue of the Indian deep-sea crustacea decapoda macrura and anomala, in the Indian Museum... Coll. by the R. Indian marine survey ship Investigator. 1901. 4:o.

ALCOCK, A. W., Zoological gleanings from the R. Indian marine survey ship Investigator. Simla 1901. 4:o.

— *Asiatic Society of Bengal.*

Journal. P. 1. Vol. 69 (1900): N:o 2; P. 2. 69 (1900): 2—4; P. 3. 70 (1901): 1. 8:o.

Proceedings. Year 1900: Nos 9—12; 1901: 1—2. 8:o.

Cambridge. *University library.*

Report of the library syndicate. Year 1900. 4:o.

— *Museum of zoology.*

Annual report. 35 (1900). 4:o.

— *Observatory.*

Annual report of the observatory syndicate. 1898/99—1900/01. 4:o.

— *Philosophical Society.*

Proceedings. Vol. 11: P. 3. 1901. 8:o.

Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoölogy.*

Bulletin. Vol. 36: No 8. 1901. 8:o.

Cape Town. *Royal Observatory.*

Annals. Vol. 5; 8: P. 2. 1900. 4:o.

Catalogue of 1905 stars for the equinox 1865.0 from observations during the years 1861—1870. 8:o.

Independent day-numbers. Year 1903. 8:o.

Report of His Majesty's astronomer. Year 1900. 4:o.

Results of meridian observations. 1866—1870. 8:o.

— *South African philosophical society.*

General report. 1900, 1901. 8:o.

Transactions. Vol. 11: P. 2—3; 12: pp. 1—563. & List of contents of vols 1—11: 1—2. 1900—1901. 8:o.

(Forts. å sid. 542.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1901. N:o 7.
Stockholm.

Beiträge zur Kenntnis der Laubmoosflora Novaja Semljas.

VON ELOF JÄDERHOLM.

[Mitgeteilt am 11 September 1901 durch A. G. NATHORST.]

Über die Moosvegetation Novaja Semljas sind nur wenige Schriften erschienen. Der erste Aufsatz, in dem dieselbe zum Gegenstand der Untersuchung gemacht wird, ist das von N. WULFSBERG veröffentlichte Verzeichnis der Moose, die von dem Mitgließe der ROSENTHAL'schen Expedition, dem Norweger AAGAARD, auf Novaja Semlja gesammelt wurden.

Dieses in BLYTT's »Bidrag til Kundskaben om Vegetationen paa Novaja Semlja, Waigatsch-Øen og ved Jugor-Strædet.« (Forh. Vidensk. Selsk. Christiania Aar 1872. Christiania 1873.) aufgenommene Verzeichnis enthält nur 24 Arten, von denen 20 auf Novaja Semlja gesammelt sind.

Die Kenntnis der Bryologie jener Gegend ist durch die dänische Dijnphna-Expedition beträchtlich erweitert worden. Das dabei von TH. HOLM heimgebrachte Material wurde C. JENSEN zur Bearbeitung überliefert, und das Resultat seiner Untersuchung ist in einem Aufsatz unter dem Titel: »Mosser fra Novaia Zemlia, samlede paa Dijnphna-Expeditionen 1882—83 af TH. HOLM, bestemte af C. JENSEN« (Dijnphna-Togtets zoologisk-botaniske Udbytte) mitgeteilt worden.

Dr. O. EKSTAM, der Novaja Semlja zweimal und zwar in den Jahren 1891 und 1895, besuchte, hat auf diesen Reisen recht

bedeutende Sammlungen von Moosen gemacht. Einige derselben hat Dr. E. NYMAN bestimmt, und Dr. EKSTAM hat später das Resultat in »Tromsø Museums Aarshefter 20» unter dem Titel »Beiträge zur Kenntnis der Musci Novaja Semlja's» veröffentlicht. Die Bearbeitung eines anderen Teiles der Sammlungen wurde mir anvertraut und hat diesen Aufsatz veranlasst.

Die von mir unterschiedenen Arten, deren Anzahl 47 beträgt, stammen von Dr. EKSTAM's beiden Expeditionen nach Novaja Semlja. Die meisten sind im Aug. 1891 bei Matotschkin Scharr (73—74° n. Br.) gesammelt. Nur 5 von ihnen, nämlich: *Sphaerocephalus turgidus*, *Philonotis fontana*, *Bryum obtusifolium*, *Bryum Zemliae* und *Amblystegium polare* sind im Aug. 1895 an der Karmakul Bay (73° 30' n. Br.) gesammelt.

Von den untersuchten Arten sind besonders *Timmia norvegica*, *Meeseu triquetra*, *Philonotis fontana*, *Bryum argenteum*, *B. rutilans*, *B. Zemliae*, *Leersia alpina*, *Oncophorus virens*, *Grimmia incurva*, *G. gracilis*, *Andreæa petrophila*, *A. papillosa*, *Amblystegium polare*, *A. Richardsoni*, *Hypnum strigosum* var. *praecox* und *Stereodon hamulosus* bemerkenswert, da diese vorher noch nicht für Novaja Semlja angegeben worden sind. Eine, nämlich *Bryum Zemliae*, ist auch für die Wissenschaft neu. In dem Gebiet zwischen 74° und 75° n. Br. sind einige Moose beobachtet worden, die früher nur südlich von dieser Zone angetroffen worden waren, nämlich, ausser den für Novaja Semlja neuen, folgende Arten: *Cinclidium arcticum*, *Astrophyllum cuspidatum* var. *integrifolium*, *Sphaerocephalus palustris*, *Catoscopium nigratum*, *Bryum ventricosum* var. *gracilescens*, *Tetraplodon Wormskjoldii*, *T. bryoides*, *Barbula rubella*, *Dicranum congestum*, *D. neglectum*, *Swartzia montana*, *Ditrichum flexicaule*, *Oncophorus Wahlenbergii*, *Ceratodon purpureus*, *Amblystegium stellatum*, *A. sarmmentosum*, *A. stramineum*, *Myurella julacea* und *Stereodon chryseus*.

Die vorliegende Moossammlung liefert, wie auch zu erwarten war, einen neuen Beweis für die grosse Übereinstimmung der Laubmoosvegetation der Spitzbergischen Inselgruppe und der-

jenigen Novaja Semljas, da sämtliche Arten, *Bryum Zemliae* und *Andreaea petrophila* ausgenommen, auch auf Spitzbergen gefunden sind. Gemeinsam für Skandinavien sind alle ausser *Bryum Zemliae*.

Auffallend ist die grosse Sterilität der Moose der arktischen Gegenden, was auch das eingesammelte Material bestätigt. Nur sieben von den akrokarpischen Arten, nämlich *Sphaerocephalus turgidus*, *Bryum obtusifolium*, *B. Zemliae*, *Tetraplodon Wormskjoldii*, *T. bryoides*, *Dicranoweissia crispula* und *Andreaea petrophila* waren mit Sporogonien versehen; alle pleurokarpischen Moose hingegen waren steril.

Auch in anderer Hinsicht haben die Moose Novaja Semljas dasselbe Gepräge wie die der anderen arktischen Länder. Die Farbe ist oft rot, braun oder gelblich, die Blätter nicht selten kürzer und breiter als an südlicheren Formen, und oft kommen sie in dichten Rasen mit mehr oder weniger aufrecht wachsenden Stengeln und Seitenästen vor.

Verzeichnis der Arten.

1. *Cinclidium hymenophyllum* (BR. EUR.) LINDB.

Matotschkin Scharr. Eine kleine, zarte Form, in anderen Moosen spärlich eingesprengt.

2. *C. arcticum* (BR. EUR.) C. MÜLL.

Matotschkin Scharr. Eine kleine Anzahl Individuen wurden in *Amblystegium stellatum* und *A. intermedium* u. s. w. eingemischt angetroffen.

3. *Astrophyllum cuspidatum* (L. NECK.) LINDB. var. *integrifolium* LINDB.

Matotschkin Scharr. Liegt in einem reinen, etwa 6 cm. hohen Rasen vor. Die Blätter sind kleiner, kürzer und breiter als bei der Hauptform und ganzrandig, und die Pflanze ist folglich mit var. *integrifolium* LINDB. identisch.

4. *Timmia austriaca* HEDW.

Matotschkin Scharr. Anscheinend spärlich vorkommend. Nur wenige Exemplare sind angetroffen; in *Sphaerocephalus turgidus* eingemischt,

5. *T. norvegica* ZETT.

Matotschkin Scharr. Spärlich mit *Swartzia montana* vergesellschaftet.

6. *Sphaerocephalus palustris* (L.) LINDB.

Matotschkin Scharr. Zwei Formen sind gefunden, teils eine, die grosse reine, oben gelbliche, 6—9 cm hohe Rasen bildet, und 10—12 sehr deutliche, scharf begrenzte Jahrestriebe zeigt, teils eine kürzere, robustere, braungelbe Form, mit *Amblystegium stramineum* vergesellschaftet. Pseudopodien fehlen.

7. *S. turgidus* (WAHLENB.) LINDB.

Karmakul Bay und Matotschkin Scharr. An jener Stelle wurde die Art mit zwei reifen, bedeckelten Früchten gesammelt, an dieser war sie steril. Die letztgenannte Form bildet grosse, 8—10 cm hohe Rasen, reichlich mit *Hylocomium proliferum* gemischt.

8. *Meesea triquetra* (L.) ÄNGSTR.

Matotschkin Scharr. Nur wenige Stengel wurden in *Bryum obtusifolium* eingesprengt gefunden. Weicht von der typischen Form durch grössere und breitere Blätter ab.

9. *Catoscopium nigrum* (H.) BRID.

Matotschkin Scharr. In einem ziemlich kompakten, etwa 8 cm hohen, reinen Rasen heimgebracht.

10. *Philonotis fontana* (L.) BRID.

Karmakul Bay und Matotschkin Scharr. An jener Stelle wurde eine zarte, dünnstengelige Form, einen reinen, etwa 4 cm hohen Rasen bildend, gesammelt, an dieser äusserst verkümmert, und nur wenige Individuen in anderen Moosen eingesprengt.

11. *Bryum ventricosum* DICKS. var. *gracilescens* SCHIMP.

Matotschkin Scharr. Nur ein kleiner Rasen, in dem eine zarte und verkümmerte Form von *Amblystegium aduncum* spärlich eingemischt war.

12. *B. argenteum* L.

Matotschkin Scharr. In dem Untersuchungsmaterial war nur ein einziger, niedriger, aber sehr kompakter Rasen von dieser Art.

13. *B. obtusifolium* LINDB.

Karmakul Bay und Matotschkin Scharr. Diese Art scheint auf Novaja Semlja ziemlich allgemein zu sein, da Exemplare von nicht weniger als sieben verschiedenen Standorten vorliegen. Die Art tritt in reinen oder fast reinen, bis 6 cm hohen Rasen auf, gewöhnlich mit spärlichem, bisweilen aber mit reichlichem Wurzelfilz. Die Blätter, die bei dieser Art typisch fast oder ganz und gar ungesäumt sind, sind jedoch bei einigen Exemplaren mit einem ziemlich kräftig ausgebildeten Blattsaum versehen. Die Blätter sind übrigens bald umgeschlagen, bald flachrandig, und die Zellen haben bei gewissen Exemplaren etwas dickere und festere Wände, als was im allgemeinen bei dieser Art der Fall zu sein pflegt.

Von zwei Lokalitäten am Matotschkin Scharr liegen Exemplare mit sowohl Blüten als Früchten vor. Die Art ist bisher immer für dioecisch gehalten worden; indessen ist der Blütenstand der beiden eingesammelten Formen deutlich autoecisch.

Früchte kommen in nicht unbedeutender Anzahl vor. Dieselben sind bei dem einen Exemplar sehr unentwickelt, bei dem anderen aber bedeutend mehr ausgebildet, aber doch noch gelblich und nicht völlig reif und bedeckt. Nebst jüngeren Kapseln kommen auch drei ältere, braune vor, die entdeckelt sind. Sporogonien von *Bryum obtusifolium* sind in der Litteratur nur in N. C. LINDBERG, »Europ. and N. Amer. Bryineae« (Linköping 1897) erwähnt, wo fertile Exemplare aus Alaska erwähnt werden, ohne dass jedoch eine Beschreibung gegeben wird. Herr Ingenieur P. DUSÉN hat im Jahre 1899 in Grönland reife Früchte gesammelt, die in den »Beiträgen zur Laubmoosflora Ostgrönlands« (Bihang till K. Sv. Vet.-Akad. Handl. Bd. 27, Afd. III. N:o 1) ausführlich beschrieben worden sind. Die von mir untersuchten Früchte stimmen mit den in Grönland gefundenen vollständig überein.

14. *B. rutilans* BRID.

Matotschkin Scharr.

In zwei kleinen, aber reinen Rasen gesammelt. Niedrig wachsend und intensiv rot. Die Länge des vegetativen Systems kaum 1 cm.

15. *B. (Eucladodium) Zemliae* ARNELL & JÄDERHOLM n. sp.

Synicum, laxe caespitosum, sterile humile, modo 0,25 cm. altum, luteo-viride, nitidulum, inferne radiculosum, caule ramoso. Folia ad comam apicalem conferta, sicca adpressa, haud torta, late ovata, concava, breviter cuspidata; margo integer, late reflexus, limbatus, limbo viridi-luteo, 4—5 cellulas latus; nervus validus, e basi rubro-lutea luteus, in cuspidate excurrent; cellulae basales rubrae, angulares quadratae, ceterae inferne rectangulares, superne rhombeae-hexagonales, membranis crassis et uteis. Seta 1 cm. alta, rubra, superne lutea, gracilis, nitidula. Theca horizontalis-cernua, parum curvata, sat crasse pyriformis, rubro-lutea, nitidula; collum parum curvatum, crassum, sporogonio parum angustius et aequilongum; sporogonium crasse obovatum, ad os (haud infra os) distincte contractum; cellulae exothecii rotundate rectangulares — quadratae, 0,07—0,04 mm. longae, 0,035—0,02 mm. latae, membranis incrassatis, flexuosis et luteis, os versus in 6—7 seriebus immo minores, marginales applanatae. Operculum parvum, sat alte conicum, rubro-luteum, nitidulum, apiculo brevi munitum. Peristomium parum infra os insertum, insertione 0,02—0,03 mm. lata, pulchre rubra; dentes 0,3 mm. longi, lutei punctulate papilloso, limbati, distincte dentati, haud perforati, apicibus luteolis papillosis, lamellis ventralibus circiter 14, vulgo undulatis vel in medio emarginatis; membrana peristomii interni luteola, parum papillosa, tertiam altitudinem dentium attingens; processus angusti, lineares, parce papilloso vel fere glabri, fenestris lanceolatis, superne rimosi ornati. Cilia haud visa. Spori 0,027—0,030 mm., virides, opaci, humiliter papilloso.

Hab. Ad sinum Karmakuli insulae Novae Zemliae, ubi in Augusto anno 1895 a Doctore O. EKSTAM cum fructibus maturis, pro maxima parte deoperculatis lectum.

Species nova supra descripta ad seriem innumerabilem, ut videtur, formarum, olim ad *Br. inclinatum* relatum pertinet. Ab hac specie differt autem foliis brevius cuspidatis, latius reflexis et membranis magis incrassatis, theca brevi et sat crasse pyri-formi, pallidius colorata, insertione peristomii pulchre rubra, dentibus brevioribus, lamellis ventralibus paucioribus vulgo undulatis vel emarginatis processibus angustioribus etc.

Variat apicibus dentium ut et processibus densissime papillosis et opacis.

16. **Tetraplodon Wormskjöldii** (HORNEM.) LINDB.

Matotschkin Scharr. Kommt in grossen reinen Rasen mit sehr zahlreichen, wohl entwickelten Früchten vor.

17. **T. bryoides** (ZOEGL.) LINDB.

Matotschkin Scharr. Mit reichlichen, sowohl alten als jungen, nicht völlig reifen Sporogonien gesammelt.

18. **Leersia alpina** (SM.) LINDB.

Matotschkin Scharr. Sehr spärlich; nur wenige Individuen, in *Amblystegium intermedium* und *stellatum*, *Ditrichum flexicaule* u. s. w. eingesprengt.

19. **Tortula ruralis** (L.) EHRH.

Matotschkin Scharr. Niedrig und verkümmert, höchstens 1 cm hoch, teils in reinen Räschen, teils in *Stereodon revolutus* eingemischt.

20. **Barbula rubella** (HOFFM.) MITT.

Matotschkin Scharr. In dem gesammelten Material war nur ein steriles Räschen. Das vegetative System ist bräunlich, und die Blätter an der Spitze bisweilen schwach gesägt.

21. **Dicranum congestum** BRID.

Matotschkin Scharr. Nur ein unbedeutendes Räschen mit *Amblystegium*-Arten gemischt.

22. **D. neglectum** JUR.

Matotschkin Scharr. Spärlich teils in einem reinen Rasen teils nebst *Sphagna* gesammelt.

23. **Dieranowelsia crispula** (HEDW.) LINDB.

Matotschkin Scharr. Von dieser in den arktischen Ländern

gewöhnlichen Art liegen Exemplare mit wohl entwickelten und sehr reichlich vorkommenden Sporogonien vor. Die Art kommt in ziemlich niedrigen, unten oder ganz und gar schwarzen Rasen vor, teilweise, aber wenig, mit *Andreaea petrophila* gemischt.

24. *Swartzia montana* (LAM.) LINDB.

Matotschkin Scharr. Exemplare, 2—5 cm hoch, in *Ditrichum flexicaule* und *Amblystegium*-Arten eingesprengt.

25. *Ditrichum flexicaule* (SCHLEICH.) HAMPE.

Matotschkin Scharr. In dem heimgebrachten Material ist diese Art mit anderen Moosen wie *Swartzia montana*, *Amblystegium intermedium* und *stellatum*, *Myurella julacea* u. s. w. gemischt.

26. *Oncophorus Wahlenbergii* BRID.

Matotschkin Scharr. Scheint auf Novaja Semlja wie in anderen Polargegenden häufig zu sein. Im allgemeinen in dichten, kompakten, fast reinen, 2—3 cm. hohen Rasen eingesammelt. Einige Individuen von einer zarten, grünen Form waren in *Amblystegium aduncum* eingesprengt.

27. *O. virens* (Sw.) BRID.

Matotschkin Scharr. Reine, dichte, bis 6 cm. hohe Rasen.

28. *Ceratodon purpureus* (L.) BRID.

Matotschkin Scharr. In zwei etwas verschiedenen Formen gesammelt. Die eine, etwa 1,5 cm. hoch, stimmt mit der in südlicheren Gegenden allgemeinen Form überein, ist aber etwas zärter, die andere weicht durch kürzere und breitere, an den Stengel gedrückte, aufrechte, nicht krause Blätter ab, und bildet etwa 6 cm. hohe Rasen, die wie bei der vorigen Form kompakt und nicht mit anderen Arten vergesellschaftet sind.

29. *Grimmia hypnoides* (L.) LINDB.

Matotschkin Scharr. Die Höhe wechselt von ein Paar bis 6—7 cm. Wächst oft mit Flechten und anderen Moosen, wie *Chandonanthus setiformis*, zusammen.

30. *G. incurva* SCHWAEGR.

Matotschkin Scharr. Nur in ein Paar Räschen heimgebracht.

31. *G. gracilis* SCHLEICH.

Matotschkin Scharr. Grosse und üppige Form, 6—10 cm. hohe, schwarze, leicht auseinander fallende Rasen bildend. Die Stengel beinahe einfach oder dikotomisch verzweigt.

32. *Andreaea petrophila* EHRH.

Matotschkin Scharr. In mehreren Formen mit mehr oder weniger papillösen Blättern gesammelt. Sporogonien kommen spärlich vor. Nicht auf Spitzbergen und Beeren Eiland beobachtet, aber aus Grönland und Nord-Sibirien bekannt.

33. *A. papillosa* LINDB.

Matotschkin Scharr. Das zu meiner Verfügung stehende Material enthielt nur zwei sterile Räschen von dieser Art. Niedrig, nur 1—1,5 cm. hoch.

34. *Amblystegium stellatum* (SCHREB.) LINDB.

Matotschkin Scharr. Die Art ist mit anderen Moosen, wie *Amblystegium intermedium*, *Ditrichum flexicaule*, *Cinclidium arcticum* u. s. w. vergesellschaftet und in einzelnen Individuen derselben eingesprengt.

35. *A. intermedium* (LINDB.) LINDB.

Matotschkin Scharr. Mit anderen Moosen, wie *Amblystegium stellatum*, *Myurella julacea*, *Ditrichum flexicaule* u. s. w. gemischt.

36. *A. aduncum* (L.) LINDB.

Matotschkin Scharr. Scheint auf Novaja Semlja wie in allen übrigen nördlichen Ländern sehr allgemein zu sein. An Grösse und Aussehen sehr wechselnd, kommt gewöhnlich mit anderen Arten, wie *Hylocomium proliferum*, *Hypnum trichoides*, *Oncophorus Wahlenbergii*, Flechten u. s. w. gemischt vor, bisweilen aber auch in fast reinen Rasen.

37. *A. polare* (LINDB.) LINDB.

Karmakul Bay. Nur ein einziger, aber grosser, reiner Rasen gesammelt.

38. *A. Richardsoni* (MITT.) LINDB.

Matotschkin Scharr. Sehr spärlich. Einige wenige Individuen wurden in einem Rasen, andere *Amblystegium*-Arten, *Ditrichum flexicaule* u. s. w. enthaltend, angetroffen.

39. *A. sarmentosum* (Wg.) DE NOT.

Matotschkin Scharr. Von dieser Art liegen ein Paar reine Rasen vor. Die gesammelte Form ist schwach rötlich und von typischer Beschaffenheit.

40. *A. stramineum* (DICKS.) DE NOT.

Matotschkin Scharr. Mit *Sphaerocephalus palustris* vergesellschaftet.

41. *Hypnum strigosum* HOFFM. var. *praeceox* (Sw.) Wg.

Matotschkin Scharr. Nur spärlich gesammelt, in Gras wachsend. Arktische Exemplare von dieser Varietät sind früher nur von Nord-Sibirien bekannt. Auf Spitzbergen und in Grönland hingegen ist teils var. *diversifolium*, teils die Hauptform gefunden.

42. *H. trichoides* NECK.

Matotschkin Scharr. Einzelne Individuen in *Hylocomium proliferum*, *Amblystegium aduncum*, Flechten, u. s. w. eingesprengt.

43. *Myurella julacea* (VILL.) BR. EUR.

Matotschkin Scharr. Spärlich in einem Mischrasen mit *Ditrichum flexicaule*, *Amblystegium*-Arten u. s. w. vergesellschaftet.

44. *Hylocomium proliferum* (L.) LINDB.

Matotschkin Scharr. Mit anderen Moosen, wie *Sphaerocephalus turgidus* und *Amblystegium aduncum* vergesellschaftet. Tritt bisweilen in einer schmalen, zarten Form ohne Prolifikationen auf.

45. *Stereodon revolutus* (SCHWAEGR.) MITT.

Matotschkin Scharr. Ein Paar Rasen gesammelt. In dem einen ist *Tortula ruralis* eingemischt.

46. *S. hamulosus* (BR. EUR.) LINDB.

Matotschkin Scharr. Von dieser in den Polargegenden seltenen Art liegen einige Räschen von einer niedrigen und zarten Form, in Flechten eingesprengt, vor.

47. *S. chryseus* (SCHWAEGR.) MITT.

Matotschkin Scharr. Kommt teils in reinen Rasen, teils in anderen Moosen eingesprengt vor.

Ueber die Auflösung von Metallen. I.

VON T. ERICSON-AURÉN und WILH. PALMÆR.

[Mitgetheilt den 11 September 1901 von PETER KLASON].

Von dem Einen von uns wurde neuerdings eine Untersuchung über die Auflösungsgeschwindigkeit von Zink in sauren Lösungen publiziert ¹⁾; bei einem näheren Studium der in dieser sowie in älteren Arbeiten niedergelegten Beobachtungen glauben wir gefunden zu haben dass die experimentellen Ergebnisse in mehr eingehender Weise, als bisher geschehen, theoretisch behandelt werden können und wir möchten jetzt einen Theil unserer Rechnungen widergeben.

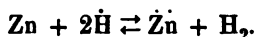
Die bei der Auflösung von Metallen in Säuren auftretenden Erscheinungen kann man theils versuchen, wie gewöhnliche chemische Reaktionen mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes zu deuten, theils kann man, wie es DE LA RIVE zuerst gethan hat, die galvanischen Lokalströme in Betracht ziehen. Wir glauben im Folgenden nachweisen zu können dass mit Hilfe der letzteren Auffassung die ziemlich verwickelten Versuchsergebnisse im Wesentlichen gedeutet werden können, während das Massenwirkungsgesetz, in gewöhnlicher Weise angewendet, von keinem Nutzen ist.

Anwendung des Massenwirkungsgesetzes.

Wir werden zuerst versuchen, das Massenwirkungsgesetz auf die Auflösung von Metallen in Säuren anzuwenden und nehmen als Beispiel die Auflösung des Zinks, weil die meisten

¹⁾ Zeitschr. für anorg. Chemie 27, 209 (1901). Auch in Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handl. Bd. 22, Afd. II N:o 4 (1897).

Versuchen mit diesem Metall angestellt worden sind. Der Vorgang besteht ja darin, dass Zink die Ladung zweier Wasserstoffjonen aufnimmt während der Wasserstoff als ungeladene Moleküle abgeschieden wird. Wir bekommen somit die Reaktionsformel:



Wir bezeichnen die Konzentrationen von Wasserstoff- und Zinkjonen mit C_{H} und C_{Zn} . Wenn wir beachten dass die aktive Masse sowie des Zinkes (bei konstanter Oberfläche) wie des Wasserstoffs konstant sind, da ja die Lösung mit Wasserstoff gesättigt wird, so erhalten wir den folgenden Ausdruck für die Auflösungsgeschwindigkeit ϱ des Zinkes:

$$\varrho = k_1 \cdot C_{\text{H}}^2 - k_2 \cdot C_{\text{Zn}} \dots \dots \dots (a)$$

wo k_1 und k_2 Konstanten sind. Die Konstante k_2 ist ein Maass der Geschwindigkeit, womit durch Wasserstoff Zink gefällt wird; da man geneigt sein konnte die Konstante k_2 als gegen k_1 verschwindend klein zu betrachten so würde die Formel (a) vereinfacht werden zu:

$$\varrho = k_1 \cdot C_{\text{H}}^2 \text{ oder } \frac{\varrho}{C_{\text{H}}^2} = k_1 \dots \dots \dots (a_1)$$

Wir werden jetzt diese zwei Formeln (a) und (a₁) prüfen und verwenden dazu Versuche von dem Einen von uns über die Auflösungsgeschwindigkeit von Zink in Salzsäure verschiedener Konzentration bei Zimmertemperatur.¹⁾

Bei dem von dem Einen von uns ausgeführten Versuchen wird die Auflösungsgeschwindigkeit angegeben durch die Anzahl der cm³ Wasserstoff von + 18° und 750 m.m. Druck die pro Minute entwickelt worden sind. Im Anfang verläuft die Reaktion langsamer, wie in der betreffenden Abhandlung näher erörtert worden ist; wir vergleichen daher die Auflösungsgeschwindigkeit bei der Zeit wo 40—50% des verwendeten Zinkstabes aufgelöst worden sind, welche Grösse a. a. O. tabelliert ist. Die Oberfläche des in Drahtform angewendeten Zinkes war bei allen

¹⁾ Zeitschr. für anorg. Chemie, 27. Seite 226, Tab. 5 (1901). Auch in Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handl. Bd. 22, Afd. II N:o 4 (1897).

n annähernd konstant; eine Korrektion für die kleinen
 ungen ist in der citierten Arbeit schon angebracht. Die
 rationen der Säure und der Jonen sind in Grammäqui-
 pro Liter angegeben. Bei der Berechnung der Konzen-
 der Wasserstoffjonen ist folgendes zu beachten. Erstens
 n 45 % des Zinkes aufgelöst worden sind, 0,011 Gramm-
 te Säure verbraucht worden sind. Zweitens muss man
 htigen, dass die Säure und das gebildete Zinkchlorid
 ssociationsgrad gegenseitig beeinflussen. Die Dissocia-
 Chlorwasserstoffs und des Zinkchlorids in der gemein-
 ösung ist nach der Methode von KAY berechnet worden.¹⁾
 ultat der Rechnung ist in Tabelle 1 wiedergegeben, wo
 ssociationsgrad bezeichnet.

Tab. 1.

Erste Approximation				Zweite Approximation			
α_{HCl}	C_{H}	α_{ZnCl_2}	C_{Zn}	α_{HCl}	C_{H}	α_{ZnCl_2}	C_{Zn}
0,9377	0,0866	0,7672	0,00844	0,939	0,0866	0,766	0,00882
0,9148	0,0814	0,7281	0,00795	0,915	0,0814	0,706	0,00777
0,8855	0,1674	0,6702	0,00787	0,885	0,1673	0,638	0,00702
0,8752	0,2529	0,6261	0,00689	0,872	0,2520	0,585	0,00644

e dritte Approximation ändert die Werte von C_{H} und
 t merklich.

versuchen zuerst die einfachere Formel (a_1). Die Er-
 der Rechnung giebt Tabelle 2.

Tab. 2.

Konzentration der Salzsäure	α	C_{H}^2	$\frac{\alpha}{C_{\text{H}}^2}$
0,05	0,050	0,00134	37,3
0,1	0,130	0,00668	19,6
0,2	0,288	0,0280	10,3
0,3	0,480	0,0635	7,56

Der Ausdruck $\frac{q}{C_{\text{H}}^2}$ sollte nach Formel (a_1) konstant sein; das ist offenbar nicht der Fall, indem die Auflösungsgeschwindigkeit viel langsamer wächst als proportional dem Quadrate der Wasserstoffjonenkonzentration. Die Formel (a_1) ist daher zu verwerfen.

Wir gehen jetzt zur Prüfung der Formel (a). Die Konstanten, k_1 und k_2 , dieser Formel wurden nach der Methode der kleinsten Quadraten berechnet; die Rechnung ergab

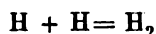
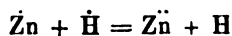
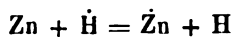
$$k_1 = 9,955; k_2 = -4,528$$

und die in der Tabelle 2 verzeichneten Auflösungsgeschwindigkeiten sollten dann durch die folgende Formel wiedergegeben werden:

$$q = 9,955 \cdot C_{\text{H}}^2 + 4,528 C_{\text{Zn}}$$

wobei C_{H} und C_{Zn} der Tabelle 1 entnommen werden. Die Rechnung ergab Zahlen, die 2—38 % von den gefundenen Werthen abweichen. Viel wichtiger ist jedoch dass nach der Rechnung die Konstante k_2 negativ wird, was offenbar keinen Sinn hat. Die Wiedergabe der berechneten Zahlen mag daher unterbleiben. Die Formel (a) muss offenbar verworfen werden.

Man konnte noch die Annahme machen, dass die Auflösung in mehreren Stufen sich vollzieht, indem das Zink zuerst nur eine Ladung aufnimmt, etwa nach den Formeln:



Aber es fehlt jedes Anzeichen für die Existenz einfach geladener Zinkjonen und ausserdem zeigt die Rechnung dass auch mit Hilfe dieser Annahme keine befriedigende Übereinstimmung zwischen Versuchen und Rechnung zu erzielen ist.

Es muss weiter bemerkt werden dass bei der Deutung der Auflösung von Metallen als eine einfache Umsetzung zwischen Metall und Wasserstoffjonen das bekannte Phänomen dass reines Zink sich in Säuren äusserst langsam auflöst nicht erklärt wer-

den kann. Ebenso wenig kann die langsame Auflösung des amalgamierten Zinkes dadurch erklärt werden, überhaupt wird der grosse Einfluss der verunreinigenden Metalle unverständlich.

Das Massenwirkungsgesetz scheint also bei der Auflösung von Metallen keinen Dienst leisten zu können. Das System Metall + Säure ist ein heterogenes. Da indes das Massenwirkungsgesetz zur Berechnung der Reaktionsgeschwindigkeit in anderen heterogenen Systemen, z. B. Calciumkarbonat + Säure, sich bewährt hat ¹⁾, so muss ein Grund für diesen Unterschied gesucht werden. Eine Erklärung wäre die folgende. Man kann annehmen dass bei der Auflösung von Calciumkarbonat in Säuren die Reaktion thatsächlich nur in der Flüssigkeit stattfindet, also in einem homogenen Systeme, da dass Calciumkarbonat löslich ist. Der Unterschied wäre dann ein wesentlicher und darauf hinzuführen dass Metalle als solche in Wasser völlig unlöslich sind. Auch NERNST hat bekanntlich angenommen dass Metalle nur als Ionen in Lösung gehen können. Dafür, dass ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Reaktionen besteht, spricht auch der Umstand dass reines Calciumkarbonat sich ebenso schnell wie unreines auflöst, während die Verunreinigungen auf die Auflösungs geschwindigkeit von Metallen einen wesentlichen Einfluss ausüben. Wenn diese Erklärung auch wahrscheinlich erscheint, so muss man doch im Auge behalten dass bei Reaktionen in heterogenen Systemen die Diffusion der gelösten Stoffe nach der Grenzfläche eine bedeutende Rolle spielt und die Möglichkeit dass, bei Berücksichtigung der Diffusion, das Massenwirkungsgesetz auch bei der Auflösung von Metallen in geeigneter Weise anwendbar wäre darf nicht ohne weiteres zurückgewiesen werden. Wir werden doch im Folgenden nachweisen, dass die Auflösungs geschwindigkeit der Metalle durch die galvanischen Lokalströme leicht erklärt wird.

¹⁾ Siehe z. B. NERNST, Theoretische Chemie, 3:te Aufl., Seite 536 u. folgende.

Anwendung der Theorie der galvanischen Elemente.

Wir werden nunmehr versuchen, die Auflösung der Metalle durch die galvanischen Lokalströmen allein zu erklären. Die elektromotorische Kraft des Elementes

$\text{Zn} \mid \text{Zn} - \text{Lösung} \mid \text{Säure} \mid \text{H}_2 + \text{platinisiertes Pt}$
wird bekanntlich nach NERNST ausgedrückt durch die Formel

$$e = \frac{0,0576}{2} \log \frac{P_1}{P_1} - 0,0576 \log \frac{P_2}{P_2}$$

oder

$$e = 0,0288 \log \frac{P_1}{P_1} - 0,0288 \cdot 2 \log \frac{P_2}{P_2}$$

wo P_1 und P_2 die elektrolytischen Lösungstensionen von Zink und Wasserstoff in Platin okkludiert bezeichnen und p_1 und p_2 die osmotischen Drucke der Zink- und Wasserstoffjonen. Wenn wir statt Drucke Konzentrationen, in Grammäquivalenten pro Liter ausgedrückt, einführen, wobei

C_1 = Konzentration von Zn in einer Lösung, wogegen Zink keine Potentialdifferenz aufweist;

C_{Zn} = Konzentration von Zn in der bei der Auflösung verwendeten Lösung;

und C_2, C_{H} = die entsprechenden Konzentrationen beim Wasserstoff bezeichnen, so bekommen wir

$$e = 0,0288 \log \frac{C_1}{C_{\text{Zn}}} - 0,0288 \cdot 2 \log \frac{C_2}{C_{\text{H}}} = 0,0288 \log \frac{C_1}{C_2} + 0,0288 \frac{C_{\text{H}}^2}{C_{\text{Zn}}}$$

Bei normaler Konzentration der Ionen ist $C_{\text{H}} = C_{\text{Zn}} = 1$ und $e = 0,77$ volt ¹⁾; wir bekommen also

$$0,77 = 0,0288 \log \frac{C_1}{C_2}$$

und

$$e = 0,77 + 0,0288 \log \frac{C_{\text{H}}^2}{C_{\text{Zn}}}$$

¹⁾ Vergl. WILSMORE Zeitschr. für phys. Chemie 35, 291 (1900).

Zink, das bei den von dem Einen von uns ausgeführten als Beispiel gewählten Versuchen verwendet wurde, enthält Pb als Verunreinigung. Das galvanische Element, dessen Wirksamkeit das Zink aufgelöst wird, besteht also, wenn schon etwas Zn gelöst worden ist, aus

Zn-Lösung | Säure | H_2 in Pb okkludiert.

Die elektromotorische Kraft dieses Elements wird aber nicht durch obige Formel gegeben, indem nach CASPARI¹⁾ zur Verhinderung der Abscheidung von Wasserstoff an anderen Metallen ein platinirtes Platin eine gewisse Überspannung erfordert. Diese Überspannung hat für einige Metalle, die uns interessieren, folgende Werthe:

	Pb	Zn	Hg
Ausgangsspannung in Volt	0,64	0,70	0,78

Die elektromotorische Kraft des galvanischen Lokalelementes wird durch die Überspannung bei dem als Kathode dienenden, unedleren Metall vermindert; wenn das Metall Pb ist, so wird also die Überspannung an Pb von dem obigen Ausdrücke subtrahieren und bekommen für die elektromotorische Kraft des Elementes den Ausdruck

$$e = 0,77 + 0,0288 \log \frac{C_{H_2}^2}{C_{Zn}} - 0,64 \text{ oder}$$

$$e = 0,13 + 0,0288 (2 \log C_{H_2} - \log C_{Zn}).$$

Die Auflösungsgeschwindigkeit, die pro Zeiteinheit gelöste Menge des Metalls, ist offenbar proportional der gesammten Stromstärke der Lokalelemente. Diese Stromstärke ist wieder durch die elektromotorische Kraft dividiert durch den Widerstand der Anordnung. Ehe wir näher hierauf eingehen, wollen wir einigen allgemeinen Bemerkungen Platz geben. In der That ist die hohe Überspannung beim Blei wird die elektromotorische Kraft des Elementes klein. Wenn $C_{H_2} = C_{Zn} = 1$ (normale Lösungen) bekommen wir

$$e = 0,13 \text{ Volt.}$$

¹⁾ Ztschr. für phys. Chemie 30, 89 (1899).

Eine Änderung der Ionenkonzentration spielt bei diesen kleinen elektromotorischen Kräfte eine grosse Rolle. Wenn wir z. B. $C_H = 0,1$ statt $= 1$ machen, so vermindert sich die elektromotorische Kraft um 0,0576 oder rund 0,06 Volt, d. h. sie sinkt auf 0,07 Volt oder beinahe auf die Hälfte des Werthes bei $C_H = 1$ herab.

Ferner ist zu bemerken dass die langsame Auflösung von reinen Metallen eine nothwendige Konsequenz der Theorie der Lokalströme ist. Wenn wir ein Stück chemisch reinen Metalls mit völlig gleichmässiger Oberfläche in eine Säure tauchen, wird ja kein Strom zu Stande kommen können, weil die elektromotorischen Kräfte an allen Punkten der Oberfläche gleich sind. Dass auch die reinsten Metalle langsam angegriffen werden steht hiermit nicht in Widerspruch, denn es wird selbstverständlich nicht gelingen ein absolut chemisch reines Metall mit völlig gleichmässiger Oberfläche darzustellen.

Das Metall wird auch nicht aufgelöst werden, wenn die Überspannung an dem verunreinigenden Metall höher ist als die elektromotorische Kraft des Elementes

Metall | Metall-Lösung | Säure | H_2 + platinirtes Platin.
So wird es in schöner Weise erklärt, dass amalgamiertes Zink in Säuren sich sehr langsam auflöst, wie CASPARI hervorgehoben hat.

Zur Erklärung der langsamen Auflösung bei reinen Metallen reicht aber die Überspannung allein nicht aus; beim reinen Zink und in normalen Jonenlösungen würden mir noch die elektromotorische Kraft

$$0,77 - 0,70 = 0,07 \text{ Volt}$$

bekommen, d. h. dass reine Metall würde sich etwa halb so schnell auflösen wie das unreine. In der That geht es doch sehr viel langsamer. Die obige Erklärung der langsamen Auflösung reiner Metalle bleibt daher bestehend.

Die Überspannung erklärt auch den Einfluss verschiedener anwesender Metalle auf die Lösungsgeschwindigkeit des Zinks. So wird bekanntlich reines Zink, das durch Zusatz von Platinchlorid zur Lösung mit Platin überzogen worden ist, stürmisch

aufgelöst, was offenbar darauf beruht dass die Überspannung beim Platin = 0 ist und daher die elektromotorische Kraft der Lokalelemente gross wird. Bei vergleichenden Untersuchung des Einflusses von verschiedenen Metallen muss man doch offenbar genau darauf achten dass sie in genau derselben Weise auf das Zink niedergeschlagen oder in dem Zink eingemischt sind.

Wir kehren jetzt zur Berechnung der Auflösungsgeschwindigkeit zurück. Wir bekamen für die elektromotorische Kraft der Lokalelemente den Ausdruck:

$$e = 0,13 + 0,0288 (2 \log C_H - \log C_{Zn}) \text{ Volt.}$$

Die Stromstärke i wird dann

$$i = \frac{e}{w} \text{ Ampères,}$$

wo w den Widerstand der Anordnung in Ohm bedeutet. Die Auflösungsgeschwindigkeit ist der Stromstärke proportional; also

$$q = f \cdot i = f \cdot \frac{e}{w}$$

wo f ein konstanter Faktor ist. Derselbe kann leicht berechnet werden. Die Auflösungsgeschwindigkeit ist bei den in Betracht gezogenen Versuchen gemessen durch die Anzahl der cm^3 Wasserstoff von $+18^\circ$ und 750 m.m. Druck, die pro Minute entwickelt werden. 1 Amp. giebt in einer Minute $7,52 \text{ cm}^3 \text{ H}_2$ von $+18^\circ$ und 750 m.m. Druck. Also ist $f = 7,52$ und wir haben

$$q = 7,52 \frac{e}{w}.$$

Wenn C die Widerstandskapazität der Anordnung bedeutet, so haben wir bekanntlich $C = w \cdot \kappa$, wo κ die Leitfähigkeit der Lösung (im neuen Maasse) bedeutet. Wir bekommen also

$$q = 7,52 \cdot \frac{\kappa \cdot e}{C}$$

oder durch Einsetzung des Werthes von e

$$q = 7,52 \cdot \frac{\kappa}{C} \{0,13 + 0,0288 (2 \log C_H - \log C_{Zn})\}$$

$$\text{oder} \quad e = 7,52 \cdot 0,0288 \cdot \frac{\alpha}{C} \left(\frac{0,13}{0,0288} + 2 \log C_{\text{H}} - \log C_{\text{Zn}} \right)$$

oder endlich

$$e = 0,217 \cdot \frac{\alpha}{C} (4,51 + 2 \log C_{\text{H}} - \log C_{\text{Zn}}) \quad . \quad . \quad (b)$$

Diese Formel (b) lässt sich offenbar leicht verallgemeinern. Wenn wir ein beliebiges Metall auflösen, so ist die elektromotorische Kraft e des Lokalelementes:

Metall | Metall-Lösung | Säure | H_2 + verunreinigendes Metall durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$e = \frac{0,0576}{n} \log \frac{P_1}{p_1} - 0,0576 \log \frac{P_2}{p_2} - \pi$$

wo n = Werthigkeit des aufzulösenden Metalls;

P_1 = Lösungsdruck des in Lösung gehenden Metalls;

p_1 = osmotischer Druck der Ionen dieses Metalls;

P_2, p_2 = dieselben Grössen für den Wasserstoff;

π = Überspannung an dem verunreinigenden Metall.

Für die Auflösungsgeschwindigkeit bekommen wir dann

$$e = f \cdot \frac{\alpha}{C} \cdot e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b')$$

wo f = ein Proportionalitätsfaktor;

α = Leitfähigkeit der Lösung (im neuen Maasse);

C = Widerstandskapazität der Anordnung.

Daraus folgt die allgemeine Formel:

$$e = f \cdot \frac{\alpha}{C} \left(\frac{0,0576}{n} \log \frac{P_1}{p_1} - 0,0576 \log \frac{P_2}{p_2} - \pi \right) \quad . \quad . \quad (b'')$$

Die Gleichung (b) giebt an dass die Auflösungsgeschwindigkeit des Zinks berechnet werden kann, wenn die Leitfähigkeit der Lösung, die Ionenkonzentrationen und die Widerstandskapazität der Anordnung bekannt sind. Von diesen Grössen können die Leitfähigkeit der Lösung und die Ionenkonzentrationen berechnet werden und nur die Widerstandskapazität ist unbekannt. Da indes der Werth der Überspannung nach CASPARI ziemlich unsicher ist, besonders weil es sich hier um im Zink eingemischtes

Blei handelt, so haben wir es vorgezogen die Konstante 4,51 als unbekannt zu betrachten und in dem Ausdruck

$$\varrho = 0,217 \cdot \frac{x}{C} (A + 2 \log C_{\text{H}} - \log C_{\text{Zn}})$$

die Konstanten C und A nach der Methode der kleinsten Quadraten zu berechnen. Die Werthe von C_{H} und C_{Zn} finden sich in Tab. 1. Die Werthe von x sind mit Hilfe der Tab. 1 Seite 527 aufgenommenen Werthe von C_{H} und C_{Zn} berechnet worden. Die Rechnung ergab

Tab. 3.

Konzentration der Säure	x
0,05	0,0150
0,1	0,0322
0,2	0,0650
0,3	0,0974

Die Rechnung ergab folgende Werthe der Konstanten:

$$A = 4,73; C = 0,255.$$

Wenn mit Hilfe dieser Werthe die Auflösungsgeschwindigkeit berechnet wird, so ergibt sich folgendes:

Tab. 4.

Konzentration der Säure	ϱ gef.	ϱ ber.	Diff.
0,05	0,050	0,050	0,000
0,1	0,180	0,128	+ 0,002
0,2	0,288	0,295	— 0,007
0,3	0,480	0,475	+ 0,005

Die Übereinstimmung zwischen den berechneten und den gefundenen Werthen ist also eine ausgezeichnete und die Differenzen (0—2,3% der gefundenen Werthe) sind kleiner als die Versuchsfehler.

Der berechnete Werth der Konstante A war 4,51 und der gefundene 4,73. Dies muss in der That als eine überraschend gute Übereinstimmung betrachtet werden, da man sich erinnert dass

$$A = \frac{0,13}{0,0288}$$

und 0,13 wiederum die Differenz darstellt zwischen der elektromotorischen Kraft des Elementes:

$\text{Zn} \mid \text{normale Zn-Lösung} \mid \text{normale H-Lösung} \mid \text{H}_2 + \text{platinirtes Pt}$

und die Überspannung des Bleies. Die letztere ist ja nicht sehr genau bestimmt worden.

Der Werth der Widerstandskapazität $C = 0,255$ bedeutet, dass der Widerstand der Flüssigkeit, die den Zinkdraht umspült, $0,255 \Omega$ betragen würde, wenn das Leitvermögen der Flüssigkeit $= 1$ wäre. Wenn man bedenkt, dass der Widerstand durch die Wasserstoffbläschen bedeutend erhöht wird, so dürfte dieser Werth der Widerstandskapazität nichts unwahrscheinliches darbieten.

Einem Einwand muss noch begegnet werden. Bei der Rechnung sind ja die mittleren Konzentrationen der Zink- und Wasserstoffionen in der Flüssigkeit benutzt worden. Dies erscheint insofern bedenklich, als offenbar, in Folge der Wirkungen des Stromes, die Konzentration der Zinkionen in der Nähe des Zinkes höher, die Konzentration der Wasserstoffionen in der Nähe des Bleies dagegen niedriger als in der übrigen Flüssigkeit sein muss — oder, mit anderen Worten, es wird immer eine Polarisation auftreten. Macht man aber die Annahme, dass die Konzentration in der Nähe der Elektroden proportional der mittleren Konzentration sei, was in diesem Falle, wo die Flüssigkeit durch den Wasserstoff kräftig gerührt wird, als eine gute Annäherung betrachtet werden kann, so wird dieser Einwand hinfällig, wie wir leicht nachweisen können. Es sei

a. C_{H} = Konzentration der Wasserstoffionen an der Kathode,

b. C_{Zn} = Konzentration der Zinkionen beim Zink,

wobei C_{H} und C_{Zn} dieselbe Bedeutung wie oben haben und a und b Konstanten sind. Offenbar ist $a < 1$; $b > 1$.

Die elektromotorische Kraft φ_1 wird in diesem Falle

$$\varphi_1 = 0,217 \frac{z}{C} \{4,51 + 2 \log a \cdot C_{\text{H}} - \log b \cdot C_{\text{Zn}}\} \text{ oder}$$

$$q_1 = 0,217 \cdot \frac{\kappa}{C} \{4,51 + 2 \log a - \log b + 2 \log C_H - \log C_{Zn}\} \quad \text{oder}$$

$$q_1 = 0,217 \cdot \frac{\kappa}{C} (A' + 2 \log C_H - \log C_{Zn}).$$

Die ganze Änderung wird also darin bestehen dass die Konstante A geändert wird. Allerdings ist $A' < A$ da $\log a < 0$ und $\log b > 0$, aber es ist ja sehr möglich dass die Änderung nur klein ist.

Es kann öfters vorkommen dass die Berechnung der Auflösungsgeschwindigkeit nach der Formel (b) unsicher wird. Die Berechnung der Ionenkonzentrationen und der Leitfähigkeit wird in konzentrierten Lösungen ziemlich unsicher. Des weiteren kann durch Bildung von Doppelsalzen in der Lösung die Konzentration der Zinkionen geändert werden. Es mag deshalb darauf hingewiesen werden, dass man es immer in der Hand hat durch Messung der Leitfähigkeit der Lösung ebenso wie der elektromotorischen Kraft des in Betracht kommenden Elementes bis auf die unbekannte Widerstandskapazität die nötigen Data zur Berechnung der Auflösungsgeschwindigkeit experimentell zu bestimmen. Die Widerstandskapazität kann wiederum nach Beobachtung der Auflösungsgeschwindigkeit in einem Falle, wo Leitvermögen und elektromotorische Kraft bekannt sind, berechnet werden. Wir sind mit solchen Messungen an einigen mehr komplizierten Versuchen beschäftigt.

Der Temperatureinfluss.

Bekanntlich wächst bei den meisten bisher untersuchten Reaktionen — wo im Allgemeinen Nichtelektrolyten beteiligt waren — die Reaktionsgeschwindigkeit ganz ungeheuer mit der Temperatur. ARRHENIUS¹⁾ hat betont dass die Auflösungsgeschwindigkeit des Zinks von dieser Regel eine Ausnahme bildet,

¹⁾ Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handl., Bd 24. Afd. II, N:o 2, sid. 4 (1896).

indem sie von der Temperatur nur wenig beeinflusst wird. Wenn man aber die Auflösungsgeschwindigkeit als nur von den Lokalströmen abhängig betrachtet, so bietet dies Verhalten nichts auffälliges, da sowohl die elektromotorische Kraft der galvanischen Elemente wie die Leitfähigkeit der Elektrolyte mit der Temperatur bei weitem nicht so stark geändert wird, wie die Reaktionsgeschwindigkeit bei der Zuckerinversion und anderen früher untersuchten Reaktionen, wo sich Nichtelektrolyte betheiligen. Die folgende Tab. 5 enthält die Temperaturkoeffizienten der Auflösungsgeschwindigkeit des Zinkes nach der von dem Einen von uns ausgeführten, schon mehrfach citierten Arbeit. Die Zahlen geben an, um wie viele Prozente die Auflösungsgeschwindigkeit pro 1° in verschiedenen Temperaturintervallen geändert wird, wobei die Auflösungsgeschwindigkeit bei der tiefsten Temperatur des betreffenden Intervalles = 100 gesetzt worden ist. Die Zahlen sind nur Annäherungen, da die Temperaturkurven im Allgemeinen nicht geradlinig verlaufen.

Tab. 5.

Lösung	Temperaturintervall	Prozentische Änderung der Auflösungsgeschwindigkeit pro 1°
0,1 normale HCl	10°—50°	0
0,5 „ H ₂ SO ₄	10°—55°	3
0,4 „ „	10°—55°	2,8
0,3 „ „	10°—45°	2,5
„ „ „	45°—65°	0,2
0,25 „ „	10°—50°	2,1
„ „ „	50°—65°	— 0,2
0,2 „ „	10°—45°	2
„ „ „	45°—65°	— 0,4
0,15 „ „	10°—45°	1,6
„ „ „	45°—65°	— 0,7
0,1 „ „	10°—45°	1,8

Wenn man bedenkt dass die Leitfähigkeit der betreffenden Elektrolyten sich mit 1,5—2% pro Grad ändern und dass die elektromotorischen Kräfte der galvanischen Elemente Änderungen

von derselben Grössenordnung aufweisen, so erscheinen die Zahlen der Tabelle 5 sehr gut begreiflich. Da die Temperaturkoeffizienten sowohl der Leitfähigkeit wie der elektromotorischen Kraft galvanischer Elemente positiv oder negativ sein können, so lässt sich im Allgemeinen über das Zeichen des Temperaturkoeffizienten bei der Auflösungsgeschwindigkeit von Metallen nichts aussagen. Dem entsprechend kommen in der Tab. 5 sowie positive wie negative Temperaturkoeffizienten vor, ebenso der Fall dass der Temperaturkoeffizient = 0 ist.

Die Auflösung der Metalle als katalytisches Phänomen.

Die Beeinflussung der Auflösung der Metalle durch Verunreinigungen ist seit Alters her zu den katalytischen Phänomenen gerechnet worden. Es mag hier darauf hingewiesen werden dass durch obige Auseinandersetzungen ein katalytisches Phänomen quantitativ berechenbar ist.

Zusammenfassung.

1. An einem als Beispiel gewählten, besonders einfachen Fall, nämlich die von dem Einem von uns untersuchten Auflösungsgeschwindigkeit des Zinks in verdünnten Säuren, haben wir versucht den Verlauf bei der Auflösung der Metalle aufzuklären.

2. Es wurde gezeigt, dass mit Hilfe des Gesetzes der Massenwirkung, in gewöhnlicher Weise angewendet, die Ergebnisse der Versuche nicht zu erklären sind.

3. Es wurde gezeigt, dass die Ergebnisse der Versuche sich gut deuten lassen, wenn man annimmt dass die Auflösung der Metalle nur durch die galvanischen Lokalströme bewirkt wird.

4. Die langsame Auflösung der reinen Metalle ist eine Folgerung der Theorie der galvanischen Lokalströme.

5. Für die Auflösungsgeschwindigkeit vom bleihaltigen Zink wurde folgende spezielle Formel abgeleitet:

$$v = 0,217 \frac{v}{C} (4,51 + 2 \log C_H - \log C_{Zn}) \dots (b)$$

wo den Buchstaben die oben Seite 534 angegebene Bedeutung zukommt.

6. Diese Formel enthält als einzige Unbekannte die Widerstandskapazität C . In Betracht der Unsicherheit, die den Werthen der Überspannung anhaftet, wurde doch die in der Parenthese stehende Konstante 4,51 nicht als bekannt betrachtet, sondern nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den Beobachtungen berechnet; es ergab sich der Werth 4,73, was sehr befriedigend ist. Die mit Hilfe der Werthe 4,73 und $C = 0,255$ berechneten Geschwindigkeiten bei der Auflösung von Zink in Salzsäure verschiedener Konzentration stimmen ausgezeichnet mit den gefundenen.

7. Die allgemeine Formel für die Auflösungsgeschwindigkeit q eines Metalles ist

$$q = f \cdot \frac{x}{C} \cdot e \dots \dots \dots (b') \text{ oder}$$

$$q = f \cdot \frac{x}{C} \left(\frac{0,0576}{n} \log \frac{P_1}{P_2} - 0,0576 \log \frac{P_2}{P_1} - \pi \right) \dots \dots \dots (b'')$$

wo den Buchstaben die oben Seite 534 angegebene Bedeutung zukommt.

8. Diese Formel sagt aus, dass die Auflösungsgeschwindigkeit durch die elektromotorische Kraft des Lokalelementes, die Leitfähigkeit der Lösung und die Widerstandskapazität der Anordnung bestimmt wird; der Proportionalitätsfaktor f' ist durch das gewählte Maass der Auflösungsgeschwindigkeit bestimmt. Die elektromotorische Kraft des Lokalelementes und die Leitfähigkeit der Lösung können in vielen Fällen berechnet werden; als einzige Unbekannte bleibt dann die Widerstandskapazität. Immer können aber die elektromotorische Kraft und die Leitfähigkeit experimentell bestimmt werden. Die Widerstandskapazität lässt sich durch einen Versuch, wo q , x und e bekannt sind, berechnen, wonach die Auflösungsgeschwindigkeit in anderen Fällen berechnet werden kann.

9. Der geringe Einfluss der Temperatur auf die Auflösungs-

geschwindigkeit von Metallen wird nach der Theorie der Lokalströme leicht verständlich.

10. Das katalytische Phänomen, das in der Beeinflussung der Auflösungsgeschwindigkeit der Metalle durch Verunreinigungen besteht, wird quantitativ berechenbar.

Wir werden in der nächsten Zeit Rechnungen über einige anderen Versuche publizieren, besonders über den grossen Einfluss eines Zusatzes von Zinksalz zur Lösung, welche nach der Theorie der Lokalströme leicht gedeutet wird. Auch sind wir mit Messungen der elektromotorischen Kräfte in solchen Fällen, wo sich dieselben nicht leicht vorausberechnen lassen, beschäftigt.

Stockholm, Elektrochemisches Laboratorium der Technischen Hochschule.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademien's Bibliotek.

(Forts. från sid. 514.)

- Catania.** *Accademia Gioenia di scienze naturali.*
Bollettino delle sedute. N. S. Fasc. 66—67. 1901. 8:o.
- Chambésy.** *Herbier Boissier.*
Bulletin. (2) T. 1 (1901): N:o 7—9. 8:o.
- Chemnitz.** *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*
Decaden-Monatsberichte. Jahrg. 3 (1900). Fol.
Jahrbuch. Jahrg. 16 (1898): Abth. 2. 4:o.
- Cherbourg.** *Société des sciences naturelles et mathématiques.*
Mémoires. T. 31. 1898—1900. 8:o.
- Cincinnati.** *Society of natural history.*
Journal. Vol. 19: N:o 7—8. 1900. 8:o.
- Colorado Springs.** *Colorado college.*
Studies. Vol. 9. 1901. 8:o.
- Columbus.** *Ohio state university.*
Annual report. 30 (1899/1900): P. 1—2. 8:o.
- Dijon.** *Académie des sciences, arts et belles-lettres.*
Mémoires. (4) T. 7 (1899—1900). 8:o.
- Dorpat.** *Meteorologisches Observatorium.*
Meteorologische Beobachtungen. 1896: 11—12; 1897, 1899. 8:o.
- Dresden.** *Statistisches Bureau des Ministeriums des Innern.*
Kalender und statistisches Jahrbuch für das Königreich Sachsen. Jahr 1902. 8:o.
Zeitschrift. Jahrg. 47 (1901): H. 1—2. 4:o.
- Dublin.** *Royal Irish Academy.*
Proceedings. (3) Vol. 6: N:o 2; 7. 1901. 8:o.
Transactions. Vol. 31: P. 8—11. 1900. 4:o.
- Emden.** *Naturforschende Gesellschaft.*
Jahresbericht. 85 (1899/1900). 8:o.
- Erlangen.** *Physikalisch-medicinische Societät.*
Sitzungsberichte. H. 32 (1900). 8:o.
- Firenze.** *R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento.*
Pubblicazioni.
Sezione di filosofia e filologia. No. 27—28. 1896—97. 8:o.
Sezione di scienze fisiche e naturali. No. 28—29. 1896—97. 8:o.
Sezione di medicina e chirurgia. No. 15: 4; 18—20. 1896—97. 8:o
— *Società entomologica Italiana.*
Bullettino. Anno 33 (1901): Trim. 1. 8:o.
- Frankfurt a. M.** *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd 26: H. 3. 1901. 4:o.
- Freiburg.** *Naturforschende Gesellschaft.*
Berichte. Bd 11: H. 3. 1901. 8:o.
- Genève.** *Société de physique et d'histoire naturelle.*
Mémoires. T. 33: P. 2. 1899—1901. 4:o.

(Forts. å sid. 572.)

Über die durch Radicale auflösbaren Gleichungen, deren Grad eine Potenz von 2 ist.

Von A. WIMAN.

[Mitgeteilt am 11. September 1901 durch A. LINDSTEDT.]

Nachdem ABEL die Unmöglichkeit bewiesen hatte, die allgemeinen Gleichungen höheren Grades durch Radicale aufzulösen, so blieb noch übrig, ein Verfahren aufzufinden, nach dem man alle metacyklischen (= durch Radicale auflösbaren) Gleichungen aufstellen kann. Diese Aufgabe wird durch einen zweiten, doch erst später bewiesenen, Satz von ABEL vereinfacht, nach welchem eine metacyklische Gleichung imprimitiv sein muss, falls ihr Grad durch mehrere Primzahlen teilbar ist. Die ganze Frage ist sonach als erledigt zu betrachten, falls man in einem beliebigen algebraischen Rationalitätsbereiche alle primitiven metacyklischen Gleichungen, deren Grad eine Primzahlpotenz ist, bestimmen kann. Letztere Aufgabe ist für den Fall eines Primzahlgrades durch Arbeiten von ABEL, KRONECKER und WEBER, und zwar in der Weise gelöst, dass zunächst nicht die Gleichungen selbst, sondern ihre Wurzeln gegeben werden ¹⁾; dagegen kennt man (so viel wir wissen), wenn der Grad n eine höhere Primzahlpotenz ist, nur in zwei Fällen die Gestalt der Wurzeln, nämlich für $n = 4$ und $n = 8$. ²⁾

¹⁾ KRONECKER gab zuerst die allgemeine Form der Lösung und WEBER den ersten vollständigen Beweis. Man vergleiche die ausführlichen Darstellungen bei WEBER, Lehrbuch der Algebra I (2. Auflage 1898), p. 680—703; NETTO, Vorlesungen über Algebra II (1900), p. 415—441.

²⁾ Man sehe noch WEBER, Lehrbuch der Algebra II (2. Auflage 1899), p. 351—389; insbesondere findet man p. 377—387 dortselbst die Auflösung der metacyklischen Gleichungen 8. Grades.

In letzterer Zeit ist es uns gelungen, aus Radicalen zusammengesetzte Ausdrücke von allgemeiner Form aufzufinden, welche Wurzeln einer primitiven metacyklischen Gleichung von einem beliebigen Primzahlpotenzgrade darstellen. Diese Resultate wollen wir hier für den Fall, dass die Gradzahl eine Potenz von 2 ist, mittheilen. In diesem Falle gestalten sich nämlich die Verhältnisse einfacher als im allgemeinen Falle. Ist nämlich die Gradzahl p^m , so erscheint es, falls p eine ungerade Primzahl darstellt, zweckmässig, wenn auch nicht durchaus nötig,¹⁾ Fallunterscheidungen nach den verschiedenen Unterkörpern einzuführen, welche der Körper der p -ten Einheitswurzeln und der durch die Wurzeln der Gleichung definierte Körper gemein haben können.

Bekanntlich erhält man die Wurzeln einer Gleichung 4. Grades in der Gestalt

$$(1) \quad a + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3},$$

wo a rational ist, und u_1, u_2, u_3 die Wurzeln einer Gleichung 3. Grades bezeichnen. Der Ausdruck (1) nimmt aber 8 verschiedene Werte an, so dass eine neue Bedingung

$$\sqrt{u_1}\sqrt{u_2}\sqrt{u_3} = b$$

nötig ist, wo b eine neue rationale Zahl bedeutet. Setzt man

$$v_1 = \frac{b}{u_1}; v_2 = \frac{b}{u_2}; v_3 = \frac{b}{u_3},$$

so sind auch v_1, v_2, v_3 die Wurzeln einer Gleichung 3. Grades, und der Ausdruck (1) geht in den folgenden über

$$(1') \quad a + \sqrt{v_2}\sqrt{v_3} + \sqrt{v_1}\sqrt{v_3} + \sqrt{v_1}\sqrt{v_2},$$

welcher nur 4 verschiedene Werte annimmt, wenn die darin vorkommenden Quadratwurzeln auf alle möglichen Arten gewählt werden;²⁾ zudem können die v_i Wurzeln einer völlig beliebigen

¹⁾ Für den Fall eines Primzahlgrades hat WEBER (Algebra I, p. 691) bewiesen, dass die Gültigkeit des erhaltenen allgemeinen Ausdrucks für die Wurzeln an keinen beschränkenden Voraussetzungen gebunden ist.

²⁾ Man sehe WEBER, Algebra II, p. 387—389. Nach einer Angabe dortselbst findet man diese Form für die Wurzeln der Gleichungen 4. Grades zuerst bei BURNSIDE und PANTON, Theory of equations (2. edition 1886).

Gleichung 3. Grades sein, so dass z. B. nicht, wie bei den u_i , ihr Product ein vollkommenes Quadrat zu sein braucht.

Handelt es sich nun um das allgemeinere Problem der primitiven metacyklischen Gleichungen vom Grade 2^m , so lässt sich auch hier ohne Schwierigkeit erweisen, dass die Wurzeln sich in der Gestalt

$$(2) \quad a + \sum_{k=1}^{k=2^m-1} \sqrt{u_k}$$

darstellen lassen müssen, wo die u_k die Wurzeln einer gewissen Gleichung vom Grade $2^m - 1$ bezeichnen. Wählt man in (2) die Quadratwurzeln auf alle möglichen Weisen, so bekommt man offenbar 2^{2^m-1} verschiedene Werte. Es gelten aber Bedingungen, durch welche die Vorzeichen der Radicale $\sqrt{u_k}$ von einander abhängig werden, so dass unter der obigen Anzahl von Werten nur 2^m zulässig sind. Nach aller Wahrscheinlichkeit muss es aber möglich sein, (2) in einen solchen Ausdruck umzuformen, welcher keine überflüssigen Werte liefert. Wie diese Umformung aus den gegebenen Voraussetzungen des Problems zu bewerkstelligen ist, hoffen wir an einem anderen Orte darlegen zu können. Hier wollen wir direct einen fertigen Ausdruck von der gesuchten Art aufschreiben, welcher vermutlich auch die nötige Allgemeinheit besitzt; doch müssen wir gestehen, dass wir hierfür einen völlig strengen Beweis noch nicht liefern können.

Um das obige Ziel zu erreichen, geben wir den u_k Ausdrücke vermittelt $2^m - 1$ neuer Grössen v_{z_1, z_2, \dots, z_m} , wo die Indices z_1, z_2, \dots, z_m 0 oder 1 bedeuten, und nur die einzige Combination $z_1 = z_2 = \dots = z_m = 0$ ausgeschlossen wird. Dasselbe soll bezüglich der Indices t_1, t_2, \dots, t_m gelten, so dass man ebenfalls $2^m - 1$ verschiedene Combinationen t_1, t_2, \dots, t_m bekommt. Jeder einzelnen Combination t_1, t_2, \dots, t_m seien sämtliche Systeme z_1, z_2, \dots, z_m zugeordnet, welche der Congruenz

$$(3) \quad t_1 z_1 + t_2 z_2 + \dots + t_m z_m \equiv 1 \pmod{2}$$

Genüge leisten. Man ersieht sofort, dass jede solche Congruenz $2^m - 1$ Lösungen besitzt; eben so viele Lösungen hat ja die andere Congruenz, welche aus (3) entsteht, wenn rechts 1 durch 0 ersetzt wird, falls man den Fall, wo alle $z_i = 0$, mitrechnet.

Der Ausdruck für die Wurzeln einer primitiven metacyklischen Gleichung vom Grade 2^m , welchen wir hier geben wollen, ist von der folgenden Gestalt:

$$(4) \quad a + \sum_{t_1, t_2, \dots, t_m} F_{t_1, t_2, \dots, t_m} \prod_{z_1, z_2, \dots, z_m} \sqrt{v_{z_1, z_2, \dots, z_m}}.$$

Die Summation wird hier über die $2^m - 1$ verschiedenen möglichen Combinationen t_1, t_2, \dots, t_m erstreckt, und das zu jeder solchen Combination gehörige Productzeichen umfasst die $2^m - 1$ Lösungen in z_1, z_2, \dots, z_m , welche der zugehörigen Congruenz (3) genügen. F_{t_1, t_2, \dots, t_m} soll als eine rationale symmetrische Funktion der $2^m - 1$ Grössen v betrachtet werden, deren Quadratwurzeln unter dem zugehörigen Productzeichen stehen. Die Grössen v , und folglich auch die Funktion F , lassen sich offenbar bis zu einem gewissen Grade willkürlich wählen. Hierauf beruht, dass es Herrn WEBER gelungen ist, in seinen Formeln über die metacyklischen Gleichungen 8. Grades die Funktion F durch eine rationale Grösse A zu ersetzen; bei den Gleichungen 4. Grades ist sogar, wie (1') zeigt, auch dieser Factor A überflüssig.

Es ist leicht nachzuweisen, dass der Ausdruck (4) nur 2^m verschiedene Werte annimmt, wenn die darin vorkommenden Quadratwurzeln auf alle möglichen Arten gewählt werden. Man erhält nämlich aus einem Anfangswerte die übrigen durch Änderung der Vorzeichen der m Radicale $\sqrt{v_{1, 0, \dots, 0}}, \sqrt{v_{0, 1, \dots, 0}}, \dots, \sqrt{v_{0, 0, \dots, 1}}$, bei denen ein Index = 1, die übrigen = 0 sind. Um diese Tatsache klarzulegen, betrachten wir drei Radicale $\sqrt{v_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}}, \sqrt{v_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m}}, \sqrt{v_{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_m + \beta_m}}$ (die Indices mod. 2 genommen). Wir behaupten, dass eine Änderung des Vorzeichens des zuletzt aufgeschriebenen Radicals dadurch ersetzt werden kann, dass man die beiden ersteren mit den entgegengesetzten Vorzeichen nimmt. Dies folgt ganz einfach

daraus, dass, falls man in einer Congruenz (3) die 3 Substitutionen $z_i = \alpha_i, \beta_i, \alpha_i + \beta_i$ ausführt, die Congruenz, wie einfache Überlegungen zeigen, entweder durch keine oder zwei von ihnen befriedigt wird. Durch wiederholte Anwendung derselben Schlussweise folgert man nun, dass ein Vorzeichenwechsel eines beliebigen Radicals $\sqrt{v_{z_1, z_2, \dots, z_m}}$, bei dem etwa q Indices $= 1$ sind, durch die gleichzeitige Änderung der Vorzeichen derjenigen q von den m vorerwähnten Radicalen ersetzt werden kann, wo der Index 1 die Stellen jener q Indices durchläuft.

Jetzt nur noch einige Worte über die Gleichung vom Grade $2^m - 1$, welche die Grössen v befriedigen sollen. Die Gruppe dieser Gleichung muss von solcher Art sein, dass bei ihr die verschiedenen Producte, welche in (4) eingehen, sich geschlossen permutieren, oder, was hiermit äquivalent ist, dass die linearen Formen, welche die linken Glieder von (3) liefern, unter einander vertauscht werden. Diese Bedingung wird durch die lineare Gruppe L erfüllt, welche sämtliche Substitutionen von der Gestalt

$$(5) \quad z'_i = a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \dots + a_{im}z_m \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

enthält, bei denen die Koeffizienten a_{ik} der Bedingung genügen, dass die Substitutionsdeterminante

$$D \equiv 1 \pmod{2}$$

ist. Für $m > 2$ ist aber diese Gruppe L nicht metacyklisch.¹⁾ Die Gruppe einer primitiven Gleichung vom Grade 2^m , deren Wurzeln sich in der Gestalt (4) darstellen lassen sollen, hat in der That, ausser der Eigenschaft der Primitivität, nur eine einzige Bedingung zu erfüllen, nämlich, dass sie eine ausgezeichnete Abel'sche Untergruppe vom Grade 2^m enthalten muss; die Gleichung, welcher die Grössen v genügen, ist dann als eine Partialresolvente aufzufassen, durch deren Lösung die Gruppe der Gleichung auf eben jene Abel'sche G_{2^m} reduziert wird.

¹⁾ Man sehe C. JORDAN, Traité des substitutions et des équations algébriques, p. 105.

Verlangen wir nun, dass die Grössen v durch Wurzelziehen darstellbar sein sollen, so kann für $m > 2$ als Gruppe jener Partialresolvente nicht die Gesamtgruppe L , sondern nur eine metacyklische Untergruppe von ihr auftreten, welche zudem auf Grund der Eigenschaft der Primitivität noch eine gewisse Bedingung erfüllen muss. Von umfassendsten metacyklischen Untergruppen solcher Art giebt es aber im Allgemeinen mehrere Typen innerhalb der linearen Gruppe L .¹⁾ Eine einzige solche Type tritt für jedes m auf und ist vom Grade $(2^m - 1)m$. Die entsprechenden Gleichungen vom Grade 2^m liefern eine Reihe von Typen metacyklischer Gleichungen, als deren Anfangsglieder die Gleichungen 4. Grades und die metacyklischen Gleichungen 8. Grades zu betrachten sind.

Betreffend die wirkliche Darstellung der Grössen v durch Radicale, so lässt sich diese Aufgabe in voller Allgemeinheit erst dann erledigen, wenn auch über die Wurzeln der metacyklischen Gleichungen vom Grade p^m , wo p eine ungerade Primzahl bedeutet, die nötigen Untersuchungen angestellt worden sind. Doch liesse sich schon mit den jetzt zugänglichen Hilfsmitteln jene Type von Gleichungen, deren Gruppe den Grad $2^m(2^m - 1)m$ besitzt, erschöpfend behandeln.

¹⁾ C. JORDAN, l. c., p. 385 u. ff.

Über einige amphicarpe nordwestafrikanische Pflanzen

Von Sv. MURBECK.

[Mitgeteilt am 11. September 1901 durch V. WITTROCK.]

1. *Emex spinosa* (L.) CAMPDERA. — Figg. 1—4.

Obleich diese Pflanze schon lange in botanischen Gärten kultiviert ist und ausserdem in Herbarien häufig vorkommt, ist es erst in der letzten Zeit bekannt geworden, dass sie ein Beispiel jener Erscheinung, die Amphicarpie genannt worden ist, darbietet. MEISNER's Beschreibung in DE CANDOLLE's *Prodromus*¹⁾, wo es heisst: »Fructus infimi demum valde incrassati, calyce quasi suberoso-costato«, zeigt allerdings, dass der genannte Auktor gewisse Verschiedenheiten zwischen den untersten Früchten und den übrigen wahrgenommen hat, allein erst von BATTANDIER ist das eigentümliche Verhalten dieser Pflanze, in der Hauptsache wenigstens, richtig aufgefasst worden; es wird von ihm mit folgenden Worten beschrieben:²⁾ »Cette plante pousse déjà des axes floraux mâles et femelles à l'aisselle des premières feuilles radicales. Très généralement ces premiers axes floraux sont souterrains. Dans ce cas, l'axe mâle se réduit à un seul glomérule de fleurs longuement pédonculées, dont les anthères arrivent juste au niveau des énormes stigmates plumeux

¹⁾ A. DE CANDOLLE, *Prodromus systematis regni vegetabilis*, XIV, p. 40. — Paris 1856—57.

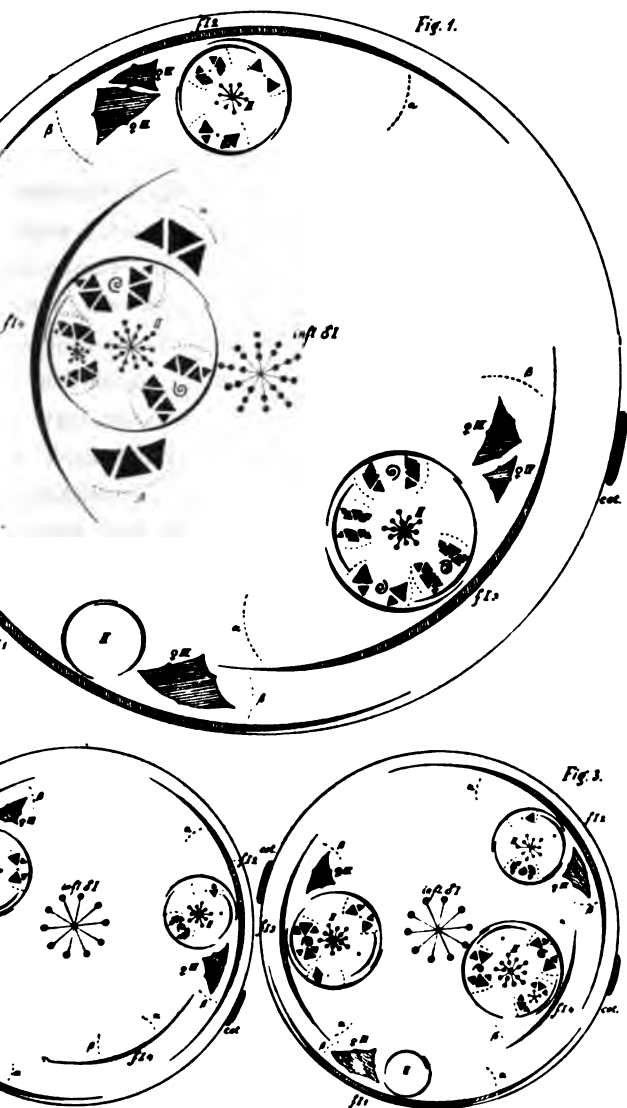
²⁾ A. BATTANDIER, *Sur quelques cas d'Hétéromorphisme* (Bulletin de la Société Botanique de France, T. XXX (2:e Sér. T. V), p. 243. Paris 1883).

des fleurs femelles. Elles contiennent peu de pollen, mais ce pollen est identique avec celui des fleurs aériennes. Les fruits souterrains sont très gros et très charnus. — Diese Beobachtungen BATTANDIER's sind, so weit ich habe finden können, die einzigen, die vorliegen. Sie scheinen ausserdem wenig beachtet worden zu sein; so z. B. erwähnt sie nicht HUTH in seiner sonst recht vollständigen Zusammenstellung der bis dahin bekannten Fälle von Amphicarpie etc.¹⁾

Weil bei der fraglichen Pflanze die Amphicarpie in dem engsten Zusammenhang mit dem morphologischen Aufbau steht, wird es angemessen sein, eine Beschreibung desselben vorzuschicken, zumal er in der That ein anderer ist, als man infolge der Angaben BATTANDIER's voraussetzen muss. — An Exemplaren, die aus algerischen Samen gezogen und in Töpfen gehalten worden sind, habe ich die Entwicklung der Pflanze bequem verfolgen können; ausserdem habe ich Material zur Verfügung gehabt, das in dem botanischen Garten in Lund im freiem Lande kultiviert worden ist.

Die Pflanze ist einjährig mit einer möhrenähnlichen, aber ziemlich kleinen Pfahlwurzel. Auf die linealen oder lineallanzettlichen, bisweilen 15 cm. langen Keimblätter (Figg. 1—3, *col*), die am Grunde zu einer kurz röhrenförmigen, die Plumula umschliessenden Partie vereint sind, folgen einige der Hauptachse angehörende Laubblätter (fI_1 — fI_4) mit langem, unten scheidigem Stiel und eirunder oder herzförmig eirunder Spreite. Diese Blätter stehen in einer Spirallinie mit $\frac{2}{5}$ Divergenz. Bei ganz schwach entwickelten Individuen beträgt ihre Zahl zuweilen nur 3 oder 2, sonst konstant 4, auch bei besonders üppigen Exemplaren. Gewöhnlich entspringen sie alle dem Grunde der erwähnten Keimblattröhre, der zufolge der sehr merkbaren Verkürzung, welche die Wurzel zeigt, schon in einem frühen Stadium ein kleines Stück unter die Erdoberfläche hinabgezogen wird. Unmittelbar

¹⁾ E. HUTH, Ueber geokarpe, amphikarpe und heterokarpe Pflanzen. (Abhandlungen d. Naturwiss. Vereins d. Regierungsbez. Frankfurt. Bd. VIII, S. 89—117. Berlin 1891.)



Figg. 1—3.

3 blühenden Individuen von *Euxestaspis spinosa* (L.) CAMPD. — cot. Keimblatt (schraffiert, wenn der Insertionspunkt subterrän ist); inf. ♂ männliche Blüte; inf. ♀ weibliche Blüte (schraffiert, wenn sie subterrän ist). Die Achsen I—IV bezeichnen die Ordnung des Achsensystemes, zu dem die blühenden Gebilde gehören. — Weitere Erläuterungen im Texte.

auf diese basalen Laubblätter folgt, als Abschluss der Hauptachse, eine männliche Inflorescenz (*infl.* ♂ *I*), auch sie folglich mit einem unterirdischen Insertionspunkt und sehr oft auf einen einzigen Wirtel (Doppelwickel) reduziert (Figg. 2 & 3), dessen Einzelblüten jedoch, um über die Erdoberfläche emporragen zu können, mit verhältnismässig langem Stiele versehen sind. Da BATTANDIER sagt, dass die Pflanze »des axes floraux mâles etc. à l'aisselle des premières feuilles radicales« erzeuge, so ist damit die eben erwähnte männliche Inflorescenz gemeint, welche indessen, wie gesagt, die Hauptachse des Individuums abschliesst. — In den meisten Fällen ist also die Pflanze, hinsichtlich ihrer Hauptachse, acaul.¹⁾ Dasselbe ist übrigens, kann man sagen, auch dann der Fall, wenn die männliche Inflorescenz aus 2 bis 3 Wirteln besteht, weil sie abstirbt, kurz nachdem die Blüten ihren Pollen ausgestreut haben, was sehr früh geschieht. Nicht gerade selten kommt es indessen vor, namentlich bei kräftigen Exemplaren, dass das zwischen dem dritten und vierten Laubblatt gelegene Stengelglied sich streckt und eine Höhe von 1 bis 6 cm erreicht, mit anderen Worten, dass das oberste Laubblatt (*fI*₄ Fig. 1) zu einem wirklichen Stengelblatt wird, und solchenfalls wird auch die Fortsetzung der Primanachse, d. h. die männliche Inflorescenz, verlängert und trägt 3 bis 4 über einander gestellte Blütenwirtel. Auch in diesem Fall bleibt jedoch die Hauptachse verhältnismässig kurz, 3 bis 10 cm., und wenn die Pflanze oft diese Länge um das vielfache übersteigt, so beruht dies ausschliesslich auf der Entwicklung verlängerter, blatt- und blümentragender Sprosse zweiter oder höherer Ordnung.

Solche Sprosse zweiter Ordnung (*II*) entspringen nun regelmässig der Achsel der drei untersten Blätter der Hauptachse,

¹⁾ Beiläufig bemerke ich, dass bei einer Menge Repräsentanten der nordafrikanischen Flora, und besonders bei zahlreichen Wüstenpflanzen, die Hauptachse sehr schwach entwickelt ist, während Achsen zweiter oder höherer Ordnung sich häufig stark verlängern. Als ein anderer charakteristischer Zug für die Flora der Wüsten- und Steppengebiete Nordafrikas ist ferner das fast gänzliche Fehlen des bei uns so allgemeinen dikotylen Rhizoms hervorzuheben. Ich hoffe doch, bei einer anderen Gelegenheit hierauf zurückkommen zu können.

und, wenigstens wenn diese letztere in soeben erwähnter Weise verlängert ist, auch der Achsel des vierten Blattes. In den drei untersten Blattachsen finden sich aber ausserdem noch, und zwar auf der kathodischen Seite des erwähnten Sprosses, eine oder bisweilen zwei grosse, sitzende, mit ihren grossen Narben knapp über die Erdoberfläche hinaufspriessende, im übrigen subterrane weibliche Blüten (Figg. 1—3, ♀ III, ♀ IV). Diese entwickeln sich mit erstaunlicher Schnelligkeit, und die centrale männliche Inflorescenz, die wie erwähnt ebenfalls sehr früh ausgebildet ist, hat gerade die Aufgabe, dieselben zu bestäuben. Nach der Bestäubung werden sie, infolge der Verkürzung, welche die Wurzel fortwährend erleidet, noch vollständiger unter die Erdoberfläche hinabgezogen. Die der ersten Blattachsel entspringende Blüte hat in ihrer Entwicklung immer einen kleinen Vorsprung vor der zweiten, diese vor der dritten Blattachsel; ganz umgekehrt verhält es sich mit den beblätterten Sprossen, wie aus den Diagrammen ersichtlich ist. Wenn zwei weibliche Blüten sich in derselben Blattachsel finden (Fig. 1, fI_2 & fI_3), hat immer die eine, und zwar die, welche in Bezug auf die Hauptachse des Individuums weiter nach innen steht (♀ III), einen bedeutenden Vorsprung vor der anderen (♀ IV).

Die Stellungsverhältnisse in den Achseln der basalen Laubblätter sind nun offenbar die folgenden. Der dort befindliche beblätterte Spross fängt mit zwei transversalen Vorblättern (α & β) an, welche allerdings nicht thatsächlich vorhanden sind, deren Dasein man aber theoretisch vorauszusetzen berechtigt ist, theils wegen der Verzweigung in der vierten Blattachsel in Fig. 1, theils darum, weil nach PAYER¹⁾ und EICHLER²⁾ zwei solche Vorblätter bei mehreren Gattungen der Familie, wie *Polygonum*, *Coccoloba* und *Triplaris*, thatsächlich vorhanden sind. Während nun in den drei unteren Blattachsen das anodische Vorblatt (α) steril bleibt, ist dagegen das kathodische (β) immer fertil und stellt das Stützblatt einer subterranean weiblichen Blüte dar; wenn diese letztere eine zweite Blüte an ihrer Seite hat, so ist

¹⁾ J. B. PAYER, *Traité d'organographie de la fleur*, p. 289. Paris 1857.

²⁾ A. W. EICHLER, *Blüthendiagramme*, II, S. 75. Leipzig 1878.

diese offenbar das Ergebnis einer wickelförmig wiederholten Verzweigung. Genau genommen stehen also die subterranean Blüten nicht »à l'aisselle des feuilles radicales«, d. h. sie vertreten nicht ein Achsensystem zweiter, sondern vielmehr eins dritter, bzw. vierter Ordnung.

Dass die obige — übrigens ganz natürliche — Deutung die richtige ist, wird, wie erwähnt, durch die Verzweigung des in der Achsel des vierten Blattes befindlichen Sprosses¹⁾ bestätigt. An diesem gewöhnlich kräftig entwickelten Spross, sind, wenigstens wenn die Hauptachse der Pflanze verlängert ist und der Spross demnach von einem Punkt oberhalb der Erdoberfläche ausgeht, öfters die beiden Vorblätter fertil (Fig. 1), und an seinem Grund findet man dann, rechts und links, entweder ein vollständiges weibliches Dichasium (Fig. 1) oder einen Wickel; aber nicht selten ist nur das eine Vorblatt fertil, ganz wie an den Secundansprossen, die soeben besprochen wurden, und an dessen Grund steht dann auch hier an der kathodischen Seite ein zweiblütiger weiblicher Wickel, weniger oft ein 3-blütiges Dichasium.²⁾ Es ist hieraus offenbar, dass die subterranean Blüte einen Seitenzweig des beblätterten Sprosses, und nicht etwa die Mutterachse desselben, darstellt.

Der Bau der beblätterten Achse zweiter Ordnung bietet sonst hier wenig Interesse. Er ist indessen in den beigegeführten Diagrammen ausgegeben, und beiläufig sei bemerkt, dass die Achsen mit 2 bis 4 Stengelblättern und verlängerten Internodien versehen sind, dass sie sämtlich mit der Hauptachse des Individuums homodrom sind, dass sie wie diese mit einer männlichen Inflorescenz abgeschlossen werden, welche jedoch hier immer aus mehreren Wirteln besteht, dass in ihren Blattachseln in einerlei Weise gebaute, beblätterte, homo- und antidrome Sprosse entstehen, welche am Grunde sitzende weibliche Blüten tragen und, wenn sie eine kräftigere Ausbildung erhalten, die Fortsetzung der Mutterachse zur Seite werfen, so dass die Stengel sympodial

¹⁾ Bisweilen ist der Spross ganz untardrückt, wie in Fig. 2.

²⁾ Fig. 3 stellt einen Fall dar, wo keines der Vorblätter fertil ist.

aufgebaut werden, wie bei *Emex Centropodium* MEISN.¹⁾, obgleich sie sich aus einer geringeren Zahl Glieder als bei dieser zusammensetzen.

Die subterranean weiblichen Blüten, deren Zahl nach den beigegebenen Diagrammen meistens zwischen 3 und 5 wechselt, unterscheiden sich, wie bereits von BATTANDIER hervorgehoben wurde, von den aërischen durch bedeutend grössere Dimensionen, kräftiger entwickelte Narben (vgl. Fig 4 *a* & *b*), so wie dadurch,

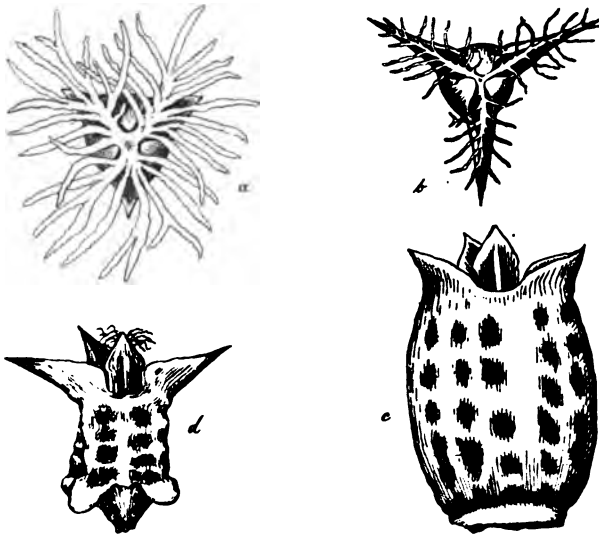


Fig. 4.

Emex spinosa (L.) CAMPD. — *a* eine subterrane, *b* eine aërische weibliche Blüte mit den Narben; von oben gesehen (Vergr. 7). — *c* eine subterrane, *d* eine aërische weibliche Blüte im Fruchtstadium (Vergr. 4).

dass die Hülle, welche das Perigon um die ebenfalls bedeutend grössere Karyopse bildet, fleischig-spongiös und auf jeden Fall bei der Fruchtreife weniger stark verholzt ist. Allein auch ihre Form ist eine andere (vgl. Fig. 4 *c* & *d*) nicht nur in so fern, dass sie durch das Drängen und den Druck von aussen nach innen in dieser Richtung abgeplattet worden sind, sondern auch dadurch, dass die Spitzen der drei äusseren Perigonblätter ganz

¹⁾ Vgl. EICHLER, a. a. O., S. 76.

kurz, schwach und fast aufrecht, bei den aërischen Früchten dagegen lang, kräftig, nach aussen gerichtet und zuletzt sehr hart und stechend sind. — Die aërischen weiblichen Blüten kommen grösstenteils bedeutend später als die subterranean zum Vorschein, und dasselbe ist der Fall mit den männlichen Inflorescenzen, die zur Bestäubung derselben bestimmt sind. Der grösste Teil der aërischen Früchte reifen demgemäss mehrere Wochen später als die subterranean.

Auch in Betreff der männlichen Blüten sind übrigens gewisse Verschiedenheiten hervorzuheben. Wenn die männliche Inflorescenz der Hauptachse, wie es am häufigsten der Fall ist, einen subterranean Ausgangspunkt hat, und dieselbe dann auf einen einzigen Wirtel reduziert ist, werden die Blütenstiele, aus bereits angeführten Gründen, im allgemeinen länger als in den übrigen, immer rein aërischen Inflorescenzen, die Antheren dagegen, wie BATTANDIER angedeutet hat, etwas kleiner. Die Blüten dieses Wirtels habe ich ausserdem durchgehend nach der 2-Zahl gebaut gefunden (2 + 2 Perigonblätter, 2 Paar Staubgefässe); in allen übrigen männlichen Inflorescenzen finden sich dagegen bei der fraglichen Art fast ausschliesslich nach der 3-Zahl gebaute Blüten.

Die Früchte aus Algerien, die zu meiner Verfügung standen, wurden bei der Saat in der Weise sortiert, dass in gewisse Töpfe nur subterranean, in andere nur aërische kamen, und verdient es hierbei hervorgehoben zu werden, dass die aus den ersteren aufgewachsenen Pflanzen im ganzen bei weitem kräftiger waren, was ja übrigens zu der bedeutenderen Grösse der Karyopse, dem reichlicheren Nährgewebe und dem ohne Zweifel von vorn herein kräftigeren Embryo gut stimmt.

Die meisten Auktoren, die sich mit den Erscheinungen beschäftigt haben, welche Amphicarpie und Geocarpie genannt worden sind, haben an ihre Beschreibungen Reflexionen über die biologische Bedeutung dieser Eigentümlichkeiten geknüpft und dieselben als einen Schutz für die Samen entweder gegen die Angriffe von Tieren oder gegen ungünstige klimatische Einflüsse be-

trachtet.¹⁾ In einem 1895 veröffentlichten Aufsatz hat ENGLER²⁾ auch die Ursachen jener Erscheinungen, oder vielleicht richtiger die Bedingungen derselben, zu erforschen gesucht. Er sagt (S. [62] 6): »Die erste Ursache für die Geocarpie oder Amphicarpie muss die sein, dass diese Pflanzen die zur Blütenbildung nothwendigen Stoffe entweder schon bereit haben, wenn sie ihre unteren Blätter am Hauptstengel entwickelt haben oder wenn ihre unteren dem Boden anliegenden oder in denselben eindringenden Seitensprosse entwickelt sind.«³⁾ Diese Auffassung ist offenbar auch auf *Emex spinosa* vollkommen anwendbar. Eine ebenso wichtige Bedingung für die Amphicarpie bei dieser Pflanze ist indessen die oben erwähnte Verkürzung der Pfahlwurzel. Es geht dies aus dem folgenden hervor. Eine der in Töpfen kultivierten Pflanzen hatte beim Keimen sich so benommen (vielleicht weil die Frucht eine besonders ungünstige Lage gehabt), dass das Hypocotyl und der oberste Teil der Pfahlwurzel ein gutes Stück über die Erde hinaufragten: der Insertionspunkt der Keimblätter befand sich volle 2 cm. oberhalb der Erdoberfläche zu einer Zeit, wo die basalen weiblichen Blüten zwischen den Stielen der soeben entfalteten Laubblätter zu erscheinen begannen. Die Narben zeigten sich hier merkbar kleiner als gewöhnlich und die Spitzen der Perigonblätter etwas kräftiger und mehr nach aussen gerichtet; die Form des Scheitels des Perigons verriet ausserdem, dass dies bedeutend weniger als in gewöhnlichen Fällen abgeplattet war. In ihrem Bau näherten sich also die Blüten bedeutend den aërischen. Im Verlauf zweier Wochen wurde allmählich der entblösste Teil der Wurzel nebst dem ganzen Hypocotyl in die Erde hinabgezogen, nach noch einer Woche ragten die erwähnten Blüten, die jetzt voll entwickelte Früchte hatten, nur mit den Spitzen der Perigonblätter über die Erdoberfläche

¹⁾ Vgl. die zahlreichen Litteraturauszüge in der Bearbeitung HUTN'S.

²⁾ Ueber Amphicarpie bei *Fleurya podocarpa* WEDD., nebst einigen allgemeinen Bemerkungen über die Erscheinung der Amphicarpie und Geocarpie (Sitzungsber. d. k. preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 1895, V).

³⁾ Für zwittrblütige, amphicarpe Pflanzen wird ferner (S. [64] 8) als eine notwendige Bedingung betont, dass die Blüten kleistogam werden können.

empor. Als kurz darauf die Pflanze aus der Erde herausgenommen wurde, war der urnenähnliche Teil des Perigons fast ebenso weich und fleischig wie an typisch subterranean Früchten, und dass diese Eigenschaft, so wie die nunmehr abgeplattete Form die Folge davon war, dass die Frucht ihre Entwicklung unter der Erde abgeschlossen hatte, erleidet nicht den geringsten Zweifel. — Vielleicht spielt die Verkürzung der Wurzel keine unwesentliche Rolle bei einigen anderen amphicarpen Pflanzen.

Dass die Amphicarpie der fraglichen Pflanze gewisse Vorteile bietet, scheint schon aus dem Grunde annehmbar, weil die Erscheinung vollkommen konstant ist. Als Schutz gegen Angriffe von Tieren kann man sie jedoch schwerlich auffassen, weil die aërischen Früchte durch ihre holzharten und ausserdem noch mit groben, hervorragenden und stechenden Stacheln bewaffneten Perigon in solcher Beziehung vorzüglich gerüstet zu sein scheinen. Dass ein Teil der Früchte schon 6 bis 8 Wochen, nachdem die Pflanze der Erde entspross, mit vollständig ausgebildetem Embryo versehen und zugleich in die Erde eingebettet ist, muss dagegen in so fern vorteilhaft sein, als die Pflanze, deren Vegetationszeit in Januar bis April fällt, keine besonderen Einrichtungen besitzt, um der langen Periode fast absoluten Regemangels zu widerstehen, die wenigstens in den centralen Teilen des Verbreitungsgebiets der Species (Marokko, Algerien, Tunesien, Tripolis und Barka)¹⁾ regelmässig unmittelbar hierauf, sehr oft aber noch früher eintritt, in welchem letzteren Falle das ganze oberirdische System stark reduziert wird. Auch gegen die Nachtfroste, die z. B. im Inneren Algeriens und Tunesiens oft noch im März eintreffen, muss die subterrane Lage der Blüte und der jungen Frucht einen wirksamen Schutz bieten.

¹⁾ Ausserhalb dieses Gebiets findet sich die Species nur in Portugal, dem südlichen Spanien, Sardinien, Sicilien, Calabrien, Griechenland und Creta.

2. *Scrophularia arguta* SOLAND. — Figg. 5 & 6.

Dass diese Pflanze amphicarp ist, ist durch eine von C. BOLLE in seinem Aufsatz: »Die Scrophularien der canarischen Inseln«¹⁾ veröffentlichte Mitteilung DURIEU DE MAISONNEUVE's bekannt geworden. Es heisst darin (S. 205) u. a.: »In einer ziemlich vorgeschrittenen Epoche ihres Daseins, gegen Ende der Blüthezeit, entwickeln sich unten am Stengel hie und da achselständige, blüthentragende Zweige. Diese Zweige, welche aus dem untersten Blattpaare entspringen, wachsen, dicht an den Stengel angedrückt, nach unten, erreichen so den Boden und dringen mehr oder weniger in ihn ein . . . Alle diese tragen fruchtbare Blüten. Die der untersten Zweige sind apetal, wenn sie vollkommen unterirdisch sind.«

Das Verhalten der Pflanze verdient etwas ausführlicher beschrieben zu werden; gewisse Angaben der erwähnten Mitteilung bedürfen ausserdem noch der Modifikation oder Berichtigung. Bei der Untersuchung habe ich hauptsächlich lebendes Material benützt, aus in Töpfe gesäeten südtunesischen Samen entstanden.

Die Pflanze (Fig. 5) ist einjährig mit einem steif aufrechten, 2—5 dm. hohen, einfachen oder an der Mitte armästigen Stengel, der an seiner oberen Hälfte kurzgestielte, 2—3-, selten 4-blütige Inflorescenzen in den Achsen der nach oben immer kleineren Blätter trägt. Die Inflorescenzstiele sind, wie die Blütenstiele, dünn, die Kelchzipfel an dem Rücken hoch gekielt; die Blumenkrone (Fig. 6, a) ist mindestens doppelt so lang wie diese (etwa 6 m.m.), mit weissem Tubus, dunkel blutrotem Saum und besonders kräftig entwickelter Oberlippe; das Staminodium ist ungewöhnlich gross, der Griffel eben so lang wie das Ovarium, welches zur Zeit der Befruchtung den fast sphärischen Kronen-

¹⁾ Verhandlungen d. k. k. zool.-botan. Gesellsch. in Wien. Bd. XI. — Wien 1861.

tubus bei weitem nicht ausfüllt; die reife Kapsel (Fig. 6, b) ist am Grunde 4 mm. breit und enthält zahlreiche Samen.

Schon während die Pflanze noch ganz jung ist, z. B. während sie noch nur zwei Paar Stengelblätter trägt und die Knospen der eben erwähnten Blüten noch nicht zum Vorschein gekommen sind, erscheint in der Achsel der beiden Keimblätter, deren



Fig. 5.

Scrophularia arguta SOLAND.; $\frac{1}{3}$.

Insertionspunkt sich gewöhnlich 2—5 mm. oberhalb der Erdoberfläche befindet, ein kleiner Spross, der teils durch seine Rigidität, teils dadurch, dass er anfänglich horizontal wächst, gekennzeichnet ist. Schon wenn diese Sprosse eine Länge von wenigen mm. erreicht haben, richtet sich ihre Spitze gerade nach unten;

gleichzeitig erfolgt eine wickelförmig wiederholte Verzweigung aus ihren zu ganz kleinen Schuppen reduzierten Blättern, und man erkennt, dass die Sprosse Inflorescenzen darstellen, gleichwertig mit denen, die später aus dem oberen Teil des Stengels entspringen. Wenn DURIEU sagt, dass sie sich erst gegen Ende der Blütezeit entwickeln, so dürfte dies darauf beruhen, dass sie erst da von ihm beachtet worden sind. In der That ist die erste Kapsel dieser geophilen Inflorescenzen beinahe vollkommen ausgewachsen, wenn die ersten Blüten der aërischen sich öffnen. Die erste Kapsel bleibt gewöhnlich in der Erdoberfläche liegen; die Spitze des Sprosses dringt indessen in der Regel in die Erde hinab, und hier entwickeln und reifen wenigstens die meisten der folgenden Blüten ihre Frucht. Die geophilen Inflorescenzen enthalten gewöhnlich 4—6, zuweilen bis 8 Blüten, also, eigentümlicherweise, eine grössere Zahl als die aërischen; ihre Länge ist doch nicht bedeutend, und im allgemeinen dringen sie nur 5—15 mm. in die Erde, eine und die andere kann sogar in ihrer Gesamtheit in der Oberfläche selbst bleiben.

Ausser diesen in den Achseln der Keimblätter konstant vorhandenen Inflorescenzen, erzeugt aber die Pflanze, jedoch keineswegs immer, ähnliche geophile Blütenstände auch aus den Achseln des untersten oder der beiden untersten Stengelblattpaare (Fig. 5, die zwei Fragmente in der Mitte), welche sich gewöhnlich 1,5—3 cm. über der Erdoberfläche befinden. Diese Blütenstände gelangen jedoch beträchtlich später zur Ausbildung, gewöhnlich erst gegen Ende der Blütezeit der Pflanze oder noch später. Oft bohren sie einen Teil ihrer Blüten unter die Erde hinab, aber ebenso oft bleiben sie ganz oberhalb der Erde (Fig. 5, das Fragment rechts). Am kräftigsten entwickelt habe ich sie teils bei üppigen Individuen gefunden, teils bei solchen, deren Cotyledonar-Inflorescenzen abgeschnitten oder lädirt waren.

Die Stiele der cotyledonen, wie erwähnt wurde, grösstenteils subterranean Inflorescenzen sind, wie die der Einzelblüten, verhältnismässig dick und zuletzt sehr fest. Die Blüten sind immer kleistogam (Fig. 6, c). Die Krone fehlt keineswegs, wie DURIEU

sagt,¹⁾ nicht einmal in solchen Blüten, die von früher Knospensstufe an sich unten in der Erde entwickelt haben, ist aber, wie diese Blüten überhaupt, sehr klein, 0,5—1,5 mm. lang, in dem

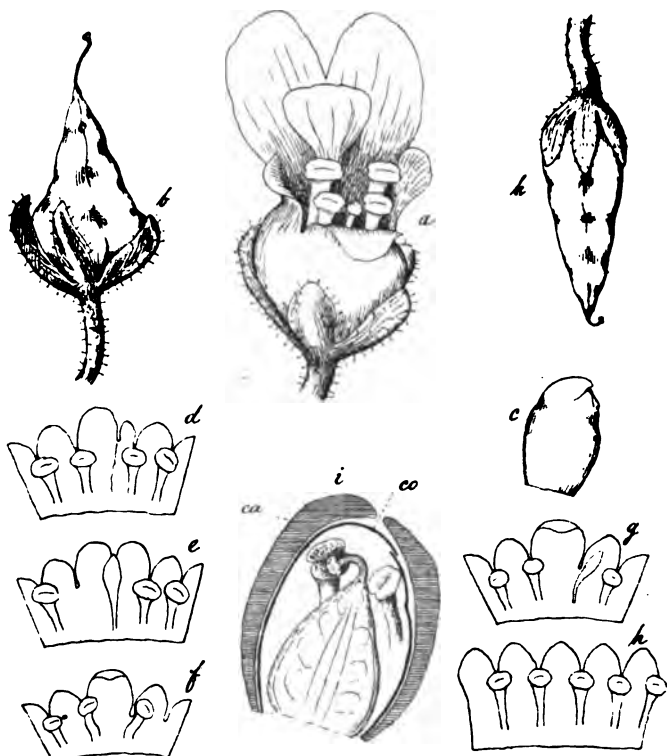


Fig. 6.

Scrophularia arguta SOLAND. — a eine aërische chasmogame Blüte (Vergr. 8). — b Frucht und Kelch einer aërischen chasmogamen Blüte (Vergr. 4). — c eine subterrane, vom dem Kelche befreite Blüte, wo die Befruchtung schon stattgefunden hat (Vergr. 8). — d—h ausgebreitete Krone nebst Androeceum subterranean Blüten (Vergr. 8). — i Längsschnitt einer subterranean Blüte im Moment der Bestäubung (ca der Kelch, co die Krone) (Vergr. 16). — k Frucht einer subterranean Blüte (Vergr. 4).

Kelch eingeschlossen und ganz farblos. Ihre Oberlippe ist immer schwach entwickelt, und deckt beständig die Unterlippe, wie in den Knospen der chasmogamen Blüten; häufig ist sie ungeteilt (Fig. 6 f & g) entweder infolge der Verwachsung der beiden

¹⁾ Die Angabe ist auch in WILLKOMM & LANGE, Prodr. fl. hisp. II, S. 549 eingeflossen, wo es heisst: »Ex alis foliorum inferiorum rami orientur florigeri descendentes et mox in terram absconditi, floribus apetalis sed fructiferis instructi.»

Zipfel oder öfter, weil der eine ganz oder doch beinahe abortiert hat (vgl. Fig 6 *d*). Das Androeum ist im allgemeinen reduziert, und zwar in sehr verschiedener Weise: das Staminodium, welches, wenn es sich vorfindet, ganz schmal ist (Fig. 6, *e*), fehlt sehr oft gänzlich (Fig. 6, *d* & *f*); dasselbe ist auch häufig der Fall mit einem der vorderen (Fig. 6, *f*) oder noch häufiger, mit einem der hinteren Staubgefässe (Fig. 6, *e*); in einem Fall (Fig. 6, *g*) war eins von den letzteren in ein Staminodium von derselben Form wie das mediane, das hier fehlte, umgebildet. Eigentümlicherweise wurde indessen das Androeum in einer der untersuchten subterranean Blüten vollkommener ausgebildet gefunden als in den chasmodogamen, indem nämlich alle 5 Staubgefässe fertil waren (Fig. 6, *h*); zu gleicher Zeit war die Krone actinomorph. In den subterranean Blüten wird die Krone fast gänzlich von den Staubgefässen und dem Pistill ausgefüllt, dessen Griffel mehrere male kürzer als das verhältnismässig grosse Ovar ist (Fig. 6, *i*) und ausserdem stark nach oben und nach hinten gebogen, so dass die Narbe in unmittelbare Berührung mit einer der hinteren Antheren kommt. Wenn sich diese öffnet, wird die Narbe mit Pollen überschüttet, der gleich darauf keimt, wobei einige Schläuche die Narbe an die Anthere fast unzertrennbar festkleben, während sich andere ihren Weg durch den Griffel hinab suchen. Jede Blüte bildet Frucht. Diese ist ebenso lang wie die der chasmodogamen Blüten, aber bedeutend schmaler am Grunde (Fig. 6, *k*) und enthält kaum halb so viel Samen. Die Kelchzipfel, welche häufig nur 4 sind, sind an dem Rücken nicht gekielt, sondern platt und dicht an die Kapsel gedrückt, was, nebst der Form dieser offenbar ein fortgesetztes Eindringen in die Erde erleichtert.

Besonders bemerkenswert scheint mir die Thatsache zu sein, dass die Blüten derjenigen Inflorescenzen, welche aus den Achseln der untersten Stengelblätter entspringen, die gleiche Gestaltung wie die subterranean aus den Achseln der Keimblätter ausgehenden haben, obgleich ihre Mehrzahl nie unter die Erdoberfläche gelangen. Die Krone kann zwar ein bisschen aus dem Kelche

hinausragen und bekommt dann an ihrem freien Teil einen rötlichen Anstrich, sie öffnet sich aber nicht. Auch diese Blüten sind also, mit andren Worten, kleistogam, und die Kapsel hat dieselbe schmale Form (Fig. 5, das Fragment rechts) und geringe Anzahl Samen wie in den subterranean. — Bei der Beschreibung einiger amphicarpen Pflanzen aus Süd-Brasilien — darunter *Trifolium polymorphum* POIR. und *Cardamine chenopodifolia* PERS. — äussert sich LINDMAN¹⁾ über die erstere: »Meines Erachtens ist in diesem Falle die unterirdische Lage und Lebensweise das primäre und ursächliche Verhältniss, das die Kleistogamie hervorgerufen hat.« Betreffend die *Cardamine*-Art wird eine ähnliche Ansicht ausgesprochen: »Man darf wohl behaupten, dass die unterirdische Lebensweise in diesem Falle die Kleistogamie wesentlich bewirkt und befördert hat.« Eine solche Auffassung scheint mir, auf Grund des eben Erwähnten, nicht auf *Scrophularia arguta* anwendbar, um so weniger als kleistogame Blüten fast regelmässig auch in den Inflorescenzen angetroffen werden, welche den Gipfel des Stengels einnehmen.²⁾ Im Gegenteil muss man bei dieser Pflanze sich die Kleistogamie als vollständig unabhängig von dem Medium, worin sich die Blüten entwickeln, und als etwas primäres im Verhältniss zu ihrer unterirdischen Lage vorstellen. Man scheint sogar in Frage stellen zu können, ob nicht die Kleistogamie teilweise die Ursache des positiven Geotropismus der grundständigen Cymen ist, und zwar aus dem Grunde, weil auch diejenigen gipfelständigen Cymen, deren Blüten kleistogam sind, merkwürdigerweise eine ganz entschiedene Geneigtheit zeigen, in der Richtung gegen die Erde zu wachsen. Die zwei eben erwähnten südbrasilianischen Pflanzen habe ich nicht selbst studieren können; betreffs der *Cardamine*-Art ist jedoch ein Umstand hervorzuheben, der von LINDMAN nur ganz flüchtig berührt wird, der nämlich, dass an von LUDWIG kultivierten Exemplaren auch die Blüten der oberirdischen

¹⁾ C. A. M. LINDMAN, Einige amphikarpe Pflanzen der südbrasilianischen Flora (Öfversigt af K. Vet.-Akad:s Förhandl. 1900, N:o 8, Stockholm).

²⁾ Die Kapsel hat jedoch hier dieselbe Form wie in den chasmogamen.

Trauben, mit Ausnahme der untersten, kleistogam waren.¹⁾ Es ist zwar zu bemerken, dass diese Exemplare im Zimmer gehalten wurden²⁾, da aber die fraglichen Blüten »normale Schoten trugen«, dürfte dieser Umstand nicht von grösserer Bedeutung gewesen sein. Interessant wäre es indessen zu wissen, ob auch unter anderen Verhältnissen Kleistogamie in den oberirdischen Blüten vorkommen kann. In solchem Falle scheint es mir ausser Zweifel gestellt, dass der Zusammenhang zwischen der Kleistogamie und der Amphicarpie in derselben Weise wie bei *Scrophularia arguta* zu deuten ist.

Die Verbreitungsarea der fraglichen Pflanze umfasst die Canarischen und Cap-Verdischen Inseln, das südlichste Spanien, Marokko, Süd-Tunesien, Barka, Nubien, Abyssinien und Arabien, also im Ganzen genommen, die nördlichen Grenzgegenden der Sahara-Wüste. Gegen anhaltende Dürre und intensive Hitze ist die Pflanze, wie man bei ihrer Kultivierung leicht merkt, nur schwach gerüstet, und sie findet sich darum meist in Felsenrissen, Ravinen, zwischen Steinen in ausgetrockneten Flussbetten u. s. w. Auch an diesen Stellen unterliegt sie jedoch leicht dem Wüstenwind. Die Schnelligkeit, womit ein Teil Früchte ihre Samen reifen, und der Umstand, dass diese direkt in die Erde gebracht werden, muss darum für die Existenz der Art von Bedeutung sein.

3. *Catananche lutea* L. — Fig. 7.

Diese Pflanze (Fig. 7, a) ist, gleich den beiden vorhergehenden, einjährig und zeigt folgenden Bau.³⁾ Auf die kräftigen

¹⁾ F. LUDWIG, Ueber *Cardamine chenopodifolia* (Verhandl. d. Bot. Ver. d. Prov. Brandenburg, XXVI, S. XIX, Berlin 1885). — Id. Lehrbuch der Biologie der Pflanzen, S. 354. — Stuttgart 1895.

²⁾ Meine in Töpfen kultivierten Exemplare von *Scrophularia arguta* wurden im Freien gehalten und blühten und fruktifizierten in den sonnigen und ungewöhnlich warmen Monaten Juli und August 1901.

³⁾ Bei der Untersuchung habe ich teils ein reichliches Herbar-Material aus Tunesien benützt, teils ein lebendes Exemplar, das es mir gelang aus tunesischen Samen aufzuziehen, teils endlich Spiritusmaterial aus Süd-Spanien, eingesammelt im Jahre 1883 von Dr. HJALMAR NILSSON zwischen Antequera und El Torcal. Dr. NILSSON hat ausserdem noch seine während der Reise gemachten ausführlichen Aufzeichnungen über die Pflanze zu meiner Verfügung gestellt.

und an Reservstoffen reichen, aber zur Blütezeit längst geschwundenen Keimblätter folgt eine Rosette von gewöhnlich 5—8 basalen Laubblättern mit rinnenförmigem, unten scheidig verbreitertem Stiel. Aus dieser Rosette erhebt sich die Hauptachse als ein 1—3-blättriger, einfacher oder öfter armästiger, 2—3 dm hoher Stengel, wie jeder seiner Zweige, von einem Blütenkopf beschlossen. In der Achsel der inneren Rosettenblätter, die während der ganzen Vegetationszeit der Pflanze persistieren, findet sich eine Knospe, die bei schwächeren Individuen ihre Entwicklung nicht fortsetzt, aus welcher aber bei kräftigeren Pflanzen blüentragende Stengel von demselben Bau wie der Hauptspross herauswachsen. In der Achsel der äusseren Rosettenblätter, welche verhältnismässig klein und vergänglich sind, findet sich gleichfalls eine Knospe, die indessen sich konstant und verhältnismässig schnell fortentwickelt, dabei einen sitzenden Blütenkopf hervorbringend, der von Anfang an subterranean ist und höchstens mit der Spitze der Hüllblätter die Erdoberfläche überragt.

Diese subterranean Köpfe (Fig. 7, f), welche gewöhnlich 3—6 sind und einen dichten Knäuel um den Wurzelhals bilden, zeigen einen wesentlich anderen Bau als die aerischen. Die Hülle ist also aus eiförmigem Grunde pyramidal verschmälert und hat eine Länge von nur 9—13 mm.; bei den aerischen erweitert sie sich während und nach der Anthese trichterförmig nach oben und ist 18—32 cm. lang. Der Längenunterschied wird hauptsächlich dadurch bewirkt, dass an den subterranean Köpfen die obere trockenhäutige Partie der inneren Hüllblätter nur 2—5 mm. lang ist, also meistens viel kürzer als die knorpelige untere, während sie dagegen an den aerischen eine Länge von 15—27 mm. erreicht, was wiederum damit zusammenhängt, dass diese letzteren Körbe bei der Fruchtreife abfallen und, behufs Verbreitung der äusseren Früchte, durch den Wind umhergeführt werden.

In den subterranean Köpfen finden sich nur eine einzige oder zwei, seltener drei Blüten, in den aerischen dagegen zahlreiche. BATTANDIER, der eine von Figuren begleitete kurzgefasste Beschreibung des Heteromorphismus der Köpfe und Früchte bei

dieser Pflanze liefert¹⁾, hebt besonders hervor, dass die Blüten der unterirdischen Köpfe nicht kleistogam sind. Das ist auch richtig. Die Krone (Fig. 7, *d*), welche wenigstens bezüglich der Röhre dieselbe Grösse wie in den aërischen hat (der Saum ist etwas kleiner und nicht ganz so ausgeplattet), ragt mit ihrer

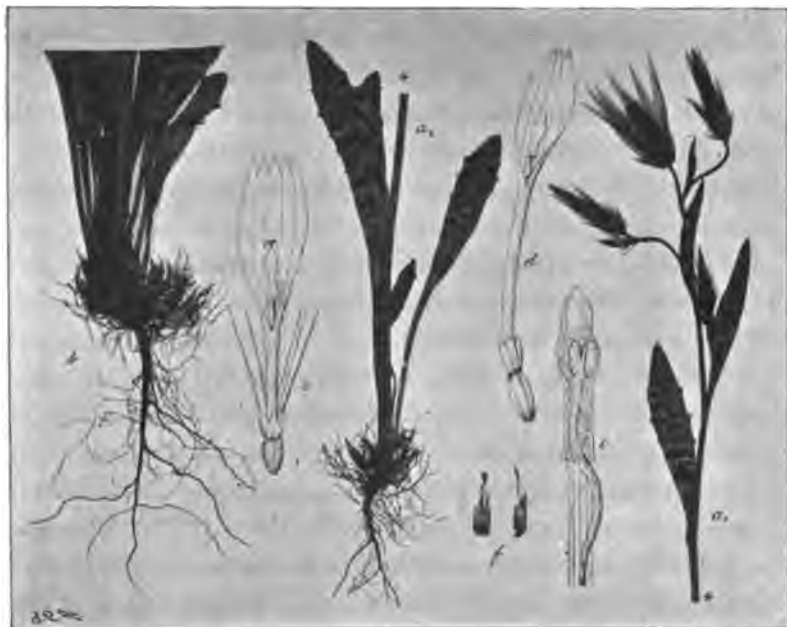


Fig. 7.

Catananche lutea L. — *a*₁ oberer, *a*₂ unterer Teil eines blühenden Individuums (Verkl. 2). — *b* unterer Teil eines zweiten Individuums mit sehr zahlreichen aufwärtswachsenden Wurzelzweigen (Verkl. 2). — *c* innere Blüte eines aërischen Blütenkopfes (Vergr. 2,5). — *d* für Eigenbestäubung eingerichtete Blüte eines subterranean Blütenkopfes (Vergr. 2,5). — *e* Geschlechtsapparat einer ebensolchen Blüte im Moment der Bestäubung (Vergr. 9). — *f* zwei isolierte unterirdische Blütenköpfe (Verkl. 2).

halben Länge aus der Hülle empor (Fig. 7, *f*), also über die Erdoberfläche, und öffnet sich gleichzeitig. Bei näherer Untersuchung ist indessen ein recht eigentümliches Verhältnis zum Vorschein gekommen. An dem reichlichen tunesischen Material, das ich untersucht habe, findet nämlich Selbstbestäubung, wenig-

¹⁾ a. a. O., S. 243, Pl. III, Fig. 6—9.

stens in den allermeisten Fällen, in den fraglichen Blüten statt. Das Pistill und der Staubgefässapparat zeigen freilich denselben Bau wie in den aërischen Köpfen, aber ersteres vermag nicht die Antherenröhre zu durchdringen, sondern die Griffelschenkel bleiben in dieser und reichen nicht zu deren konischem Gipfel hinauf. Es scheint dies darauf zu beruhen, dass die Röhre oben zu enge ist und dass die Antheren verhältnismässig fest an einander haften, auf jeden Fall nicht darauf, dass der Griffel zu kurz ist, denn in der Postanthesis finden sich die Filamente gestreckt, während der Griffel unterhalb der Röhre eine starke Krümmung macht (Fig. 7, *d* & *e*); in den aërischen Köpfen hat der Geschlechtsapparat auf derselben Entwicklungsstufe ein ganz anderes Aussehen, indem der Griffel, welcher die Antherenröhre durchdrungen hat, gerade, die Filamente dagegen ausgebogen sind (Fig. 7, *c*). Damit nun der Pollen zu den ursprünglich an einander gedrückten Narbenflächen Zutritt erhalte und Bestäubung also wirklich stattfinde, tritt das eigentümliche ein, dass die Griffelschenkel¹⁾, obgleich, wie erwähnt wurde, in der Antherenröhre eingeschlossen, ganz dieselbe Biegung nach aussen und nach unten wie in den aërischen Köpfen ausführen (Fig. 7, *e*); ohne zu bersten erweitert sich dabei die Antherenröhre ziemlich stark etwas oberhalb der Mitte. Nur in einem einzigen basalen Kopf habe ich an den tunesischen Exemplaren eine Blüte mit ausgetretenem Griffel gefunden. Am Spiritusmaterial aus Spanien, wie an den wenigen algerischen Exemplaren, die ich untersuchen konnte, sind dagegen solche Blüten, wenn nicht überwiegend, so doch recht gewöhnlich, und dass Fremdbestäubung hier wirklich stattfindet, geht daraus hervor, dass die Narbenflächen einer Blüte, deren Antherenröhre atrophiert war, mit gekeimtem Pollen reichlich bestreut waren. — Es hat demnach den Anschein, als wäre die Art eben im Begriff, die Blüten der subterranean Köpfe für Eigenbestäubung, man könnte übrigens gern sagen für Kleistogamie anzupassen, weil die geschlossene Staubgefässröhre in diesem Falle offenbar dieselbe Rolle wie das geschlossene Pe-

¹⁾ Beiläufig erwähne ich, dass in zwei Blüten der Griffel 3-schenkelig war.

rianth einer typisch kleistogamen Blüte spielt. Wenn wirklich dem so ist, kann man offenbar nicht umhin, dies mit der halb subterranean Lage der Blüten in Verbindung zu bringen. Nun ist aber die Metamorphose der basalen Köpfe so weit getrieben, dass eine beträchtliche Zeit hiefür erforderlich gewesen sein muss, und die Folgerung scheint also eine gewisse Berechtigung zu haben, dass bei dieser Pflanze der subterranean Ursprung der Blüten wirklich das primäre ist, und dass die Neigung zur Kleistogamie, die sich bemerkbar macht, dadurch hervorgerufen worden ist.

Die verschiedene Form der Früchte hat BATTANDIER (a. a. O.) beschrieben; darum will ich hier nur noch bemerken, dass die subterranean in Betreff ihres schwach ausgebildeten Pappus u. s. w. den randständigen aërischen, welche nicht abfallen, gleichen, dass sie aber im allgemeinen etwas grösser als diese sind. Ausserdem ist zu betonen, dass sie meistens vollständig ausgebildet sind, schon wenn die aërischen Köpfe in Blüte stehen.

Das Verhalten der Pfahlwurzel ist bei dieser Pflanze sehr bemerkenswert. Ausser Zweigen, die schräg nach unten wachsen, entwickeln sich aus dem oberen Teil derselben solche, die in der Richtung nach aussen und bald darauf gerade aufwärts wachsen, bis die Wurzelhaube die Erdoberfläche erreicht, worauf sie Seitenzweige teils unmittelbar unter ihrer Spitze, teils weiter unten aussenden; in solcher Weise entsteht oft ein hauptsächlich aus aufwärtsgerichteten Wurzeln bestehendes Flechtwerk, das die Sammlung der subterranean Köpfe umhüllt (Fig. 7, a_2 & b). BATTANDIER beschreibt und deutet diese Wurzelzweige also: »Ces capitules (radicaux) sont protégés contre la dent des animaux par des fibres radicales qui se redressent dans ce but et deviennent ligneuses». Der Bau dieser nach oben wachsenden Zweige ist in der That etwas fester und ihre wasserleitende Fähigkeit zugleich geringer als bei den nach unten wachsenden, was darauf beruht, dass die weitlumigen Gefässe, welche in ziemlich grosser Zahl im Holzkörper der letzteren eingesprengt sind, hier fast durchweg durch engere und im Verhältnis zu ihrem Lumen dickwandigere ersetzt sind. Nichts desto weniger fällt es mir schwer,

jene Deutung gutzuheissen, u. a. weil diese Wurzelzweige doch dünn (0,2—0,5 mm. im Durchm.) und keineswegs immer so zahlreich sind, dass ein eigentliches Flechtwerk zustande kommt. Man scheint eher vermuten zu können, dass sie zur Aufnahme des Niederschlags (Tau oder spärlicher Regen), der nur die alleroberste Erdschicht feuchtet, dienen, dass sie also dieselbe Funktion haben, die VOLKENS¹⁾ dem reich gegliederten oberflächlichen Wurzelsystem der *Diploaxis Harra* BOISS. und *Euphorbia cornuta* PERS., zwei mehr desertischer, nordafrikanischer Arten, zuschreibt. Dass bei *Catananche lutea*, wie bei den zwei eben erwähnten Pflanzen, zahlreiche kleine Wurzelzweige gleichzeitig hervorbrechen können und dabei einen eventuellen, in der Erdoberfläche zurückbleibenden Niederschlag ausbeuten können, geht aus den untersuchten mit Mikrotom angefertigten Querschnittserien hervor; diese enthalten nämlich auffallend oft junge Zweige, welche im Begriff sind, die Epidermis und die Aussenschicht der Rinde zu durchbrechen. Dass die Leitungsfähigkeit der emporstrebenden Wurzelzweige, wie bereits erwähnt wurde, eine verhältnismässig geringe ist, stimmt ja gut damit überein, dass sie nur verhältnismässig geringe Wassermengen zu transportieren haben. — Weil die Pflanze meistens auf Lehm-boden oder einer ähnlichen kompakten Unterlage auftritt, würde man sich auch denken können, dass die Wurzeln an die Oberfläche hinaufgingen um Luft zu schöpfen; der anatomische Bau gewährt indes keine Stütze für eine solche Annahme.

Catananche lutea ist allgemein verbreitet im nordwestlichen Afrika von Marokko bis Barka und kommt ausserdem noch in Palästina, Syrien, Klein-Asien, auf Cypern, in Griechenland, Italien und im südlichen Spanien vor. Weil sie meistens auf Lokalitäten zuhause ist, wo der Boden während der auf die Blütezeit folgenden Trockenperiode hart und fest wird, ist es zweifellos vorteilhaft, dass ein Teil der Früchte schon vor der Reife

¹⁾ G. VOLKENS, Die Flora der Ägyptisch-Arabischen Wüste, S. 24. — Berlin 1887. — Vgl. auch JOH. ERIKSSON, Ueber negativ-geotrop. Wurzeln etc., in Bot. Centralbl. Bd. LXI, 1895.

sich unter der Erde befindet. In der That scheint auch die Pflanze sich wesentlich durch die subterranean Früchte zu vermehren. An den Fundorten tritt sie nämlich sehr oft in dichten Kolonien auf, deren sämtliche Individuen augenscheinlich, direkt oder indirekt, aus einem und demselben Knäuel subterranean Blütenköpfe stammen.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 542.)

Genova. *Museo civico di storia naturale.*

Annali. (2) Vol. 20 (1899/1901) & Indice gen. sist. delle due prime serie, Vol. 1—40. 8:o.

— *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*

Atti. Vol. 12 (1901): N. 1. 8:o.

Georgetown. *College observatory.*

Preliminary light curve of Nova Persei 1901 from Febr. 22 to May 1. 4:o.

Granville. *Denison university.*

Bulletin of the scientific laboratories. Vol. 11: 10. 1901. 8:o.

Greenwich. *Royal observatory.*

Introduction to the astronomical observations. Year 1898. 4:o.

Results of the astronomical observations. Year 1898. 4:o.

Results of the magnetical and meteorological observations. Year 1898. 4:o.

Results of the spectroscopic and photographic observations. Year 1898. 4:o.

Appendix to the observations. 1—2. 1898. 4:o.

Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*

Abhandlungen. Philol.-hist. Klasse. N. F. Bd 5: No. 1. 1901. 4:o.

Nachrichten. Math.-phys. Klasse. 1901: H. 1. 8:o.

» Phil.-hist. Klasse. 1901: H. 1—2. 8:o.

» Geschäftliche Mittheilungen. 1901: H. 1. 8:o.

Habana. *Observatorio del colegio de Belen de la compañía de Jesus.*

Observaciones magneticas y meteorologicas. 1876: Sem. 2; 1900. Fol.

Halle a. S. *Naturforschende Gesellschaft.*

Abhandlungen. Bd 22—23. 1901. 8:o.

Hamburg. *Naturhistorisches Museum.*

Mittheilungen. Jahrg. 18 (1900). 8:o.

— *Deutsche Seewarte.*

Deutsche überseeische meteorologische Beobachtungen. H. 10. 1899. 4:o.

Internationaler Dekadenbericht. Jahrg. 1 (1900): No. 1—15. Fol.

— *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften. Bd 16: H. 2. 1901. 4:o.

Verhandlungen. (3) 8 (1900). 8:o.

Harlem. *Musée Teyler.*

Archives. (2) Vol. 7: P. 3. 1901. 8:o.

— *Société Hollandaise des sciences.*

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles. (2) T. 4: Livr. 3. 1901. 8:o.

Helsingfors. *Statistiska centralbyrån.*

Bidrag till Finlands officiella statistik. VI: 31. 1901. 8:o.

(Forts. å sid. 632.)

Meddelande från Stockholms Högskola.

Bidrag till kännedomen om ytterbium.

Af ASTRID CLEVE.

(Meddeladt den 11 September 1901 genom O. PETTERSSON.)

I. Inledning, historik.

År 1843 upptäckte MOSANDER en ny sällsynt jordart, den rosafärgade terbinjorden (erbinjord: BERLIN och senare författare), hvilken sedermera blef föremål för undersökningar af BAHR och BUNSEN samt HÖGLUND. Trettiofem år senare påvisade emellertid MARIIGNAC¹⁾, att erbinjorden icke var enhetlig, utan kunde genom det smälta nitratets partiella sönderdelning uppdelas i tvänne komponenter, en rosenröd jord, som fick behålla den äldre benämningen, och en färglös, som erhöll namnet ytterbin.

Af brist på material kunde MARIIGNAC ej fortsätta undersökningen af den nyupptäckta, färglösa jorden, men uppslaget följdes omedelbart därpå af Prof. L. F. NILSON²⁾, som år 1879 lämnade den första redogörelsen för sina försök att isolera ytterbin. NILSON erhöll till sist en jord med konstant atomvikt 132 ($\overset{\text{II}}{\text{RO}}$), eller omräknadt för seskvioxidens forml 174, under det MARIIGNAC icke nått öfver talet 130,8 (resp. 172,5). Lösningarna saknade fullständigt absorptionspektrum.

Denna undersökning ledde till NILSONS upptäckt af skandium. Vid fortsatt fraktionering nedpressades nämligen atom-

¹⁾ Arch. des sciences phys. et nat., 15 nov. 1878.

²⁾ Öfv. af K. Vet.-Ak. Förh. 1879, N:o 3 »Om MARIIGNACS nya ytterbin-jord».

vikten i de första fraktionerna hastigt och betydligt. Sedan alla dylika fraktioner frångäts och sammanförts, utgjorde de råmaterialet för skandiums framställning. Följande år publicerade NILSON en ny uppsats öfver ytterbium.¹⁾ Han hade då lyckats uppdrifva sitt förråd af den sällsynta jorden till 20 gr. och fastställde, efter omsorgsfullt frångiljande af skandium samt rening för öfrigt, atomvikten till 173,01²⁾, hvilket tal fortsatta afdrifningar ej förmådde ändra.

Förutom oxiden framställde NILSON hydratet, nitrattet, sulfattet, det sura selenitet samt oxalattet, af hvilka de tre sistnämnda analyserades. Kort tid efteråt beskrefs ytterbiums gnistspektrum af Prof. THALÉN.³⁾ Härmed torde förteckningen på hvad hittills offentliggjorts öfver ytterbiums egenskaper vara i hufvudsak fullständig.

Man visste således, tack vare NILSONS ytterst noggranna, men på grund af materialets sparsamhet föga omfattande undersökningar, att ytterbium hörde till de typiskt trivalenta jordartmetallerna, för hvilka det sura selenitet är karakteristiskt, samt bland dessa ägde den högsta kända atomvikten.

I några få punkter säkert karakteriseradt redan för 20 år sedan men för öfrigt så godt som okänt, inbjöd ytterbium till förnyade undersökningar. Ju bättre och fullständigare kunskap vi erhålla om hvarje enskildt element, desto klarare insikt kunna vi vänta i frågan om de sällsynta jordarternas inbördes släktskap. Det syntes mig därför önskvärdt att till raden af de monografier af sällsynta jordarter, vi hittills äga, lägga några om än i mycket ofullständiga bidrag till ytterbiums kemi. Ett tillfälle härtill erbjöd sig, när de ansefliga kvantiteter ytterjord, öfver hvilka Upsala kemiska universitetslaboratorium förfogar, välvilligt ställdes till min disposition i och för förarbetning på ytterbin.

¹⁾ Om ytterbiums atomvikt, Öfv. K. Vet.-Ak. Förh. 1880, N:o 6.

²⁾ Att NILSON tidigare fått det högre talet 174 berodde på förorensning af små mängder platina från afdrifningsaskälarna.

³⁾ Öfv. K. Vet.-Ak. Förh. 1881, N:o 6, p. 16.

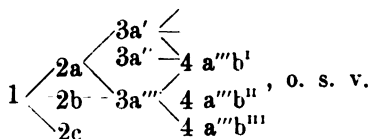
Jag begagnar här tillfället att tacka de herrar institutions-prefekter, som genom tillhandahållande af material samt genom råd och bistånd främjat arbetet, nämligen min fader, Professor P. T. CLEVE och Professor O. PETTERSSON. För värdefull hjälp vid de fysikaliska undersökningarna stannar jag i förbindelse till Dr. H. v. EULER.

Undersökningen är utförd på Stockholms Högskolas kemiska institut samt, hvad bestämningarna af den elektrolytiska ledningsförmågan beträffar, på högskolans fysiska institut.

II. Framställning af rent material. Är Yb ett element? Atomvikt och valens.

Det af mig använda utgångsmaterialet bestod af en till flera kilo uppgående kvantitet ytterjordar, härstammande från en mängd olika mineral. Alla ceritoxider voro förut aflägsnade genom behandling med K_2SO_4 .

Materialets bearbetning sönderföll i två afdelningar. Först afskildes hufvudmassan af ytterbium genom MARIIGNACS välkända metod, hvilken enligt NILSON är den BUNSENSKA i detta fall öfverlägsen. Man lyckas tämligen hastigt separera ut råytterbinet, om nitratsens upphettning afbrytes vid tämligen lättrorlig konsistens så länge yttrium och holmium ännu förekomma riktigt, men drifves allt längre och slutligen tills massan blifvit nästan fast, i den mån ytterbiummängden tilltager. I allmänhet underkastades hvarje större portion tvänne på hvarandra följande afdrifningar och sedan förenades de i spektroskopiskt hänseende öfverensstämmande fraktionerna, ungefär efter skemat



Genom nitratafdrifningsmetoden, som i andra fall, t. ex. för åtskiljande af erbium och holmium, är ytterst tidsödande och föga effektiv, kan ytterbium relativt snart befrias från stora

mängder yttrium, holmium och erbium, men ännu länge efter det erbiums starka absorptionslinier i det gröna fältet försvunnit, bibehåller det smälta nitrattet envist en från tulium härrörande dragning i violett och visar för spektroskopet tuliums karakteristiska linie i rött. Samma förhållande iakttog NILSON.

Sedan återstod det ej mindre besvärliga arbetet att fullständigt rena dylik rå, men erbiumfri jord. Först efter mycket talrika fraktioneringar lyckades jag utan allt för stor materialförlust bortskaffa tulium, så att slutligen c. 150 gr. återstod af en jord, hvars nitrat äfven i koncentrerad lösning var alldeles färglöst.

Då emellertid något skandium möjligen kunde förefinnas, underkastades ofvanstående kvantitet ytterligare fraktionering, och för ett säkert bedömande af resultaten måste nu tidsödande atomviktbestämningar enligt den vanliga metoden — öfverförande af oxid i vattenfritt sulfat — tillgripas.

En första serie gaf nedanstående atomvikter hos toppfraktionerna, hvarest skandium borde anrikas:

1. 173,3
2. 172,8
3. 172,1
4. 172,9
5. 172,3

hvaraf genast synes, att skandium icke fanns i märkbar mängd.¹⁾

För kontroll af renheten uppdelades hufvudmaterialet i fem fraktioner, hvilkas atomvikt bestämdes:

	Oxid	Sulfat	At.-vikt
I	0,3919 gr.	0,6319 gr.	172,15
II	0,4793 gr.	0,7728 gr.	172,15
III	0,3693 gr.	0,5963 gr.	171,4
IV	0,6121 gr.	0,9867 gr.	172,23
V	0,6842 gr.	1,1027 gr.	172,34

¹⁾ Till grund för beräkningen här liksom alltid i det följande ligga de genom »Bericht der Commission für Festsetzung der Atomgewichte», Ber. 31,2761 fastställda talen.

Materialet var således tämligen ensartadt och kunde underkastas en sista rening från spår af platina, kalcium m. fl. under arbetets lopp inkommande föroreningar, hvilka bortskaffades på sätt NILSON angifvit.¹⁾

För att utröna hur mycket den från afdrifningskålarna inkomna platinamängden förmår höja atomvikten, ombestämdes den senare hos fraktion III, sedan platinan aflägsnats med svafvelväte. Efter fällning med oxalsyra erhöles fraktion IIIa och vid tillsats af H_2N till filtratet ytterligare en liten fraktion IIb, med nedanstående atomvikter:

	Oxid	Sulfat	At.-vikt	Oxidens färg
IIIa	0,4204 gr.	0,6800 gr.	170,86	svagt brunaktig
IIIb	0,5739 gr.	0,9271 gr.	171,14	svagt brungul

Således hade den förra atomviktbestämningen till följd af platinans närvaro utfallit minst en tredjedels enhet för högt.

Sedan alla fem fraktionerna på samma sätt renats från platina och omfällts med oxalsyra, underkastades de ännu en serie afdrifningar för aflägsnande af de sista spåren främmande jordar.

De högsta atomvikter, som härvid uppnåddes, voro:

Oxid	Sulfat	At.-vikt
0,7791	1,2535	173,22
0,5190	0,8353	173,05
0,4905	0,7894	173,07
Medeltal		173,11

och fortsatta uppdelningsförsök med dessa tre fraktioner ledde ej till erhållande af någon jord med högre atomvikt.

Det funna medelvärdet afviker med blott $\frac{5}{100}$ enhet från NILSONS tal, hvilket omräknadt med här använda atomvikter är 173,16 ($S = 32,06$, $O = 16$). Då således atomvikten hos mitt renaste material blef konstant vid ett värde, som inom försöksfelens gränser sammanföll med NILSONS, hade jag ingen anledning att uppehålla mig på detta område, utan öfvergick till studiet af ytterbiums föreningar.

¹⁾ Om ytterbiums atomvikt, p. 6.

Naturligtvis är den möjligheten icke utesluten, att metallen genom ännu obekanta metoder skulle låta uppdelas sig i flera element, men jag har lika litet som NILSON funnit några kemiska indicier tala för ett dylikt antagande.

Atomvikten 173,1 får anses full säker på en decimal och lägges i det följande till grund för alla beräkningar. Anmärkas bör emellertid, att till framställning af en del salter användes en jord med obetydligt lägre atomvikt, enär det i praktiken var omöjligt att utan allt för stor decimering uppdrifva atomvikten hos hela materialet till dess teoretiska värde. Ytterbiumhalten har därför vid analys stundom utfallit något för lågt, och i andra fall har oxalatets förhållande medfört liknande resultat. Såsom längre fram skall visas, hör nämligen ytterbiumoxalatet till de lösligare inom denna grupp; dess icke så alldeles obetydliga löslighet gör sig i regeln kännbar vid analyser, där metallen måste utfällas med oxalsyra. Fällning med ammoniak är därför att föredraga, när så ske kan.

Endast en syrsättningsgrad, seskvioxidens, är iakttagen. Ett försök att erhålla lägre oxider genom försiktig upphettning af ytterbiumoxalat i öfvertäckt degel till konstant vikt gaf negativt resultat. Återstoden glödgades sedan för bläster i öppen degel utan att förändras i vikt samt var identisk med den ur nitraten eller sulfaten framställda oxiden.

Alla i det följande meddelade spec. viktbestämningar äro utförda genom vägning i luft och benzol enligt O. PETTERSSONS¹⁾ metod. Benzolens spec. vikt bestämdes särskildt för hvarje försök.

III. Ytterbiumföreningar.

Ytterbiumoxid.



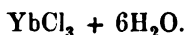
Är undersökt och beskrifven af NILSON²⁾ som fann den höga sp. vikten 9,175. I absolut rent tillstånd färglös, har oxiden

¹⁾ Ber. d. deutsch. ch. Ges. 9. p. 1559 (1876).

²⁾ Om ytterbiums atomvikt, p. 8.

dock vanligen efter stark blästring en svagt gulbrun anstrykning, som möjligen härrör från små spår af tulium. Mindre rena preparat äro mörkare. Oxiden angripes i allmänhet rätt svårt af syror; i svagare syror såsom t. ex. ättiksyra är den olöslig och visar sig äfven mycket resistent mot inverkan af syreanhydrider i glödningshetta. Visar ej radioaktivitet, enligt benägen uppgift af Dr. v. EULER.

Ytterbiumklorid.



Framställes lämpligen genom upplösning i ytterbin i varm konc. saltsyra under samtidig inledning af gasformigt klorväte till full mättning. Saltet kristalliserar då vid afsvalning i vackra, snedvinkliga prismer, som äro ytterst lösliga och flyta sönder i luften. Vittrar ej öfver svafvelsyra eller öfver kalk och kan upphettas till 70° utan att förändras, men förlorar långsamt vatten vid 100°. Vid glödning bortgår all klor.

Analys:

- 1) 0,9082 gr. vid 70° torkadt salt gaf 0,4631 gr. Yb_2O_3 .
- 2) 0,7313 gr. öfver CaO torkadt salt gaf 0,8141 gr. AgCl.

I procent:

Ber. för $\text{YbCl}_3 + 6\text{H}_2\text{O}$:			Funnet:	
			I	II
Yb	173,1	— 44,66	44,78	—
Cl_3	106,35	— 27,44	—	27,52
$6\text{H}_2\text{O}$	108,12	— 27,90	—	—
	<u>387,57</u>	<u>100,00</u>		

Spec. vikt och molekularvolym.

1) 1,2550 gr., sp. v. 2,570

2) 1,1056 gr., sp. v. 2,580

Medeltal 2,575

Mol. volym 150,5.

Ytterbiumoxiklorid.

Kloridens lösning upphettades i en ström af torr klorvätegas, först försiktigt till torrhet och sedan till glödningstemperatur, då efter längre tids inverkan återstod en hvit, fuktighet begärligt uppsugande massa med i det närmaste oxikloridens sammansättning.

Analys:

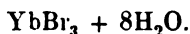
1) 0,6237 gr. lämnade efter stark upphettning för bläster 0,5338 gr. Yb_2O_3 .

2) 0,8894 gr. gaf 0,6819 gr. AgCl .

I procent:

	Funnnet:	
	I	II
Yb	75,17	—
Cl	—	18,95

För YbOCl beräknas: Yb 77,08 %, Cl 15,79 %, och bildningen af oxiklorid har således ej varit fullständig, antagligen emedan upphettningen varit för svag. De funna värdena motsvara närmast sammansättningen $9\text{YbOCl} + \text{YbCl}_3$, som fordrar 75,25 % Yb och 18,49 % Cl.

Ytterbiumbromid.

Framställdes enligt samma metod som kloriden, hvilken den till det yttre liknar. Flyter dock ännu hastigare sönder i luften. Lösningen afdunstar mycket långsamt öfver kalk, hvarefter kristaller med $8\text{H}_2\text{O}$ återstå.

Analys å pressadt salt:

1) 1,0463 gr. gaf 1,0518 gr. AgBr .

2) 1,4707 gr. gaf 1,4797 gr. AgBr .

3) 0,7621 gr. gaf 0,2686 gr. Yb_2O_3 .

I procent:

Ber. för $\text{YbBr}_3 + 8\text{H}_2\text{O}$:			Funnet:		
			I	II	III
Yb	173,1	— 31,07	—	—	30,95
Br_3	239,88	— 43,06	42,78	42,81	—
$8\text{H}_2\text{O}$	144,16	— 25,87	—	—	—
	<u>557,14</u>	<u>100,00</u>			

Yttrium- och erbiumbromid ha möjligen samma vattenhalt.¹⁾

Ytterbiumjodat.

$\text{Yb}_3\text{JO}_3 + 6\text{H}_2\text{O}$ (torkadt öfver svafvelsyra).

Erhålles såsom en hvit, amorf fällning, om jodsyra sättes till en lösning af ytterbiumacetat.

Utgör efter torkning ett snöhvitt pulver.

Analys:

0,9863 gr. i exsickator torkadt salt förlorade vid 100
0,0365 gr. i vikt. 0,3268 gr. af samma material gaf efter reduktion med SO_2 0,2852 gr. AgJ.

I procent:

Ber. för $\text{Yb}_3\text{JO}_3 + 6\text{H}_2\text{O}$:			Funnet:
Yb	173,1	— 21,48	—
J_3	380,55	— 47,23	47,15
O_9	144	— 17,87	—
$4\text{H}_2\text{O}$	77,08	— 8,95	—
$2\text{H}_2\text{O}$	<u>36,04</u>	<u>— 4,27</u>	3,70 (viktförlust vid 100°)
	805,77	100,00	

Fyra mol. H_2O kvarhållas alltså öfver 100°.

Ytterbiumperjodat.

$\text{YbJO}_3 + 2\text{H}_2\text{O}$ (torkadt öfver svafvelsyra).

Erhålles af ytterbiumacetat och öfverjodsyra såsom ett i vatten olösligt, efter torkning hygroskopiskt hvitt pulver. Det öfver svafvelsyra torkade saltet förlorar ej vatten vid 100°.

¹⁾ Jfr CLEVE o. HÖGLUND, Bull. Soc. ch. XVIII (1872) p. 196.

Analys:

0,4521 gr. i exsickator torkadt salt gaf efter reduktion med SO_2 0,2556 gr. AgJ. Ur filtratet fälldes med ammoniak 0,2134 gr. Yb_2O_3 .

I procent:

	Ber. för $\text{YbJO}_3 + 2\text{H}_2\text{O}$:	Funnet:
Yb	173,1 — 41,61	41,46
J	126,85 — 30,50	30,55
O_3	80 — 19,23	—
$2\text{H}_2\text{O}$	36,04 — 8,66	—
	<u>415,99</u> <u>100,00</u>	

CLEVE har framställt motsvarande perjodat af yttrium¹⁾ och samarium,²⁾ det senare dock med $4\text{H}_2\text{O}$ vid 100° .

Ytterbiumkloroplatinat.

1. $2\text{YbCl}_3, \text{PtCl}_4 + 22\text{H}_2\text{O}$.

Erhålles i stora, genomskinliga, rödbruna, rombiska taflor, om en lösning af ytterbiumklorid och platinaklorid starkt koncentreras öfver svafvelsyra. Kristallerna delikvescera i luften, men vittra i exsickator, hvarvid färgen öfvergår till ljus gul. Smälter i kristallvattnet under 100° . Saltet har neutral reaktion.

Analys ä pressadt salt:

1) 0,5423 gr. förlorade vid 100° 0,0839 gr. och gaf 0,3524 gr. $\text{Yb}_2\text{SO}_4 + \text{Pt}$, hvaraf 0,2702 gr. Yb_2SO_4 och 0,0820 gr. Pt.

2) 0,5552 gr. gaf 0,3553 gr. $\text{Yb}_2\text{SO}_4 + \text{Pt}$, hvaraf 0,2740 gr. Yb_2SO_4 och 0,0813 gr. Pt.

3) 0,5777 gr. gaf 0,6354 gr. AgCl.

¹⁾ Bull. Soc. ch. 1874, t. XXI, pag. 345.

²⁾ Contr. to the Knowl. of Samarium, Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups. Ser. III, p. 16.

I procent:

Ber. för $2YbCl_3, PtCl_4 + 22H_2O$:			Funnet:		
			I	II	III
Yb_2	346,2	— 26,80	27,33	27,07	—
Pt	194,8	— 15,08	15,1	14,7	—
Cl_{10}	354,5	— 27,44	—	—	27,20
$22H_2O$	396,44	— 30,68	(15,47)	—	—
	1291,94	100,00			
$Yb_2, 3SO_4 + Pt$		64,18	64,98	64,00	—

Halfva vattenhalten (11 mol.) bortgår vid 100° . Beräknadt:
 $11H_2O = 15,34\%$, funnen vikt förlust vid 100° (analys I) $15,47\%$.

2. $2YbCl_3, PtCl_4 + 35H_2O$.

Ett kloroplatinat med denna vattenhalt erhöles vid en annan beredning.

Analys å pressadt salt:

0,6240 gr. gaf 0,3400 gr. $Yb_2, 3SO_4 + Pt$, hvaraf 0,2602 gr. $Yb_2, 3SO_4$ och 0,0798 gr. Pt.

I procent:

Ber. för $2YbCl_3, PtCl_4 + 35H_2O$:			Funnet:
Yb_2	346,2	— 22,69	22,76
Pt	194,8	— 12,76	12,8
Cl_{10}	354,5	— 23,23	—
$35H_2O$	630,7	— 41,32	—
	1526,2	100,00	
$Yb_2, 3SO_4 + Pt$		54,33	54,49

Ofvan beskrifna kloroplatinat tillhöra således icke den hos de sällsynta jordarterna vanliga typen $\overset{III}{R}Cl_3, PtCl_4 + nH_2O$, känd hos bl. a. praseodym,¹⁾ samarium,²⁾ gadolinium,³⁾ erbium,⁴⁾ utan innehålla $\overset{III}{2R}Cl_3$ på hvarje $PtCl_4$. Yttriumsaltet har åter sammansättningen $4YCl_3, 5PtCl_4 + 51H_2O$.⁵⁾

¹⁾ v. SCHÉELE, Om Praseodym etc., Ak. Afh. Upsala 1900, p. 47.

²⁾ CLEVE, Contr. to the Kn. of Samarium, p. 10.

³⁾ BENEDICKS, Zeitschr. f. anorg. Ch. XXII, p. 404.

⁴⁾ CLEVE, Bull. Soc. ch. 1874 t. XXI, p. 345.

⁵⁾ CLEVE o. NILSON, Bull. Soc. ch. 1877, t. XXVII, p. 209.

Surt ytterbiumbromoplatinat.

Framställdes på samma sätt som kloroplatinatet och bildar mörkröda, rombiska, ytterst delikvescenta taflor. Saltet har sur reaktion och frigör CO_2 ur karbonat.

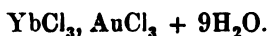
Analys å pressadt salt:

1) 0,8078 gr. gaf 0,2540 gr. Yb_2SO_4 + Pt, hvaraf 0,0951 gr. Yb_2SO_4 och 0,1589 gr. Pt.

2) 0,3438 gr. gaf 0,4494 gr. AgBr.

I procent:

	Ber. för $\text{YbBr}_3, 3\text{H}_2\text{Br}_6\text{Pt} + 30\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:	
	I	II	I	II
Yb	173,1	—	5,80	6,46
H ₆	6,06	—	0,20	—
Pt ₃	584,4	—	19,59	19,66
Br ₂₁	1679,16	—	56,29	—
30H ₂ O	540,6	—	18,12	55,63
	2983,32		100,00	—

Ytterbiumguldchlorid.

Erhölls af beräknade mängder ytterbiumklorid och guldchlorid. Kristalliserar efter stark koncentrering af lösningen i klara, guldgula, något delikvescenta, sexsidiga taflor.

Analys å pressadt salt:

1) 0,7633 gr. gaf 0,5281 gr. Yb_2SO_4 + Au, hvaraf 0,3283 gr. Yb_2SO_4 och 0,1198 gr. Au.

2) 0,4259 gr. förlorade vid 100° 0,0552 gr. och gaf 0,2949 gr. Yb_2SO_4 + Au.

3) 0,2478 gr. gaf 0,3500 gr. AgCl + Au, hvaraf 0,2849 gr. AgCl och 0,0651 gr. Au.

I procent:

	Ber. för YbCl_3 , $\text{AuCl}_3 + 9\text{H}_2\text{O}$:			Funnet:	
	I			II	III
Yb	173,1	— 23,26	23,47	—	—
Au	197,2	— 26,50	26,2	—	26,3
Cl_6	212,7	— 28,58	—	—	28,43
$9\text{H}_2\text{O}$	<u>161,18</u>	<u>— 21,66</u>	—	—	—
	744,18	100,00			
$\text{Yb}_2\text{3SO}_4 + \text{Au}$		69,12	69,19	69,24	—

Omkring 5 mol. vatten bortgå vid 100° ; funnen viktförlust (analys II) 12,91 %, ber. 12,11 %.

Fullständigt analog med erbiumguldklorid, ErCl_3 , $\text{AuCl}_3 + 9\text{H}_2\text{O}$.¹⁾ Gadolinium- och praseodymsalten innehålla $10\text{H}_2\text{O}$ (BENEDICKS, v. SCHÉELE). Yttriumguldklorid är afvikande, YCl_3 , $2\text{AuCl}_3 + 16\text{H}_2\text{O}$.¹⁾

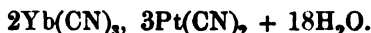
Spec. vikt och molekularvolym.

1) 0,9608 gr., sp. v. 2,857

2) 0,9296 gr., sp. v. 2,843

Medeltal 2,850

Mol. volym 261.

Ytterbiumplatocyanur.

Framställdes af ytterbiumsulfat och bariumplatocyanur. Saltet liknar fullständigt motsvarande yttriumförening och kristalliserar liksom denna i väl utbildade prismar af praktfullt röd färg, med gröna och blåvioletta reflexer. Saltet innehåller i likhet med gadoliniumplatocyanur 18 mol. vatten, ej 21 såsom motsvarande yttrium- och erbiumföreningar (CLEVE).²⁾

Är luftbeständigt och lösligt. Förlorar långsamt 16 mol. vatten i exsickator. Då $14\text{H}_2\text{O}$ bortgått, försvinner den

¹⁾ CLEVE, Bull. Soc. ch. 1874, t. XXI, p. 345.

²⁾ Bull. Soc. ch. 1872, t. XVIII, p. 196.

röda färgen och kristallpulvret blir tegelgult, slutligen gulhvitt. Saltet vittrar hastigare vid 100° , men kvarhåller äfven vid denna temperatur $2\text{H}_2\text{O}$.

Analys å pressadt salt:

- 1) 0,7110 gr. förlorade öfver svafvelsyra 0,1355 gr. i vikt.
- 2) 0,3457 gr. gaf 0,2676 gr. Yb_2SO_4 + Pt, hvaraf 0,1403 gr. Yb_2SO_4 och 0,1273 gr. Pt.

I procent:

	Ber. för $2\text{Yb}(\text{CN})_3, 3\text{Pt}(\text{CN})_2 + 18\text{H}_2\text{O}$:		I	Funnet:	II
Yb_2	346,2	— 22,09	—		22,15
Pt_3	584,4	— 37,28	—		36,83
$(\text{CN})_{12}$	312,48	— 19,93	—		—
$16\text{H}_2\text{O}$	288,32	— 18,40	19,06		—
$2\text{H}_2\text{O}$	36,04	— 2,30	—		—
	1567,44	100,00			
Yb_2SO_4 + Pt		77,76			77,41

Spec. vikt och molekularvolym.

- 1) 1,0036 gr. (större kristaller), sp. v. 2,661
 - 2) 1,1911 gr. (mindre >) sp. v. 2,657
 - 3) 1,2100 gr. (> >) sp. v. 2,658
- Medeltal 2,659

Mol. volym 589,5.

Ytterbiumkaliumferrocyanur.

$\text{KYb}(\text{CN})_6\text{Fe} + 3\text{H}_2\text{O}$ (torkadt öfver svafvelsyra).
($2\text{H}_2\text{O}$ vid 100°).

Ferrocyanalkalium ger med ytterbiumklorid en hvit, finkornig fällning, som är något löslig i öfverskott af fällningsmedlet. Har efter torkning en dragning i blågrönt. Tre mol. vatten kvarhållas öfver svafvelsyra och två efter upphettning till 100° .

Analys:

1) 0,6172 gr. i exsickator torkadt salt förlorade 0,0218 gr. vid 100°.

2) 0,4546 gr. i exsickator torkadt salt gaf efter glödning och utlakning med vatten 0,2632 gr. $\text{Yb}_2\text{O}_3 + \text{Fe}_2\text{O}_3$.

I procent:

Ber. för $\text{KYb}(\text{CN})_6\text{Fe} + 3\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:	
		I	II
$\text{Yb}_2\text{O}_3 + \text{Fe}_2\text{O}_3$	57,90	—	57,90
1 mol. H_2O	3,76	3,53	—

3) 0,2331 gr. vid 110° torkadt salt gaf vid analys på nyss angifvet sätt 0,1409 gr. $\text{Yb}_2\text{O}_3 + \text{Fe}_2\text{O}_3$, hvaraf 0,0994 gr. Yb_2O_3 , fälld med oxalsyra ur nästan neutral lösning, och 0,0415 gr. Fe_2O_3 . Ur ültratet erhöles 0,0359 gr. KCl .

I procent:

	Ber. för $\text{KYb}(\text{CN})_6\text{Fe} + 2\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:
Yb	173,1	— 37,58	37,45
K	39,15	— 8,50	8,08
Fe	56,10	— 12,16	12,46
$(\text{CN})_6$	156,24	— 33,92	—
$2\text{H}_2\text{O}$	36,04	— 11,74	—
	460,53	100,00	

Motsvarande dubbelferrocyanurer af yttrium, erbium och samarium äro framställda af CLEVE.

Ytterblumnitrat.

1. $\text{Yb}_3\text{NO}_3 + 4\text{H}_2\text{O}$.

Kristalliserar ur konc. salpetersyra i klara, delikvescenta prismer. Saltet kan äfven, ehuru med svårighet, bringas att kristallisera ur en vattenlösning, som koncentrerats till sirapskonsistens öfver svafvelsyra och kalk, och bildar då fina nålar.

Analys å pressadt salt:

a. Kristalliseradt ur konc. HNO_3 .

1) 1,0652 gr. gaf efter försiktig upphettning och glödning 0,4845 gr. Yb_2O_3 .

2) 0,5225 gr. gaf 0,2392 gr. Yb_2O_3 .

3) 0,5141 gr. gaf, enligt SCHULZES ¹⁾ metod, 80,04 cc NO af 0° och 760 m.m. tryck.

b. Kristalliseradt ur vatten.

4) 0,5547 gr. gaf 0,2505 gr. Yb₂O₃.

I procent:

	Ber. för Yb3NO ₃ + 4H ₂ O:		I	Funnet:			
				II	III	IV	
Yb	173,1	— 40,14	39,95	40,19	—	39,66	
3NO	90,12	— 20,89	—	—	20,89	—	
O ₆	96	— 22,26	—	—	—	—	
4H ₂ O	72,08	— 16,71	—	—	—	—	
	431,3	100,00					

Spec. vikt och molekularvolym.

0,7066 gr., kristalliseradt ur HNO₃, sp. v. 2,682

Mol. volym 160,9.

2. Yb3NO₃ + 3H₂O. ²⁾

Nitraten afvika från alla andra kända nitrater af sällsynta jordartmetaller genom sin låga vattenhalt. Yttrium- och gadoliniumnitrat kristallisera båda med 5H₂O, ³⁾ praseodym- ⁴⁾ och samariumsalten ⁵⁾ med 6H₂O.

Ytterbiumsulfat.

1. Yb₂3SO₄ + 8H₂O.

Är beskrifvet och analyseradt af NILSON (l. c. p. 10). Saltet är betydligt lösligare i köld än vid högre temperatur och utfälls därför vid kokning af koncentrerade lösningar. Kristallernas vattenhalt är i detta fall densamma, som då saltet genom frivillig afdunstning bringas att kristallisera vid rumstemperatur. Har i ej alltför utspädd lösning neutral reaktion.

¹⁾ Z. f. anal. Ch. 9 p. 400.

²⁾ Erhölls genom långsam kristallisation öfver svafvelsyra, sedan denna uppsats redan inlämnats till tryckning. Bildar stora, klara tafior. Analys: Funnet 47,63 % Yb₂O₃, ber. 47,70 %.

³⁾ BENEDICKS, l. c. p. 407.

⁴⁾ v. SCHÉELE, l. c. p. 52.

⁵⁾ CLEVE, l. c. p. 15.

Analys å pressadt salt:

- a. Kristalliseradt vid rumstemperatur.

2,2041 gr. gaf 1,9779 gr. BaSO_4 ,

- b. Kristalliseradt vid kokningstemperatur.

1,4054 gr. förlorade i torktörn 0,2617 gr. H_2O .

I procent:

	Ber. för $\text{Yb}_2\text{SO}_4 + 8\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:	
			a	b
Yb_2O_3	394,2	— 50,63	—	—
3SO_3	240,18	— 30,85	30,77	—
$8\text{H}_2\text{O}$	144,16	— 18,52	—	18,62
	<u>778,54</u>	<u>100,00</u>		

*Spec. vikt och molekularvolym.*1) 1,2997 gr. (gröfre kristallgrus), tp. $20,6^\circ$, sp. v. 3,302) 1,6331 gr. (» »), tp. $18,3^\circ$, sp. v. 3,26

Medeltal 3,28

Mol. volym 237

2. Vattenfritt sulfat, Yb_2SO_4 .

Se NILSON, l. c. p. 9.

Spec. vikt och molekularvolym.

1) 1,2291 gr., sp. v. 3,627

2) 1,0947 gr., sp. v. 3,614

Medeltal 3,62

Mol. volym 175,2

Löslighetsbestämningar å sulfatet.

Bestämningarna utfördes på följande sätt. Öfverskott af fint pulveriseradt, vattenfritt ytterbiumsulfat inströddes i en bågare med vatten och hölls däri uppslammadt med hjälp af en roterande, mekanisk omrörare. Det hela insattes i ett vattenbad, som gaf den önskade temperaturen. Efter två å tre timmar aspipette-

rades, så snart lösningen hunnit klarna, 25 cc, som vägdes och afdunstades till torrhet i platinaskål. Den härvid erhållna återstoden vägdes såsom vattenfritt sulfat.

1. Temp. 0° a) 25 cc. af lösningen vägde 35,341 gr. och gäfvö 10,8246 gr. Yb_2SO_4 .

b) 25 cc. af lösningen vägde 35,340 gr. och gäfvö 10,8317 gr. Yb_2SO_4 .

2. Temp. $15,5^{\circ}$. 25 cc. af lösningen vägde 32,490 gr. och gäfvö 8,3521 gr. Yb_2SO_4 .

3. Temp. 35° . 25 cc. af lösningen vägde 29,490 gr. och gäfvö 4,7393 gr. Yb_2SO_4 .

4. Temp. 55° . 25 cc. af lösningen vägde 27,572 gr. och gäfvö 2,8540 gr. Yb_2SO_4 .

5. Temp. 60° . 25 cc. af lösningen vägde 27,215 gr. och gäfvö 2,5556 gr. Yb_2SO_4 .

6. Temp. 70° . 25 cc. af lösningen vägde 26,410 gr. och gäfvö 1,7796 gr. Yb_2SO_4 .

7. Temp. 80° . 25 cc. af lösningen vägde 26,265 gr. och gäfvö 1,7038 gr. Yb_2SO_4 .

8. Temp. 90° . a) 25 cc. af lösningen vägde 25,914 gr. och gäfvö 1,3968 gr. Yb_2SO_4 .

b) 25 cc. af lösningen vägde 25,930 gr. och gäfvö 1,4593 gr. Yb_2SO_4 .

9. Temp. 100° . 27,676 gr. af lösningen gäfvö 1,2346 gr. Yb_2SO_4 .

100 delar vatten lösa enligt dessa försök

vid	0°	—	44,2	d.	Yb_2SO_4	(medeltal af 44,15 och 44,21)
	$15,5^{\circ}$	—	34,6	d.	»	
	35°	—	19,1	d.	»	
	55°	—	11,5	d.	»	
	60°	—	10,4	d.	»	
	70°	—	7,22	d.	»	
	80°	—	6,93	d.	»	
	90°	—	5,83	d.	»	(medeltal af 5,70 och 5,96)
	100°	—	4,67	d.	»	

Man ser att lösligheten i köld är betydlig, men hastigt aftager med stigande temperatur till uppemot 70°, för att sedan åter aftaga långsammare. Ytterbiumsulfat visar sig vara genomgående mycket lösligare än motsvarande yttrium- och gadoliniumsalt. Bland yttriummetallerna öfverträffas ytterbium med afseende på sulfatets löslighet, såvidt hitills känt, endast af erbium. Till jämförelse meddelas några bestämningar af CLEVE och HÖGLUND ¹⁾ samt BENEDICKS. ²⁾

100 d. vatten lösa: vid 0°	3,98 d. Gd ₂ SO ₄
vid rumstemperatur	43 d. Er ₂ SO ₄
„	1,52 d. Y ₂ SO ₄
vid 100°	10 d. Er ₂ SO ₄ + 8H ₂ O
	4,8 d. Y ₂ SO ₄ + 8H ₂ O

Ytterbiumsulfat.



Saltet erhålles genom sönderdelning af nyfäldt, i vatten uppslammadt ytterbiumkarbonat med SO₂. Den om behöfligt filtrerade lösningen afsätter vid koncentrering öfver svafvelsyra hvita, filtiga skorpor, som icke lösas i vatten.

Analys å pressadt salt, onedelbart efter beredningen:

0,3490 gr. gaf efter oxidation med klorvatten och fällning med ammoniak 0,1840 gr. Yb₂O₃. Ur filtratet erhöles 0,3189 gr. BaSO₄.

I procent:

	Ber. för Yb ₂ SO ₄ + 9H ₂ O:	Funnat:
Yb ₂ O ₃	394,2	52,56
3SO ₂	192,18	25,67
9H ₂ O	162,18	—
	<u>748,56</u>	<u>100,00</u>

Motsvarande salter af yttrium, erbium och samarium kristallisera med 3H₂O, didymsaltet med 6H₂O (CLEVE).

¹⁾ Bih. K. Vet. Ak. Handl. 1873, I, n:o 8. HÖGLUNDS erbin torde dock äfven ha innehållit ytterbin.

²⁾ l. c. p. 409.

Ytterbiumhyposulfat.

Erhölls genom dubbel dekomposition mellan ytterbiumsulfat och bariumhyposulfat. Sedan lösningen koncentrerats i vakuum-exsickator till sirapskonsistens, stelnar den slutligen till en stråligt kristallinisk, ytterst delikvescent massa. Vid förvaring i tillsmält rör sönderdelas saltet spontant under afgifvande af SO_2 . Analyserades icke.

Ytterbiumetylsulfat.

Framställdes af ytterbiumsulfat och bariumetylsulfat. Kristalliserar i stora, vattenklara, lättlösliga, men luftbeständiga prismor. Saltet är hållbart i neutral lösning, men sönderdelas partiellt vid uppvärmning af svagt sura lösningar. Vid 70° bortgår alkohol, vid 160° hastigare och fullständigt. 6 mol. vatten afgifvas i exsickator.

Analys å pressadt salt:

1) 1,1627 gr. förlorade öfver svafvelsyra långsamt 0,1775 gr., vid 160° ytterligare 0,2310 gr. i vikt och lämnade 0,5216 gr. Yb_2SO_4 .

2) 0,7928 gr. förlorade i exsickator 0,1201 gr. och gaf 0,3552 gr. Yb_2SO_4 .

I procent:

Ber. för $\text{Yb}_3\text{C}_2\text{H}_3\text{SO}_4 + 9\text{H}_2\text{O}$:			Funnit:		
			I	II	
Yb	173,1	— 24,36	24,41	24,45	
$3\text{C}_2\text{H}_3\text{OH}$	138,18	— 19,45	19,86	—	{ vikt förlust vid 166°
3HSO_4	291,21	— 40,98	—	—	
$6\text{H}_2\text{O}$	108,12	— 15,21	15,27	15,15	{ (vikt förlust i exsickator)
	<u>710,61</u>	<u>100,00</u>			

Spec. vikt och molekularvolym.

1,1477 gr., sp. v. 2,024

Mol. volym. 351,1

Ytterbiumselenat.1. $\text{Yb}_2\text{3SeO}_4 + 15\text{H}_2\text{O}$.

Selenatet kristalliserar ur kalla, starkt koncentrerade lösningar till en hvit, svampig massa af ytterst små fjäll, sannolikt med ofvanstående vattenhalt. Möjligen är dock vattenhalten 16 mol. Saltet vittrar fullständigt vid 110° .

Analys å pressadt salt:

0,8845 gr. förlorade vid 110° 0,2276 gr. i vikt och gaf efter glödning för bläster 0,3289 gr. Yb_2O_3 .

I procent:

	Ber. för $\text{Yb}_2\text{3SeO}_4 + 15\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:
Yb_2O_3	394,2	— 37,69	37,19
3SeO_4	381,3	— 36,46	—
$15\text{H}_2\text{O}$	270,3	— 25,85	25,73
	1045,8	100,00	

2. $\text{Yb}_2\text{3SeO}_4 + 8\text{H}_2\text{O}$.

Kristalliserar vid vattenbadstemperatur i stora, vattenklara, till utseendet sexsidigt prismatiska taflor, hvilka i luften hastigt vittra och blifva ogenomskinliga. Afkyles en lösning, hvarur detta salt börjat utskiljas, afbrytes dess bildning, och det vid lägre temperatur stabila saltet 1 ($\text{Yb}_2\text{3SO}_4 + 15\text{H}_2\text{O}$) kristalliserar ut.

Analys å pressadt salt:

1) 0,4618 gr. förlorade vid 110° 0,0723 gr. och gaf 0,2020 gr. Yb_2O_3 .

2) 1,3889 gr. (ny beredning) förlorade vid 120° 0,2133 gr. och gaf 0,5914 gr. Yb_2O_3 .

I procent:

	Ber. för $\text{Yb}_2\text{3SeO}_4 + 8\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:	
			I	II
Yb_2	394,2	— 42,87	(43,73)	42,62
3SeO_4	381,3	— 41,46	—	—
$8\text{H}_2\text{O}$	144,16	— 15,67	15,66	15,43
	919,66	100,00		

Ytterbiumhalten har i analys I utfallit för högt, till följd af svårigheten att fullständigt bortdrifva sele

Spec. vikt och molekularvolym.

1) 1,4075 gr. sp. v. 3,46

2) 1,4053 gr. sp. v. 3,52

Medeltal 3,49

Mol. volym 263.

3. *Vattenfritt ytterbiumselenat*, Yb_2SeO_4 .

Erhålles af de båda föregående genom upphettning
—120°.

Spec. vikt och molekularvolym.

0,8126 gr. sp. v. 4,14

Mol. volym 187.

Surt ytterbiumselenit.

Saltet har enligt NILSON ¹⁾ sammansättningen $\text{Yb}_2\text{H}_2\text{SeO}_3 + 4\text{H}_2\text{O}$.

Ytterbiumkarbonat.

1. *Neutralt ytterbiumkarbonat*, $\text{Yb}_2\text{CO}_3 + 4\text{H}_2\text{O}$ (öfver svafvelsyra).

Uppstår såsom färglösa flockar, om ytterbiumnitratlösning fälles med $(\text{H}_4\text{N})_2\text{CO}_3$. Är efter uttvättning af fritt.

Analys å lufttorkadt salt:

1) 0,7176 gr. förlorade öfver svafvelsyra 0,0270 g ytterligare 0,0538 gr. i vikt och lämnade 0,4771 gr. Y såsom oxalat).

2) 0,5270 gr. gaf 0,3482 gr. Yb_2O_3 .

¹⁾ Om ytterbiums atomvikt, p. 10.

I procent:

	Ber. för $\text{Yb}_2\text{CO}_3 + 4\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:	
			I	II
Yb_2O_3	394,2	— 65,89	65,80	66,08
3CO_2	132	— 22,06	—	—
$4\text{H}_2\text{O}$	72,08	— 12,05	11,26	—
	<u>598,28</u>	<u>100,00</u>		

I exsickator torkadt salt innehåller 3 mol. H_2O , funnet (I): $\text{Yb}_2\text{O}_3 = 68,36\%$, ber. $67,94\%$ för $\text{Yb}_2\text{CO}_3 + 3\text{H}_2\text{O}$.

En direkt kolsyrebestämning har jag ännu ej varit i tillfälle att göra, men för kontroll af formeln vore en dylik önskvärd.

Spec. vikt och molekularvolym.

- 1) 0,8794 gr. öfver svafvelsyra torkadt salt, sp. v. 3,676
- 2) 1,0227 gr. " " " " " sp. v. 3,663

Medeltal 3,670

Mol. volym 158

2. *Basiskt ytterbiumkarbonat*, $\text{YbOH.CO}_3 + \text{H}_2\text{O}$ (torkadt öfver svafvelsyra).

Erhölls genom långvarig inledning af kolsyra i vatten, hvaruti nyss beredt ytterbiumhydrat hölls uppslammadt. Efter ett dygns inverkan hade preparatet ej förändrat utseende, utan var fortfarande flockigt och äfven efter kokning fullt amorft, endast något kompaktare än förut. Vid 100° afgif i exsickator torkadt salt hälften af sin återstående vattenhalt.

Analys å material, som tvättats med alkohol och eter samt torkats öfver svafvelsyra.

1) 0,5342 gr. gaf vid upphettning i förbränningsrör 0,0541 gr. H_2O och lämnade 0,3941 gr. Yb_2O_3 . CO_2 aflägsnas fullständigt först i blästerhetta.

2) 0,5030 gr. förlorade vid 100° 0,0283 gr. H_2O och gaf 0,3676 gr. oxid.

I procent:

	Ber. för $\text{YbOHCO}_3 + \text{H}_2\text{O}$:			Funnet:
	I			II
Yb_2O_3	394,2	— 73,51	73,77	73,04
2CO_2	88	— 16,41	—	—
$3\text{H}_2\text{O}$	54,06	— 10,08	10,13	—
	<u>536,26</u>	<u>100,00</u>		
$1\frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$	—	5,04		5,62 { (viktförlust vid 100°).

Med afseende på uppkomsten af detta basiska karbonat ansluter sig ytterbium nära till erbium ¹⁾ och gadolinium, ²⁾ som under lika förhållanden ge analogt sammansatta produkter. Yttrium ¹⁾, samarium ³⁾ och praseodym ⁴⁾ ge neutrala karbonat vid hydratens behandling med CO_2 .

Basiskt natriumytterbiumkarbonat.

Natriumkarbonat ger vid kokningstemperatur med lösliga, neutrala ytterbiumsalter en flockig fällning, som ej genom tvättning kunde fullständigt befrias från natrium.

Analys:

1,0098 gr. vid 100° torkadt salt gaf vid upphettning i förbränningsrör 0,1643 gr. CO_2 och 0,0671 gr. H_2O samt lämnade 0,7839 gr. återstod. Mähända är formeln $4\text{YbOHCO}_3 + \text{Na}_2\text{CO}_3 + 2\text{H}_2\text{O}$, som fordrar

i procent:

			Funnet:
$2\text{Yb}_2\text{O}_3$	894,4	— 78,28	77,63
Na_2CO_3			
4CO_2	176	— 15,41	16,27
$4\text{H}_2\text{O}$	<u>72,08</u>	<u>— 6,31</u>	<u>6,64</u>
	1142,48	100,00	100,54

Jag vågar dock ännu ej afgöra, om ej möjligen natriumsaltet är att betrakta såsom förorening.

¹⁾ CLEVE och HÖGLUND, Bull. Soc. ch. 1872, t. XVIII p. 293.

²⁾ BENEDICKS, l. c. p. 417.

³⁾ CLEVE, Contr. to the kn. of Samarium, p. 23.

⁴⁾ v. SCHÉELE, l. c. p. 66.

Ytterbiumborat.

Framställdes genom glödning af ytterbiumoxid tillsammans med öfverskott af borsyreanhydrid. Uppslutningen gick trögt och fullbordades först efter flera timmars hvitglödning. Sedan den porslinslika smältan blifvit groft krossad, utdrogs öfverskottet af B_2O_3 med utspädd saltsyra, hvarvid ytterbiumborat kvarlämnades i form af en opak, finkornig kristallsand. Saltet angreps knappast märkbart af konc. HCl . För analys afryktes därför med fluorväte, hvarpå fluoriden sönderdelades med svafvelsyra.

Analys:

1) 1,0798 gr. af de gröfsta kristallerna gaf 1,4565 gr. Yb_2SO_4 .

2) 0,9440 gr. fin kristallsand gaf 1,2600 gr. Yb_2SO_4 .

I procent:

	Ber. för YbBO_3 :		Funnet:	
			I	II
Yb_2O_3	394,2	— 84,92	85,77	84,87
B_2O_3	70	— 15,08	—	—
	<u>464,2</u>	<u>100,00</u>		

CLEVE har framställt analoga ortoborat af didym och samarium.

Ytterbiumfosfat.

1. *Ortofosfat*, $\text{YbPO}_4 + 4\frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$ ($2\text{H}_2\text{O}$ vid 100°).

Ytterbiumnitrat i neutral lösning fälls fullständigt af vanligt natriumfosfat (Na_2HPO_4). Filtratet aflöper surt af fosforsyra, och efter uttvättning återstår fullt neutralt ytterbiumfosfat. Torkar i luften till tunga, halfgenomskinliga massor, som förlora något vatten öfver svafvelsyra, men kvarhålla 2 mol. H_2O öfver 100° .

Analys å lufttorkadt salt:

1) 2,7426 gr. förlorade i exsickator 0,3230 gr.; 1,4289 gr. af återstoden förlorade vid 100° ytterligare 0,0345 gr. i vikt.

2) 1,0302 gr. förlorade vid 100° 0,1334 gr. och i blästerhetta ytterligare 0,0992 gr. i vikt.

3) 1,0062 gr. gaf efter smältning med soda 0,3284 gr. $Mg_2P_2O_7$ och 0,5620 gr. Yb_2O_3 , omfälld med oxalsyra.

4) 0,5918 gr. gaf 0,1956 gr. $Mg_2P_2O_7$.

I procent:

Ber. för $YbPO_4 + 4\frac{1}{2}H_2O$:			Funnet:			
			I	II	III	IV
Yb_2O_3	394,2	— 56,44	—	—	55,91	—
P_2O_5	142	— 20,34	—	—	20,81	21,07
$4H_2O$	72,08	— 10,32	—	9,63	{ (viktförlust öfver 100°)	
$5H_2O$	90,10	— 12,90	13,89	12,95	{ (viktförlust vid 100°)	
	<u>698,38</u>	<u>100,00</u>				

De funna värdena stämma ej synnerligen väl med teorin, men lämna dock, synes det mig, intet tvifvel om saltets sammansättning.

På liknande sätt äro ortofosfat af samarium, yttrium och erbium framställda (CLEVE, CLEVE & HÖGLUND).

2. Ytterbiummetafosfat, Yb_3PO_4 .

Ett försök att framställa fosfatet $R_2O_3, 5P_2O_5$ enligt det af CLEVE för samariumsaltet beskrifna förfaringssättet,¹⁾ upplösning af vattenfritt sulfat i smält metafosforsyra, ledde i stället till uppkomsten af ofvanstående metafosfat. Den nästan klara smältan löstes till allra största delen i vatten och lämnade blott en ringa kvantitet af saltet såsom sandigt kristallinisk återstod.

Analys:

1) 0,3287 gr. gaf efter uppslutning med soda 0,2735 gr. $Mg_2P_2O_7$ och 0,1534 gr. (omfälld) Yb_2O_3 .

2) 0,2718 gr. (ny beredning) gaf 0,1316 gr. Yb_2O_3 .

cent:

Ber. för Yb_3PO_4 :		Funnet:	
		I	II
394,2	— 48,03	46,67	48,42
<u>426</u>	<u>— 51,97</u>	<u>53,06</u>	—
820,2	100,00	99,71	

arat I har enligt analysen varit något förorenadt af

varande yttriumsalt är bekant (CLEVE).

Ytterbiumfosfat, $\text{Yb}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{P}_2\text{O}_5 + 5\text{H}_2\text{O}$ (vid 100° $3\text{H}_2\text{O}$).

ta delen af den ytterbin, som användes till syntes af
e salt, gick emellertid vid smältans behandling med
lösningen och kunde sedan ej genast utfällas med am-
monnolikt till följd af uppkomsten af kolloidala, lösliga
Efter någon tid eller genast efter tillsats af salmiak
mligen en flockig fällning, som åter löstes vid uttvätt-

koncentrering af nyssnämnda, starkt fosforsura lösning
t amorft fosfat af typen $\text{R}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{P}_2\text{O}_5$. Det bildar ef-
ing i luft ett tungt, hvitt pulver eller opaka stycken
attenhalt af 5 mol., hvaraf 3 icke afges vid 100° .

ys:

3 gr. lufttorkadt salt förlorade vid 100° 0,0181 gr.,
erhetta ytterligare 0,0226 gr. i vikt. Återstoden upplöstes
och gaf 0,1854 gr. $\text{Mg}_2\text{P}_2\text{O}_7$ samt, efter omfällning
syra, 0,1679 gr. Yb_2O_3 .

cent:

Ber. för $\text{Yb}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{P}_2\text{O}_5 + 5\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:
394,2	— 51,31	51,46
284	— 36,97	36,22
54,06	— 7,04	6,93 (viktförlust öfver 100°)
<u>36,04</u>	<u>— 4,69</u>	<u>5,55</u> (viktförlust vid 100°)
768,3	100,00	100,16

Ytterbiumvanadat.

1. $3\text{Yb}_2\text{O}_3 \cdot 5\text{V}_2\text{O}_5 + 3\text{H}_2\text{O}$ (torkadt vid 100°).

Erhölls genom inverkan af ammoniumvanadat på ytterbium-nitrat i form af en gul, amorf fällning.

Analys å salt, torkadt vid 100° :

0,5061 gr. gaf efter behandling med konc. HCl och fällning med oxalsyra 0,2766 gr. Yb_2O_3 . Ur filtratet erhölls 0,2158 gr. V_2O_5 .

I procent:

	Ber. för $3\text{Yb}_2\text{O}_3 \cdot 5\text{V}_2\text{O}_5 + 3\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:
$3\text{Yb}_2\text{O}_3$	1182,6	— 55,04	54,65
$5\text{V}_2\text{O}_5$	912	— 42,45	42,64
$3\text{H}_2\text{O}$	54,1	— 2,51	—
	<u>2148,7</u>	<u>100,00</u>	

2. $\text{Yb}_2\text{O}_3 \cdot 15\text{V}_2\text{O}_5$.

Filtratet från ofvan beskrifna, olösliga vanadat afsatte vid koncentrerings öfver svafvelsyra bruna, på ytan något metallglänsande krutor, hvilka enligt analysen voro synnerligen vanadinrika, ehuru den slutligen vanadinfria lösningen innehöll ytterbiumsalt i öfverskott.

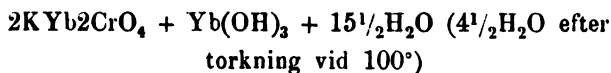
0,4112 gr. salt gaf, analyseradt på samma sätt som föregående, 0,0530 gr. Yb_2O_3 och 0,3582 gr. V_2O_5 .

I procent:

	Ber. för $\text{Yb}_2\text{O}_3 \cdot 15\text{V}_2\text{O}_5$:		Funnet:
Yb_2O_3	394,2	— 12,55	12,89
$15\text{V}_2\text{O}_5$	2536	— 87,45	87,13
	<u>2930,2</u>	<u>100,00</u>	<u>100,02</u>

Kristalliserande ytterbiumvanadat, motsvarande samarium- och gadoliniumpyrovanadaten ¹⁾ har jag ännu ej lyckats erhålla.

¹⁾ CLEVE, Contrib. to the kn. of Samarium, p. 30. BENEDICKS, l. c. p. 414.

Basiskt kaliumytterbiumkromat.

En gul, amorf förening, som utfaller, om neutralt kaliumkromat sättes till en neutral lösning af ytterbiumnitrat. Sistnämnda salt bör vara i öfverskott; i motsatt fall erhålles en sur, rödgul lösning under det fällningen fortfarande är basisk. Saltet löses något af vatten under sönderdelning och pressades därför för analys direkt, utan föregående tvättning.

Analys:

1) 0,6831 gr. pressadt salt förlorade vid 100° 0,1748 gr. = 25,59 %. Ber. för $11\text{H}_2\text{O}$ 24,93 %.

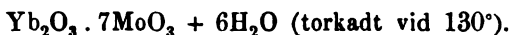
2) 0,5055 gr. vid 100° torkadt salt gaf 0,0658 gr. Cr_2O_3 efter fällning med HgNO_3 . Ur filtratet aflägsnades Hg med H_2S , sedan fälldes med ammoniak 0,3142 gr. $\text{Cr}_2\text{O}_3 + \text{Yb}_2\text{O}_3$, hvaraf 0,2568 gr. Yb_2O_3 . Filtratet från metallhydraten gaf 0,0360 gr. K_2O .

I procent:

Ber. för $2\text{KYb}_2\text{CrO}_4 + \text{Yb}(\text{OH})_3 + 4\frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$: Fannet: (II)			
$3\text{Yb}_2\text{O}_3$	1182,6	— 49,52	50,74
$2\text{K}_2\text{O}$	188,6	— 7,90	7,12
8CrO_3	800,8	— 33,53	32,15
$12\text{H}_2\text{O}$	<u>216,24</u>	<u>— 9,05</u>	<u>(9,99)</u>
	2388,24	100,00	(100,00)

Att Yb-halten utfallit för högt, K- och Cr-halten däremot för lågt, beror sannolikt på att saltet såsom nämnts ej tvättades; ytterbiumnitrat var i öfverskott vid beredningen.

Kaliumbikromat fäller ej neutrala ytterbiumlösningar.

Ytterbiummolybdat.

Ytterbiumnitrat ger ej ögonblicklig fällning med en kall lösning af ammoniummolybdat, $3(\text{H}_4\text{N})_2\text{O} \cdot 7\text{MoO}_3$, men efter någon tid afsättes ofvanstående salt i opaka, färglösa, äfven i hett vatten olösliga krutor.

Analys:

0,3962 gr. vid 130° torkadt salt gaf efter lösning i HNO_3 och fällning med H_3N 0,1059 gr. Yb_2O_3 ; ur filtratet fälldes med HgNO_3 0,2608 gr. MoO_3 .

I procent:

	Ber. för $\text{Yb}_2\text{O}_3 \cdot 7\text{MoO}_3 + 6\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:
Yb_2O_3	394,2	— 26,10	26,73
7MoO_3	1008	— 66,74	65,83
$6\text{H}_2\text{O}$	<u>108,17</u>	<u>— 7,16</u>	<u>(7,44)</u>
	1510,37	100,00	(100,00)

Vid försök att framställa ytterbiummolybdat genom upphettnings af ytterbin tillsammans med öfverskott af molybdentrioxid i koksaltsmälta uppslötts jorden äfven i hvitglödgningshett blott med största svårighet. Större delen förblef olöst, men förvandlades till ett mörkgrönt, tungt kristallpulver.¹⁾

Ur den klara koksaltsmältan utkristalliserade vid afsvälning små skimrande, färglösa fjäll, sannolikt ett natriumytterbiummolybdat, som dock ännu ej blifvit fullständigt undersökt. Vid analys af 0,4068 gr. erhöles 0,1395 gr. Yb_2O_3 och 0,1953 gr. MoO_3 , motsvarande 34,29 % Yb_2O_3 och 48,01 % MoO_3 (Kvot. = 1 : 3,83).

Ytterbiummetavolframät.

Framställdes genom dubbel dekomposition mellan ytterbiumsulfat och bariummetavolframät ($\text{BaO} \cdot 4\text{WO}_3 + 9\text{H}_2\text{O}$). Ur kon-

¹⁾ Har senare befunnits ega sammansättningen $2\text{Yb}_2\text{O}_3 \cdot \text{MoO}_3$, som fordrar 84,56 % Yb_2O_3 och 15,44 % MoO_3 . Funnet 84,62 % Yb_2O_3 , 15,21 % MoO_3 .

de lösningar anskjuter saltet i klara, vackra prismer tangulära ytor. Mycket lösligt, men ej delikvescent. ej i luften.

lys å pressadt salt:

2,2000 gr. förlorade öfver svafvelsyra 0,1712 gr. och vid erligare 0,0660 gr. i vikt. 0,4617 gr. af återstoden läm-
er glödning 0,4390 gr.

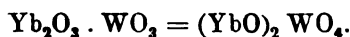
0,8571 gr. förlorade vid glödning 0,1396 gr. i vikt och smältning med soda 0,0882 gr. Yb_2O_3 samt 0,6290 gr.

rocent:

Ber. för $\text{Yb}_2\text{O}_3 \cdot 12\text{WO}_3 + 35\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:			
		I	II		
394,2	— 10,35	83,44	83,86	10,29	83,68
2784	— 73,09			73,39	
630,7	— 16,56		(16,44)	16,29	
3808,9	100,00			99,97	

svarar till sammansättningen samariummetavolframat,
 $12\text{WO}_3 + 35\text{H}_2\text{O}$ (CLEVE).

Ytterbiumoxivolframat.



glödning af ekvivalenta mängder ytterbin och volfram-
koksaltfluss angreps jorden mycket trögt. Inverkan
ades genom tillsatts af WO_3 i stort öfverskott, men
delen af ytterbiumoxiden stannade olöst. Efter ånpul-
g omsmältes bottensatsen i samma flussblandning. Den
heller nu fullständigt, men lämnade efter utlakning
vatten en blandning af tvänne kristalliserade salter, ett
som bildade färglösa nålar och som längre fram vidare
s, samt ett tyngre med dragning i grårödt. Sedan det
nom slamning bortskaffats, återstod ett glänsande, kom-
stallpulver, som under mikroskopet visade sig bestå af
ldade, korta, rätvinkligt afskurna, sexsidiga prismer,
örsedda med trubbiga pyramider.

Analys:

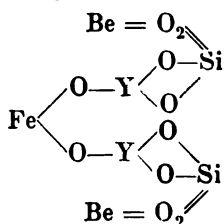
0,8184 gr. fint pulveriseradt salt gaf efter långvarig behandling med konc. HCl 0,3007 gr. WO_3 . Ur filtratet fälldes 0,5146 gr. Yb_2O_3 med ammoniak.

I procent:

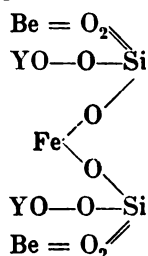
	Ber. för $\text{Yb}_2\text{O}_3 \cdot \text{WO}_3$:		Funnet:
Yb_2O_3	394,2	— 62,95	62,88
WO_3	232	— 37,05	36,74
	626,2	100,00	99,62

Saltet representerar en för de sällsynta jordarterna förut okänd typ, $\begin{matrix} \text{RO} \cdot \text{O} \\ \text{RO} \cdot \text{O} \end{matrix} > \text{RO}_2$ med (RO) som envärdig, positiv radikal. Detta förhållande är af ett visst intresse, emedan det ger stöd åt en nyare strukturformel för gadolinit, som W. PETERS-SON¹⁾ uppställde efter att ha påvisat osannolikheten i GROTHS gamla formel. Gadolinitens formel antages nämligen vara

enligt GROTH:



enligt W. PETERSSON:



Om den sistnämnda formeln är riktig, skulle således yttriummetallerna i naturen förekomma företrädesvis just i form af den envärdiga radikalen RO .

Natriumytterbiumvolframmat.

1. $2\text{Yb}_2\text{O}_3 \cdot 4\text{Na}_2\text{O} \cdot 7\text{WO}_3$.

Erhölls i färglösa nålar samtidigt med föregående volframmat och kristalliserade dessutom i ringa mängd ur den i värme klara

¹⁾ Studier öfver gadolinit, Geol. För. Förh. Bd. 12, H. 4. p. 70.

smältan. Under mikroskopet visade kristallerna en »centralknoda» och voro påbyggda i tvänne motsatta riktningar, med tillspetsade ändar. Möjlignast renslammade material analyserades:

0,4552 gr. salt gaf 0,2727 gr. WO_3 och 0,1340 gr. Yb_2O_3 , fälld med H_3N . Ur filtratet från sistnämnda fällning erhöles 0,0910 NaCl .

I procent:

	Ber. för $2\text{Yb}_2\text{O}_3, 4\text{Na}_2\text{O} \cdot 7\text{WO}_3$:		Funnet:
$2\text{Yb}_2\text{O}_3$	788,4	— 29,63	29,44
$4\text{Na}_2\text{O}$	248,4	— 9,34	10,61
7WO_3	1624	— 61,03	59,91
	<u>2660,8</u>	<u>100,00</u>	<u>99,96</u>

Att natriumhalten utfallit för högt och volframhalten tvärtom torde få tillskrifvas svärigheten att fullständigt fränkilja WO_3 , som alltid löses något vid tvättningen.

2. $\text{Yb}_2\text{O}_3, 9\text{Na}_2\text{O} \cdot 12\text{WO}_3$.

Ett dubbelvolframat af, som jag tror, denna sammansättning erhöles genom komponenternas upphettning i en till största delen af koksalt bestående fluss. Utkristalliserade vid afsvälning i opaka, mikroskopiskt fina nålar, olösliga i vatten.

Analys:

0,1037 gr salt gaf, analyseradt på samma sätt som föregående volframat, 0,0102 gr Yb_2O_3 , 0,0750 gr. WO_3 samt 0,0283 gr. NaCl .

I procent:

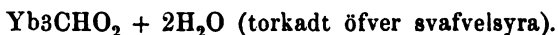
	Ber. för $\text{Yb}_2\text{O}_3, 9\text{Na}_2\text{O} \cdot 12\text{WO}_3$:		Funnet:	Kvot:
Yb_2O_3	394,2	— 10,55	9,8	1
$9\text{Na}_2\text{O}$	558,9	— 14,95	14,5	9,2
12WO_3	2784	— 74,50	72,3	12,5
	<u>3737,1</u>	<u>100,00</u>	<u>96,6</u>	

På grund af bristande material kunde icke någon kontrollanalys utföras, men sannolikt beror förlusten i analysen blott på föroreningar, enär kvotienterna tämligen väl motsvara formeln.

HÖGBOM, som underkastat de sällsynta jordarternas natriumdubbelvolframmat en speciell undersökning¹⁾ lyckades icke med ytterbium få någon ren produkt. Han observerade emellertid »silfvergrå, glänsande kristaller af prismatisk form,» som han antager möjligen vara ytterbiumvolframoxidvolframmat.²⁾ Måhända voro dessa identiska med ofvan beskrifna ytterbiumoxivolframmat. För öfrigt tillhöra de båda af mig analyserade ytterbiumnatriumvolframaten icke någon af de typer, HÖGBOM uppställt, och hvilka alla innehålla ekvivalenta mängder bas- och syreanhydrid. Det senare gäller visserligen äfven ytterbiumsaltet 2., men detta visar relativt större natronrikedom än öfriga kända salt inom yttrimgruppen och kommer i berörda afseende närmast toriumnatriumvolframmatet $\text{ThO}_2 \cdot 14\text{Na}_2\text{O} \cdot 16\text{WO}_3$ (HÖGBOM, p. 118).

Saltet 1 förmedlar genom sitt öfverskott af basanhydrid öfvergången till ytterbiumoxivolframmatets typ.

Ytterbiumformiat.



Bildar hårda krutor af små, sfäriskt anordnade nålar. Mycket lösligt, vittrar fullständigt vid 100°. Vid glödning af saltet erhålles en mycket voluminös oxid. — Är först framställt af MARIGNAC.

Analys:

1) 1,1270 gr. i exsickator torkadt salt förlorade vid 130° 0,1205 gr. i vikt.

2) 0,7025 gr. i exsickator torkadt salt förlorade vid 100° 0,0786 gr. och gaf 0,4000 gr. Yb_2O_3 .

I procent:

	Ber. för $\text{Yb}_3\text{CHO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:	
	I	II	I	II
Yb	173,1	— 50,30	—	50,02
3CHO_2	135,03	— 39,23	—	—
$2\text{H}_2\text{O}$	36,04	— 10,47	10,69	11,19
	344,17			

¹⁾ Öfv. af K. Vet. Akad. Förh. 1884, N:o 5, p. 111.

²⁾ l. c. p. 123.

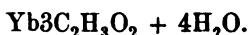
3) 1,2117 gr. mellan papper pressadt salt förlorade vid 130° 0,2047 gr. = 16,84 %; beräknadt för $3\frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$ 16,99 %.

Spec. vikt och molekularvolym å pressadt salt:

0,9646 gr., sp. v. 2,85

Mol. volym 130.

Ytterbiumacetat.



Framställdes af hydratet, enär oxiden icke löses af ättiksyra. Kristalliserar i små luftbeständiga, lösliga, sexsidiga taflor. Lösningen har svagt alkalisk reaktion på lackmus. Allt kristallvatten bortgår vid 100°.

Analys å pressadt salt:

0,8271 gr. förlorade vid 110° 0,1427 gr. och gaf efter glödning 0,3829 gr. Yb_2O_3 .

I procent:

	Ber. för $\text{Yb3C}_2\text{H}_3\text{O}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$:	Funnet:
Yb	173,1 — 40,99	40,66
$3\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2$	179,09 — 41,94	—
$4\text{H}_2\text{O}$	72,08 — 17,07	17,25
	<u>422,27</u> 100,00	

Ytterbiumpropionat.



Kristalliserar vid rumstemperatur i bollformigt förenade, för känseln feta fjäll, som efter pressning mellan papper ej vittra öfver svafvelsyra.

Analys:

1,0724 gr. gaf efter glödning 0,4679 gr. Yb_2O_3 .

Funnet: Yb 38,32 %. Ber. för $\text{Yb3C}_3\text{H}_5\text{O}_2 + 3\text{H}_2\text{O}$: Yb = 38,79 %.

2. $\text{Yb}_3\text{C}_3\text{H}_5\text{O}_2 + \text{H}_2\text{O}$.

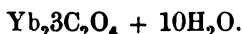
Liknar föregående, men erhöles vid vattenbadstemperatur.

Analys å pressadt salt:

1,0447 gr. gaf vid förbränning i syrgas 0,3620 gr. H_2O och
 1,0080 gr. CO_2 samt lämnade 0,5054 gr. Yb_2O_3 .

I procent:

	Ber. för $\text{Yb}_3\text{C}_3\text{H}_5\text{O}_2 + \text{H}_2\text{O}$:	Funnet:
Yb	173,1 — 42,19	42,49
C ₉	108 — 26,32	25,85
H ₁₇	17,17 — 4,18	3,85
O ₇	112 — 27,41	—
	<u>410,27</u> <u>100,00</u>	

Ytterbiumoxalat.

Då saltet är beskrifvet och analyseradt af NILSON¹⁾ må
 här blott tilläggas några sp. vikts- och löslighetsbestämningar.

*Spec. vikt och molekularvolym.*a. Lufttorkadt salt ($10\text{H}_2\text{O}$) 1,0769 gr., sp. v. 2,644

Mol. volym 299,0

b. Öfver svafvelsyra torkadt salt ($8\text{H}_2\text{O}$) 1,0907 gr.,

sp. v. 2,439

Mol. volym 309,3.

*Löslighet i ammoniumoxalat.*Bestämningen gjordes enligt BRAUNERS föreskrift²⁾.

1,2903 gr. kristalliseradt (= 1 gr. vattenfritt) ammonium-
 oxalat, löst i 38,265 gr. vatten, höll vid rumstemperatur 0,02437
 gr. Yb_2O_3 i lösning.

Lösligheten är alltså omkring 10 gånger större än yttri-
 umoxalatets, för hvilket BRAUNER fann motsvarande siffra vara
 0,002562.

¹⁾ Om ytterbiums atomvikt, p. 11.²⁾ Contr. to the Ch. of Thorium, Trans. of the Ch. Soc. 1898. p. 951.

Löslighet i normalsvafvelsyra.

a. 100 cc. n-svafvelsyra förbrukade efter ett par timmars kokning med öfverskott af ytterbiumoxalat, sedan lösningen åter svalnat:

1) 31,71 cc. kameleonlösning af titern 0,007424 gr. ammoniumoxalat per cc., motsvarande	0,3857 gr. $\text{Yb}_2\text{3C}_2\text{O}_4$.
2) 30,11 cc. kameleonlösning » ' »	0,3581 gr. »
<hr/>	
Medeltal	0,3719 gr. $\text{Yb}_2\text{3C}_2\text{O}_4$.

b. 100 cc. n-svafvelsyra förbrukade, efter skakning med oxalatet i köld,

25,09 cc. kameleonlösning, motsvarande 0,3053 gr. $\text{Yb}_2\text{3C}_2\text{O}_4$.

Häraf framgår att äfven i svafvelsyra är oxalatets löslighet relativt stor, nämligen 3—4 gånger så stor som gadoliniumoxalatets ¹⁾ och omkring dubbelt så stor som yttriumoxalatets ²⁾.

Surt ytterbiummalonat.

Ytterbiumhydrat löses af malonsyra i öfverskott, men lösningen utskiljer snart ytterst svårlösliga, fina kristallnålar af ofvanstående sura salt. Efter pressning mellan papper är saltet vattenfritt.

Analys:

1) 0,1548 gr. i exsickator torkadt salt gaf vid förbränning i syrgasström 0,1078 gr. CO_2 , 0,0181 gr. H_2O och lämnade 0,0812 gr. Yb_2O_3 .³⁾

2) 0,2616 gr. pressadt salt gaf 0,1355 gr. Yb_2O_3 .

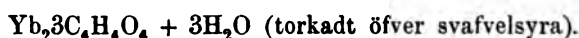
¹⁾ Se BENEDICKS, l. c. 419.

²⁾ Se BRAUNER, l. c. p. 974.

³⁾ Fil. Stud. Herr G. LAGERGREN har benäget utfört denna analys.

I procent:

	Ber. för $\text{YbH}_2\text{C}_3\text{H}_4\text{O}_4$:		Funnet:	
			I	II
Yb	173,1	— 45,78	46,06	45,4
C ₃	72	— 19,04	18,99	—
H ₅	5,05	— 1,33	1,30	—
O ₈	128	— 33,85	—	—
	378,15	100,00		

Ytterbiumsuccinat.

I köld föll ytterbiumacetat ej för bärnstenssyra, men kokning af lösningen erhöles efter en stund en kornig, otvåkristallinisk och i värme mycket svåröslig, i köld så godt löslig fällning.

Analys:

0,3341 gr. i exsickator torkadt salt gaf vid förbränning syrgas 0,2368 gr. CO_2 , 0,0690 gr. H_2O och lämnade 0,175 gr. Yb_2O_3 .

I procent:

	Ber. för $\text{Yb}_2\text{3C}_4\text{H}_4\text{O}_4 + 3\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:
Yb ₂	346,2	— 46,26	46,20
C ₁₂	144	— 19,24	19,33
H ₁₈	18,18	— 2,43	2,30
O ₁₅	240	— 32,07	—
	748,38	100,00	

Ytterbiumlaktat.

En kall lösning af ytterbiumacetat grumlas ej af mjölk. Vid upphettning utfaller emellertid ett geléartadt laktat, som pressas mellan papper. Saltet torkades i exsickator innan analyserades.

Analys:

1) 0,9128 gr. förlorade vid 100° 0,0175 gr. = 1,92 %.
0,6444 gr. vid 130° torkadt salt gaf 0,2684 gr. Yb_2O_3 .

2) 0,2949 gr. gaf vid förbränning i syrgas 0,2505 gr. CO_2 ,
0,1045 gr. H_2O och lämnade 0,1203 gr. Yb_2O_3 .

I procent:

	Ber. för $\text{Yb}_3\text{C}_3\text{H}_5\text{O}_3 + 2\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:	
			I	II
Yb	173,1	— 36,34	35,88	35,82
C ₉	108	— 22,68	—	23,17
H ₁₉	19,19	— 4,03	—	3,94
O ₁₁	176	— 36,95	—	—
	<u>476,29</u>	<u>100,00</u>		

Surt ytterbiumtartrat.

1. $\text{YbH}_2\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6 + 12\text{H}_2\text{O}$ ($7\text{H}_2\text{O}$ torkadt öfver svafvelsyra).

Ytterbiumacetat ger med vinsyra i köld en flockig fällning, som åter löses i öfverskott af syran. Tillsättes jämt och nött så mycket vinsyra, som behöfs för erhållande af en klar lösning, så kristalliserar vid afsvalning ofvanstående sura tartrat i mycket svårlösliga nålar. För analys omkristalliserades en mindre kvantitet ur vatten.

Analys:

1) 0,9868 gr. pressadt salt förlorade i exsickator 0,1366 gr., vid 110° ytterligare 0,1631 gr. i vikt. 0,6771 gr. af återstoden gaf efter glödning 0,2777 gr. Yb_2O_3 .

2) 0,3248 gr. i exsickator torkadt salt gaf 0,1077 gr. Yb_2O_3 .

I procent:

	Ber. för $\text{YbH}_2\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6 + 7\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:	
			I	II
Yb	173,1	— 29,03	29,11	29,12 (å torkadt salt)
C ₈ H ₂₂ O ₁₉	423,13	— 70,97	—	—
	<u>596,23</u>	<u>100,00</u>		

Ber. för $\text{YbH}_2\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6 + 12\text{H}_2\text{O} : 5\text{H}_2\text{O} = 13,13$ %.

Funnen viktförlust å pressadt salt öfver H_2SO_4 : 13,84 %.

2. $\text{YbH}_2\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6 + 2\text{H}_2\text{O}$ (torkadt öfver svafvelsyra).

Ett icke omkristalliseradt, längre tid förvaradt preparat visade efter torkning i exsickator ofvanstående sammansättning.

Analys:

0,7590 gr. gaf vid förbränning i syrgas 0,5213 gr. CO_2 , 0,1697 gr. H_2O och lämnade 0,2922 gr. Yb_2O_3 .

I procent:

	Ber. för $\text{YbH}_2\text{C}_4\text{H}_4\text{O}_6 + 2\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:
Yb	173,1	— 34,19	33,81
C ₈	96	— 18,96	18,73
H ₁₃	13,13	— 2,59	2,50
O ₄	224	— 44,26	—
	506,23	100,00	

Ett liknande surt tartrat af yttrium (3 mol. H_2O) är framställt af CLEVE.

Surt ytterbiumcitrat.

1. $2\text{YbC}_6\text{H}_5\text{O}_7 + \text{H}_3\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7 + 12\text{H}_2\text{O}$.

Framställdes genom upplösning af hydratet i minsta möjliga mängd citronsyra. Den starkt afdunstade lösningen afsatte små, mjuka, opaka, af fina kristallnålar bestående bollar. Torkadt vid 100° var saltet vattenfritt.

Analys:

1) 0,6277 gr. pressadt salt förlorade i exsickator 0,1098 gr., vid 100° ytterligare 0,0057, tillsammans 0,1155 gr. = 18,32 %.

Ber. för $2\text{YbC}_6\text{H}_5\text{O}_7 + \text{H}_3\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7 + 12\text{H}_2\text{O}$: $12\text{H}_2\text{O} = 19,09$ %.

2) 0,4492 gr. vid 100° torkadt salt gaf 0,1948 gr. Yb_2O_3 .

3) 0,5122 gr. vid 100° torkadt salt gaf 0,2221 gr. Yb_2O_3 .

I procent:

	Ber. för $2\text{YbC}_6\text{H}_5\text{O}_7 + \text{H}_3\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7$:		I	Funnet:	II
Yb_2O_3	37,78		38,08		38,08

2. $2\text{YbC}_6\text{H}_5\text{O}_7 + \text{H}_3\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7 + 15\text{H}_2\text{O}$.

Uppstod genom längre tids förvaring af föregående salt i fuktig luft.

Analys å pressadt salt:

1) 0,8907 gr. förlorade vid upphettning till 100° 0,1994 gr.

Ber. för $\text{Yb}_2\text{H}_3 \cdot 3\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7 + 15\text{H}_2\text{O} : 15\text{H}_2\text{O} = 22,77 \%$.

Funnen viktförlust vid 100° 22,39 %.

2) 0,6577 gr. vid 100° torkadt salt gaf vid förbränning i syrgas 0,5349 gr. CO_2 , 0,1366 gr. H_2O och lämnade 0,2822 gr. Yb_2O_3 .

I procent:

	Ber. för $2\text{YbC}_6\text{H}_5\text{O}_7 + \text{H}_3\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7$:		Funnet:
Yb_2	346,2	— 37,78	37,68
C_{18}	216	— 23,57	(22,18)
H_{18}	18,18	— 1,99	2,31
O_2	<u>336</u>	<u>— 36,66</u>	—
	916,38	100,00	

Tyvärr har jag ej varit i tillfälle att omgöra C- och H-bestämningarna, som utfallit otillfredsställande. Den uppställda formeln torde dock kunna anses säker.

Ytterbiumbenzoat.



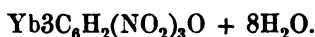
Erhölls af ytterbiumacetat och benzoesyra såsom en kornig, ej tydligt kristallinisk fällning. Ytterst svårlösligt i kokande vatten. Saltet är vattenfritt och kunde efter pressning upphetas till 130° utan att aftaga i vikt.

Analys å ur kokande vatten omkristalliseradt, pressadt salt:

0,2405 gr. gaf 0,0890 gr. Yb_2O_3 .

I procent:

	Ber. för $\text{Yb}_3\text{C}_7\text{H}_5\text{O}_2$:		Funnet:
Yb	173,1	— 32,28	32,50
$3\text{C}_7\text{H}_5\text{O}_2$	<u>363,15</u>	<u>— 67,72</u>	—
	536,25	100,00	

Ytterbiumpikrat.

Anskjuter i långa, vackra, glänsande prismer ur en koncentrerad lösning af ytterbiumacetat och pikrinsyra. Saltet vittrar långsamt i luften och smälter vid omkring 80° i kristallvattnet; vid starkare upphettning förpuffar det. Fyra mol. kristallvatten bortgå i exsickator, de fyra återstående vid 100°.

Analys:

1) 0,2925 gr. pressadt salt förlorade vid 100° 0,0434 gr.

2) 0,3643 gr. pressadt salt förlorade öfver svafvelsyra 0,0274 gr., vid 100° ytterligare 0,0272 gr. i vikt.

I procent:

	Ber. för $\text{Yb}_3\text{C}_6\text{H}_2(\text{NO}_2)_3\text{O} + 8\text{H}_2\text{O}$:		Funnet:		
			I	II	
$\text{Yb}_3\text{C}_6\text{H}_2\text{N}_3\text{O}_7$	857,52	— 85,60	—	—	
$4\text{H}_2\text{O}$	72,08	— 7,20	14,40	14,84	7,52
$4\text{H}_2\text{O}$	72,08	— 7,20			
	1001,68	100,00			14,99

3) 0,2714 gr. vid 100° torkadt salt gaf 0,0611 gr. Yb_2O_3 , fälld med ammoniak.

I procent:

	Ber. för $\text{Yb}_3\text{C}_6\text{H}_2\text{N}_3\text{O}_7$:		Funnet:
Yb	173,1	— 20,18	20,29
$3\text{C}_6\text{H}_2\text{N}_3\text{O}_7$	684,42	— 79,82	—
	857,52	100,00	

Spec. vikt och molekularvolym.

0,3248 gr., sp. v. 1,95

Mol. volym 513.

Samariumpikrat har analog sammansättning.¹⁾

¹⁾ CLEVE, l. c. p. 39.

IV. Elektrolytisk ledningsförmåga.

nedan meddelas resultaten af mina försök att bestämma elektrolytiska ledningsförmågan hos ytterbiumsulfat, even- ytterbiumjonens vandringshastighet. Försöken utfördes en- LAUSCHS metod; d. v. s. ledningsmotståndet hos salt- af olika koncentrationer bestämdes med hjälp af WHEAT- rygga och telefon.

försöken användes omkristalliseradt sulfat af renaste med atomvikten 173,1, i lösning fritt från absorptions- yra olika beredningar togos i arbete (Ser. I—IV), och hvarje koncentration i hvarje serie meddelade talen äro den af flera bestämningar, alla utförda vid + 18°.

starkaste utspädningarna gjordes med vatten, som om- ts i platinakärl och hvars ledningsförmåga ej öfver- 10⁻⁶. Värdena äro här korrigerade för lösningsvatt- ningsförmåga, men för ytterst utspädda lösningar blifva försöksfelen så stora, att de meddelade talen blott kunna om approximationer.

ental liter, som innehålla en gramekvivalent = 64,8617

. kristalliseradt ytterbiumsulfat.

ivalenta ledningsförmågan vid + 18°.

Ser.	$\lambda_{\text{ekv.}}$				$\lambda_{\text{ekv.}}$	
	I	II	III	IV	Medeltal	Diff.
3	20,9	20,9	20,7	20,4	20,7	14,6
7	—	24,7	—	—	24,7	
3	35,0	35,4	—	35,4	35,3	26,3
	—	61,7	—	61,5	61,6	
	—	74	—	—	74	36,4
	—	—	97	98,8	98	
	—	—	(105)			

llen visar, att ytterbiumsulfat delvis är hydrolyseradt utspädd lösning. Förhållandet kan äfven påvisas med

lackmus, hvars färg i måttligt koncentrerade lösningar af saltet är rent violett, men vid fortsatt, stark utspädning med rent vatten öfvergår till rödaktig.

Ledningsförmågan hos yttriumsulfat har, så vidt jag känner, icke blifvit bestämd, hvilket skulle varit af stort intresse för en jämförelse mellan basiciteten hos ifrågavarande båda jordarter. Beträffande ledningsförmågan hos lantansulfat ¹⁾ och praseodymsulfat ²⁾ finnas några uppgifter, som dock icke tillåta direkta jämförelser med ytterbiumsaltet, enär försökstemperaturen i sistnämnda fall ej finnes angifven och i det förra var 25°, under det att mina värden gälla för + 18°. Så mycket kan blott sägas, att under nämnda förhållanden har praseodymsulfat något ringare, lantansulfat något större ledningsförmåga än ytterbiumsulfat.

V. Sammanfattning.

Ytterbium har vid alla reaktioner, för hvilka i det föregående redogjorts, förhållit sig såsom ett typiskt trevärdigt element. Det ger många för treatomiga metaller särskildt utmärkande föreningar, bland hvilka må nämnas guldklorid-dubbelsaltet, det sura selenitet, kaliumdubbelferrocyanuren, kaliumdubbelkromatet, perjodatet $RJ\overset{III}{O}_3$ och det basiska karbonatet $\overset{III}{R}.OH:CO_3$. Neutrala ortosalter af trebasiska syror bildas lätt äfven i sur lösning (fosfatet). Med två mol. af tvåbasiska, organiska syror bildas sura salter (surt malonat, surt tartrat), där tre fjärdedelar af syrans jonväte ersatts af $\overset{III}{Yb}$, liksom i det sura selenitet.

Metallens nära släktskap med yttrium bevisas i främsta rummet af den karakteristiska beskaffenheten hos platocyanuren, som fullständigt liknar motsvarande yttriumsalt. Vattenhalten

¹⁾ MUTHMANN, Ber. 31 p. 1829.

²⁾ JONES och REESE, Amer. Ch. J. 20, p. 606.

är visserligen icke 21 mol. såsom hos yttrium- och erbiumplatocyanur enligt CLEVES uppgift, utan 18 mol., men detta förhållande torde ej få tillmätas någon betydelse sedan BENEDICKS uppvisat, att gadoliniumplatocyanur med en vattenhalt af 18 mol. förenar yttriumsaltets utseende och kristallform. Ytterbium bildar således med yttrium, erbium och gadolinium en genom platocyanuren karakteriserad naturlig grupp, och inom denna grupp företer ytterbium, så vidt man för närvarande kan döma, största likheten med erbium, särskildt med afseende på salternas sammansättning och sulfatets relativt stora löslighet.

Enligt BRAUNERS ¹⁾ åsikt skulle oxalatens löslighet i neutralt ammoniumoxalat bero på bildningen af komplexa salter och utgöra ett mått på metallernas basiska karakter, så, att de mest positiva ha de mest lösliga oxalaten. Om så förhåller sig, får ytterbium sin plats mycket långt ned, mellan de enligt BRAUNER minst positiva jordartmetallerna torium och yttrium samt långt efter t. ex. praseodym. Den elektrolytiska ledningsförmågan, med afseende på hvilken ytterbium väl åtminstone icke öfverträffas ²⁾ af praseodym, talar dock för ett motsatt förhållande. Dessutom förefaller det egendomligt att gadolinium, som i BRAUNERS kedja får sin plats mellan praseodym och neodym, skulle vara betydligt starkare positiv än yttrium och — i än högre grad — ytterbium, då gadolinium och ytterbium båda ge det basiska karbonatet ROHCO_3 under förhållanden, som hos yttrium leda till bildning af neutralt karbonat.

Emellertid kunna å andra sidan anföras flera tecken på jämförelsevis svag positiv karakter hos ytterbium. Först och främst nitrats lätta sönderdelning vid upphettning, hvarpå som bekant MARIIGNACS separationsmetod hvilat. Vidare har kloroplatinatet sammansättningen 2YbCl_3 , $\text{PtCl}_4 + n\text{H}_2\text{O}$ och afviker således från den vanliga typen RCl_3 , $\text{PtCl}_4 + n\text{H}_2\text{O}$ genom större halt af jordartklorid, i rak motsats till yttriumsaltet

¹⁾ Contr. to the Ch. of Thorium, Trans. of the ch. Soc. 1898, p. 972.

²⁾ En närmare uppgift kan ej lämnas, då temperaturen, vid hvilken JONES och RZESZ undersökt Pr_2SO_4 , icke är angifven.

4YbCl_3 , $5\text{PtCl}_4 + 21\text{H}_2\text{O}$. Måhända förtjänar äfven bildningen af oxisalter, sådana som det i det föregående beskrifna volframatet $(\text{YbO})_2\text{WO}_4$, att anföras i detta sammanhang samt slutligen ytterbiumoxidens i allmänhet jämförelsevis stora beständighet mot inverkan af syror.

Stockholm, september 1901.

Sur la hauteur de l'atmosphère homogène et la masse de l'atmosphère.

Par NILS EKHOLM.

[Communiqué le 11 Septembre 1901 par S. ARRHENIUS.]

On appelle habituellement *hauteur de l'atmosphère homogène* celle que l'atmosphère occuperait, si elle avait partout une même densité égale à la densité moyenne de l'air au niveau de la mer. Désignons cette hauteur par K .

D'autre part on appelle *hauteur réduite de l'atmosphère*, soit H , celle obtenue en multipliant la hauteur moyenne du baromètre à mercure par le rapport de la densité du mercure à la densité moyenne de l'air au niveau de la mer.

On voit aisément que ces deux hauteurs ne sont pas exactement égales, parce que H est calculé sous la supposition tacite que la gravité soit constante, tandis que K doit être calculé en considérant aussi la variation de la gravité avec la hauteur.

On ne peut pas calculer la valeur exacte de K , parce que, pour cela, il faudrait connaître la distribution de l'atmosphère autour du globe terrestre, ce qui n'est pas possible, la température des couches supérieures de l'atmosphère n'étant connue qu'imparfaitement. Mais on admit généralement que K ne diffère que peu de H .

Toutefois, M. MASCART ¹⁾ est arrivé à un résultat contraire. Il obtient (l. c. p. 98) »pour la masse totale de l'atmosphère,

¹⁾ MASCART, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Tome 114, Janv.—Juin 1892, p. 93, Paris 1892.

une valeur supérieure de $\frac{1}{8}$ de celle que fournit le procédé, et pour la densité de l'air à 64 km de hauteur trouve la valeur relativement énorme de 0,0013 de la densité à la surface terrestre.

Comme cette question est d'une certaine importance orologique, j'ai cru devoir examiner ce résultat, qui paraît très improbable a priori. Cet examen a fait voir que le résultat de M. MASCART est erroné, parce qu'il a admis la supposition que la pression atmosphérique diminue très rapidement vers le haut et soit nulle à une hauteur de 19 km et à toutes les hauteurs supérieures, et que néanmoins la densité de l'air à 19 km de hauteur soit encore 0,1387 de la densité à la surface terrestre et plus grande que celle déduite à l'aide de la formule barométrique ordinaire pour toutes les hauteurs au-dessus du niveau de la mer.

Voici un résumé de la déduction de M. MASCART.

Si l'on désigne par p la pression, g la gravité et ρ la densité de l'air à la hauteur h , on a

$$dp = - \rho g dh$$

En indiquant par l'indice 0 les termes relatifs à la surface terrestre en désignant par R le rayon de la terre et posant

$$p_0 = \rho_0 g_0 H$$

$$s = \frac{h}{R + h} = 1 - \frac{R}{R + h}$$

où la quantité H représente, comme plus haut, la hauteur de l'atmosphère, il en résulte

$$\frac{dp}{p_0} = - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{R}{H} \cdot \frac{R dh}{(R + h)^2} = - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{R}{H} ds$$

Si l'on pose, d'une manière générale,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = f(s),$$

la fonction $f(s)$ étant égale à l'unité pour $s = 0$, continuellement décroissante, et nulle pour $s = 1$, la masse d'air dM relative à la hauteur dh est

$$dM = 4\pi(R + h)^2 \rho dh = 4\pi R^2 \rho_0 \frac{f(s)}{(1-s)^4} ds \dots (5)$$

Désignant de plus par K , comme plus haut, la hauteur d'une couche homogène de densité ρ_0 et de même masse totale, on peut écrire

$$M = \frac{4}{3}\pi\{(R + K)^3 - R^3\}\rho_0 = 4\pi R^3 \rho_0 \frac{K}{R} \dots (6)$$

en négligeant les puissances supérieures de K . Il s'ensuit des équations (5) et (6)

$$\frac{K}{R} = \int_0^1 \frac{f(s) ds}{(1-s)^4} \dots (7)$$

Pour que la masse M soit limitée et que le rapport $\frac{K}{R}$ reste très petit, il serait donc nécessaire que le rapport $f(s)$ des densités renfermât $(1-s)^4$ en facteur.

M. MASCART pose donc

$$\frac{\rho}{\rho_0} = f(s) = (1-s)^4 e^{-\alpha s} \dots (8)$$

α étant une constante, qu'il faut déterminer à l'aide des observations.

L'équation (8) donne, d'après l'équation (7),

$$\frac{K}{R} = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha}) \dots (9)$$

ou sensiblement

$$\frac{K}{R} = \frac{1}{\alpha} \dots (10)$$

parce que α a une valeur comprise entre 600 et 800, comme nous le verrons.

M. MASCART procède à déterminer la valeur de α à l'aide des observations météorologiques faites sur les montagnes, et il

trouve par un calcul que je ne reproduirai pas ici, $\alpha = 660$ en moyenne. Or, comme pour la température de 10° ,

$$\frac{H}{R} = \frac{1}{770}$$

il obtient, à l'aide des équations (8) et (10) les résultats cités plus haut (p. 619 et 620).

M. MASCART n'a pas allé plus loin. Mais afin de vérifier ces résultats curieux il m'a paru indispensable de déduire aussi la formule barométrique à l'aide des équations (4) et (8). On obtient

$$p = p_0 \left\{ 1 - \frac{R}{H} \int_0^1 (1-s)^4 e^{-\alpha s} ds \right\} (11)$$

d'où par intégration

$$p = p_0 \left(1 - \frac{R}{H\alpha} \cdot S \right) (12)$$

où

$$S = 1 - (1-s)^4 e^{-\alpha s} - \frac{1 - (1-s)^3 e^{-\alpha s}}{\frac{1}{4}\alpha} + \frac{1 - (1-s)^2 e^{-\alpha s}}{\frac{1}{2}\alpha^2} - \frac{1 - (1-s) e^{-\alpha s}}{\frac{1}{4}\alpha^3} + \frac{1 - e^{-\alpha s}}{\frac{1}{4}\alpha^4} (13)$$

L'équation (12) jointe à (13) constitue la formule barométrique cherchée.

Pour le calcul numérique j'ai pris $R = 6\,367\,000$ m, $H = \frac{288 \times 7\,791}{273} = 8\,219$ m pour la température de 15° et, d'après M. MASCART, $\alpha = 660$. En introduisant ces valeurs, on obtient

$$p = p_0 (1 - 1,174S)$$

et

$$S = 1 - (1-s)^4 e^{-660s} - 0,00606 \{ 1 - (1-s)^3 e^{-660s} \} + \\ + 0,0000275 \{ 1 - (1-s)^2 e^{-660s} \} -$$

Voici quelques valeurs numériques calculées d'après ces deux formules et la formule (8), où l'on a pris p_0 et ϱ_0 pour unités.

Table 1.

h en km.	s	ϱ	S	p
0	0	1,00000	0,00000	+ 1,0000
5	0,0007847	0,59391	0,40364	+ 0,5251
10	0,0015681	0,35304	0,64306	+ 0,2440
18	0,0028191	0,15383	0,84106	+ 0,0116
19	0,0029753	0,13869	0,85611	— 0,0061
20	0,0031314	0,12503	0,86969	— 0,0220
30	0,0046897	0,04442	0,94982	— 0,1161
40	0,0062432	0,01583	0,97824	— 0,1495
50	0,0077918	0,00566	0,98834	— 0,1613
60	0,0093356	0,00203	0,99195	— 0,1655
70	0,0108746	0,00073	0,99324	— 0,1671.

On voit que le résultat absurde des pressions barométriques négatives est dû à ce que M. MASCART a attribué à α une valeur trop petite, et par conséquent au facteur $\frac{R}{H\alpha}$ en (12) une valeur trop grande. En effet, S ne diffère que très peu de l'unité pour les grandes valeurs de h et de s , et pour $h = \infty$ et par conséquent, d'après l'équation (3), $s = 1$, on obtient en vertu de (13)

$$S_{\infty} = 1 - \frac{4}{\alpha} + \frac{12}{\alpha^2} - \frac{24}{\alpha^3} + \frac{24}{\alpha^4}(1 - e^{-\alpha}). \quad (14)$$

Or, pour cette valeur de S , on doit avoir, d'après (12), $p = 0$, et par conséquent,

$$1 - \frac{R}{H\alpha} \cdot S_{\infty} = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{4}{\alpha^2} + \frac{12}{\alpha^3} - \frac{24}{\alpha^4} + \frac{24}{\alpha^5}(1 - e^{-\alpha}) = \frac{H}{R}. \quad (15)$$

La solution de l'équation (15) par rapport à α donnera la valeur cherchée de cette constante, qui convient à la formule barométrique de M. MASCART. On voit immédiatement qu'elle

ne peut différer que peu de $\frac{R}{H}$ et par conséquent, d'après la formule (10), que K ne diffère que peu de H , ce qui est contraire au résultat déduit par M. MASCART. La solution numérique exacte de l'équation (15) ne peut se faire que par tâtonnement, mais, avec le même degré d'approximation que pour la déduction de l'équation (7), on pourra négliger les trois derniers termes à gauche, et l'on obtient alors en employant les valeurs des constantes données plus haut, eu égard à l'équation (10)

$$\frac{K}{R} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{770,4} \dots \dots \dots (16)$$

$$\frac{H}{R} = \frac{1}{774,7} \dots \dots \dots (17)$$

donc

$$\frac{K}{H} = \frac{774,7}{770,4} = 1,0056 \dots \dots \dots (18)$$

Le tableau suivant contient quelques valeurs numériques de la densité et de la pression de l'air calculées d'après les formules (8), (12) et (13) en employant la valeur $\alpha = 770,4$.

Table 2.

h en km	ρ	S	p	T	t
0	1,00000	0,00000	1,0000	283°	10
5	0,54475	0,45290	0,5446	283	10
10	0,29690	0,69947	0,2967	283	10
18	0,11269	0,88272	0,1124	282	9
19	0,09986	0,89549	0,0995	282	9
20	0,08849	0,90680	0,0882	282	9
30	0,02647	0,96851	0,0212	280	7
40	0,00795	0,98693	0,00760	271	— 2
50	0,00240	0,99245	0,00205	248	— 25
60	0,00072	0,99412	0,00037	144	— 129
70	0,00022	0,99462	0,0000	(0)	(— 273)

Dans les deux dernières colonnes de la table 2 j'ai encore introduit la température absolue T et la température centigrade t de l'air calculées d'après les lois de MARIOTTE et de GAY-LUSSAC

$$T = \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \frac{p}{p_0} \cdot T_0 \dots \dots \dots (19)$$

Un coup d'œil sur ces colonnes fait voir que le résultat de M. MASCART est inadmissible aussi avec cette valeur de α . En effet, la température reste à peu près constante à partir du sol jusqu'à 30 km de hauteur pour se baisser ensuite rapidement vers le zéro absolu.

On pourrait supposer, avec M. MASCART (l. c. p. 99) que les lois de MARIOTTE et de GAY-LUSSAC ne fussent plus applicables aux régions supérieures de l'atmosphère. Mais certainement ces lois s'appliquent entre les limites $p = 1$ et $p = 0,09$, c'est-à-dire à partir du sol jusqu'à une hauteur de 20 km d'après la table 2, ce qui suffit à infirmer toute cette théorie.

Du reste il est bien probable par des raisons théoriques que les lois de MARIOTTE et de GAY-LUSSAC s'appliquent avec une grande approximation pour les gaz très rarifiés, du moins au dessus de la température critique.

Il y a quelques phénomènes qui se passent dans les couches supérieures de l'atmosphère et qu'on pourrait interpréter comme un indice d'une densité relativement grande de ces couches. M. MASCART cite ces phénomènes en faveur de sa théorie. C'est les nuages, dits lumineux, observés par M. JESSE. M. MASCART les considère comme des nuages véritables et fait remarquer que »la pression doit encore être notable dans ces régions pour que les cristaux de glace y soient maintenus en suspension. D'autre part, l'observation des poussières cosmiques, des bolides et surtout des aurores polaires, indique des altitudes (de l'atmosphère) supérieures à 200 km et même 500 km».

»D'après ce que l'on sait sur les décharges électriques, on est conduit à admettre que la densité des gaz n'est pas nulle à ces hauteurs et doit être de même ordre que celles qui restent

dans les tubes à gaz raréfiés, c'est-à-dire d'un millionième environ de la densité relative aux conditions normales.»

Or tous ces phénomènes peuvent aussi s'expliquer sans admettre une densité des couches supérieures de l'atmosphère incompatible avec les lois physiques des gaz.

Les nuages de M. JESSE probablement n'étaient pas composés de cristaux de glace mais d'une poussière aussi fine qu'elle pouvait flotter dans l'air extrêmement rarifié à 80 km de hauteur. La résistance de l'air à 150 ou 200 km de hauteur exercée contre les bolides s'explique par la vitesse cosmique de ceux-ci. Les aurores polaires probablement sont de la même nature que la couronne du soleil et les queues des comètes, qui consistent d'une matière lumineuse tellement rarifiée qu'elle ne présente aucune résistance appréciable contre les corps célestes malgré leurs vitesses cosmiques.¹⁾

Bien que le rapport $K:H = 1,0056$ que j'ai déduit des formules de M. MASCART indique que K et H soient sensiblement égaux, la valeur numérique ne mérite aucune confiance par les raisons données plus haut.

Pour avoir une valeur numérique probable de ce rapport on doit se tenir à la formule barométrique ordinaire, déduite en admettant les lois de MARIOTTE et de GAY-LUSSAC, et l'on doit introduire dans cette formule les températures des couches supérieures indiquées par les observations ou, faute d'observations, par des évaluations probables.

J'ai fait les suppositions suivantes. Pour la température au niveau de la mer j'ai pris $+ 15^{\circ}$ C., c'est-à-dire la température moyenne de l'air à cette niveau. Pour le décroissement de la température dans la verticale vers le haut j'ai pris $0^{\circ},40$ C. en 100 m à partir du sol jusqu'à 20 km, et $0^{\circ},15$ C. en 100 m au-dessus jusqu'à 70 km de hauteur, la plus grande hauteur qu'il fallait considérer.

¹⁾ Voir sur ce sujet: S. ARRHENIUS, Ueber die Ursache der Nordlichter dans le Öfversigt af Kongl. Vet. Ak. Förhandl. Årg. 57, 1900, N:o 5, p. 545.

Les observations récentes faites en France par M. TRISSE-RENC DE BORT et en Allemagne par Mm. ASSMANN, BERSON, SÜRING et d'autres ont donné un décroissement décidément plus rapide entre 0 et 10 km de hauteur que celui admis par moi. Aussi le décroissement pour les plus grandes hauteurs devrait être, selon l'opinion de M. VON BEZOLD et d'autres, plus fort que je l'ai admis. Il suit de là que le décroissement de l'intensité de la gravité aura probablement une moindre influence sur la valeur de K que d'après mon calcul, de sorte que cette valeur sera probablement un maximum.

La pression barométrique et la densité de l'air à différentes hauteurs se calculent d'après les deux formules suivantes:

$$\log \frac{p_2}{p_1} = \frac{a}{T_m} \cdot \frac{(h_1 - h_2) \{1 - \frac{1}{2}(h_1 + h_2)n\}}{C} \dots (20)$$

et

$$\rho_1 = 1,293 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{a}{T_1} \frac{p_1}{760} \dots (21)$$

où p_1 et p_2 désignent la pression barométrique ¹⁾ en deux points, dont les altitudes sont h_1 et h_2 mètres ($h_1 > h_2$), T_m la température absolue moyenne de la colonne d'air entre ces points, T_1 la température absolue et ρ_1 la densité de l'air en grammes par cm^3 dans le supérieur de ces points, et a , C , n des constantes, à savoir $a = 273^\circ$, $C = 18\,400$ m et $n = 3,14 \times 10^{-7}$. $C = \log_e 10 \times H = 2,302585 \times 7\,991,0$ désigne la constante barométrique, c'est-à-dire la hauteur réduite de l'atmosphère à la température de zéro centigrade multipliée par la valeur réciproque du module des logarithmes vulgaires, et $n = 2:R$ désigne le facteur de correction pour le décroissement de la gravité avec la hauteur; dans (21) p_1 est mesuré en mm de mercure.

Pour avoir la masse totale d'une colonne d'air d'un centimètre carré en section j'ai calculé, d'après les équations (20)

¹⁾ Il n'est guère besoin de remarquer que cette pression doit être mesurée dans une unité constante de sorte que, si l'unité est le millimètre d'une colonne de mercure, elle doit être réduite à la gravité normale.

et (21), p et q pour chaque kilomètre de 0 jusqu'à 70 km de hauteur, et ensuite j'ai fait l'addition des q par une intégration mécanique à l'aide de la formule connue de M. WEDDLE ¹⁾

$$\int_0^{6h} u_x dx = 0,3h\{u_0 + u_{2h} + u_{4h} + u_{6h} + 5(u_h + u_{5h}) + 6u_{3h}\}. \quad (22)$$

Le total ainsi calculé n'est autre chose que la masse en grammes de cette colonne, et l'on en déduit K en divisant ce total par la masse en grammes d'un centimètre cube d'air à pression et température ordinaire, p. ex. à 760 mm et zéro centigrade.

Pour vérifier le calcul j'ai aussi calculé la dite masse en omettant la correction de gravité, c'est-à-dire en supprimant le facteur $\{1 - \frac{1}{2}(h_1 + h_2)n\}$ dans la formule (20). Le total donne la masse en grammes de cette colonne de l'atmosphère réduite, et l'on en déduit H en divisant comme nous venons de le dire.

Finalement, pour avoir la masse totale de l'atmosphère, j'ai aussi tenu compte de l'agrandissement des surfaces sphériques à mesure qu'on s'écarte du sol, en multipliant par $1 + nh$ les valeurs de q obtenues par le premier calcul, avant de les ajouter. On obtient par ce calcul la masse d'air dans une couche d'un cm de haut d'un secteur sphérique, qui découpe un cm² de la surface de la mer. En faisant la somme de ces masses et la multipliant par la surface de la terre en cm², on aura la masse totale de l'atmosphère, sauf correction du relief des continents.

Le tableau suivant contient le résultat de ces calculs.

¹⁾ Math. Journ., Vol. IX, p. 79; G. BOOLE, A treatise on the Calculus of Finite Differences, Sec. Ed. London 1872, p. 47.

Table 8.

Pression, densité et masse de l'air à des altitudes différentes.

Altitude à en km	Température absolue T.	Sans correction de gravité				Avec correction de gravité				Masse d'air dans une couche d'un cm de haut d'un secteur sphérique qui découpe un cm ² de la surface de la mer	
		p en p ₀ .	p en mm de mercure.	ρ en ρ ₀ .	ρ · 10 ³ en $\frac{g}{cm^3}$.	p en p ₀ .	p en mm de mercure.	ρ en ρ ₀ .	ρ · 10 ³ en $\frac{g}{cm^3}$.	en ρ ₀ .	en centièmes de milligrammes.
0	288°	1,0000	760,0	1,0000	122,57	1,0000	760,0	1,0000	122,57	1,0000	122,57
1	284	0,8874	674,4	0,8998	110,29	0,8874	674,4	0,8998	110,29	0,9001	110,82
2	280	0,7862	597,5	0,8086	99,11	0,7862	597,5	0,8086	99,11	0,8091	99,17
3	276	0,6952	528,4	0,7255	88,92	0,6953	528,4	0,7256	88,94	0,7263	89,02
4	272	0,6138	466,5	0,6498	79,65	0,6140	466,6	0,6500	79,67	0,6508	79,77
5	268	0,5408	411,0	0,5811	71,23	0,5411	411,2	0,5815	71,27	0,5824	71,88
6	264	0,4756	361,5	0,5190	63,61	0,4760	361,8	0,5193	63,65	0,5203	63,77
7	260	0,4174	317,2	0,4625	56,69	0,4178	317,5	0,4628	56,72	0,4637	56,84
8	256	0,3657	277,9	0,4114	50,48	0,3662	278,3	0,4120	50,50	0,4131	50,68
9	252	0,3197	243,0	0,3653	44,78	0,3202	243,4	0,3660	44,86	0,3671	44,99
10	248	0,2789	212,0	0,3239	39,70	0,2795	212,4	0,3245	39,78	0,3255	39,90
11	244	0,2427	184,5	0,2863	35,09	0,2433	184,9	0,2872	35,20	0,2882	35,32
12	240	0,2108	160,2	0,2528	30,99	0,2113	160,6	0,2536	31,08	0,2545	31,20
13	236	0,1826	138,8	0,2227	27,30	0,1832	139,2	0,2235	27,40	0,2244	27,51
14	232	0,1578	119,9	0,1958	24,00	0,1584	120,4	0,1966	24,10	0,1975	24,21
15	228	0,1360	103,4	0,1718	21,06	0,1367	103,9	0,1726	21,15	0,1734	21,25
16	224	0,1169	88,8	0,1503	18,42	0,1176	89,4	0,1511	18,52	0,1518	18,61
17	220	0,1002	76,2	0,1312	16,08	0,1009	76,7	0,1320	16,18	0,1327	16,27
18	216	0,0867	65,1	0,1142	14,00	0,0863	65,6	0,1150	14,10	0,1157	14,18
19	212	0,0730	55,5	0,0992	12,16	0,0737	56,0	0,1001	12,27	0,1007	12,34
20	208	0,0621	47,2	0,0859	10,53	0,0627	47,7	0,0867	10,63	0,0873	10,70
21	206,5	0,0526	40,0	0,0735	9,01	0,0532	40,4	0,0742	9,09	0,0747	9,16
22	205	0,0446	33,9	0,0627	7,68	0,0451	34,3	0,0633	7,76	0,0637	7,81
23	203,5	0,0377	28,7	0,0534	6,54	0,0382	29,0	0,0541	6,63	0,0545	6,68
24	202	0,0319	24,2	0,0454	5,57	0,0323	24,5	0,0461	5,65	0,0464	5,69
25	200,5	0,0269	20,4	0,0387	4,74	0,0273	20,7	0,0393	4,82	0,0397	4,86

Al- ti- tude h en km	Tem- pé- ra- ture $ab-$ solue T .	Sans correction de gravité				Avec correction de gravité			
		p en p_0 .	p en mm de mercure.	ϱ en ϱ_0 .	$\varrho \cdot 10^3$ en $\frac{g}{cm^3}$.	p en p_0 .	p en mm de mercure.	ϱ en ϱ_0 .	ϱ en ϱ_0 .
26	199°	0,0227	17,3	0,0329	4,03	0,0231	17,6	0,0334	
27	197,5	0,0191	14,5	0,0278	3,41	0,0194	14,7	0,0284	
28	196	0,0161	12,2	0,0236	2,89	0,0164	12,5	0,0241	
29	194,5	0,0135	10,3	0,0200	2,45	0,0137	10,4	0,0204	
30	193	0,0113	8,6	0,0169	2,07	0,0116	8,8	0,0172	
31	191,5	0,0095	7,2	0,0142	1,74	0,0097	7,4	0,0146	
32	190	0,0079	6,0	0,0120	1,47	0,0081	6,2	0,0123	
33	188,5	0,0066	5,0	0,0101	1,24	0,0068	5,2	0,0104	
34	187	0,0055	4,2	0,0085	1,04	0,0057	4,3	0,0087	
35	185,5	0,0046	3,5	0,0071	0,87	0,0047	3,6	0,0073	
36	184	0,0038	2,9	0,0060	0,74	0,0039	3,0	0,0062	
37	182,5	0,0032	2,4	0,0050	0,61	0,0033	2,5	0,0051	
38	181	0,0026	2,0	0,0042	0,51	0,0027	2,1	0,0043	
39	179,5	0,0022	1,7	0,0034	0,42	0,0023	1,7	0,0036	
40	178	0,0018	1,4	0,0029	0,35	0,0019	1,4	0,0030	
41	176,5	0,0015	1,1	0,0024	0,30	0,0015	1,1	0,0025	
42	175	0,0012	0,9	0,0020	0,25	0,0013	1,0	0,0021	
44	172	$10^{-4} \times 8,2$	$10^{-1} \times 6,2$	0,0014	0,17	$10^{-4} \times 8,6$	$10^{-1} \times 6,5$	0,0015	
46	169	$10^{-4} \times 5,5$	$10^{-1} \times 4,2$	0,0009	0,11	$10^{-4} \times 5,8$	$10^{-1} \times 4,4$	0,0010	
48	166	$10^{-4} \times 3,7$	$10^{-1} \times 2,8$	0,0007	0,08	$10^{-4} \times 3,9$	$10^{-1} \times 3,0$	0,0007	
50	163	$10^{-4} \times 2,4$	$10^{-1} \times 1,8$	0,0004	0,05	$10^{-4} \times 2,6$	$10^{-1} \times 2,0$	0,0005	
60	148	$10^{-5} \times 2,7$	$10^{-2} \times 2,1$	0,0001	0,01	$10^{-5} \times 3,0$	$10^{-2} \times 2,3$	0,0001	
70	133	$10^{-6} \times 2,3$	$10^{-2} \times 1,7$	0,0000	0,00	$10^{-6} \times 2,7$	$10^{-2} \times 2,1$	0,0000	

En faisant l'addition des 6^{ième}, 10^{ième} et 12^{ième}
à l'aide de la formule (22) on obtient 1033,37, 10
1036,78 grammes. La masse d'un cm^3 d'air à 76

à zéro étant 0,001293, il vient par division $H = 7\,992$, $K = 8\,011$ et

$$\frac{K}{H} = \frac{1035,86}{1033,37} = \frac{8\,011}{7\,992} = 1,0024.$$

On voit que l'excès de K sur H n'est que de 0,24 p. C., ce qui est du reste un maximum d'après ce qui vient d'être dit.

De plus l'effet de l'agrandissement des surfaces sphériques à mesure qu'on s'écarte du sol n'est que très faible, car on a

$$\frac{1036,78}{1033,37} = 1,0033 \text{ et } \frac{1036,78}{1035,86} = 1,0009.$$

L'altitude moyenne des continents peut être évaluée à 500 mètres, et leur surface à 136 millions de km² ou 0,267 de la surface de la terre. Pour avoir la masse totale de l'atmosphère il faut donc retrancher $0,267 \times 59,7 = 16,0$ du nombre 1036,78 et multiplier la différence par 510×10^{16} , qui est l'aire de la surface de la terre en cm². De cette manière on obtient pour la masse totale de l'atmosphère

$$521 \times 10^{18} \text{ tonnes.}$$

La masse totale du globe terrestre étant de

$$609 \times 10^{19} \text{ tonnes,}$$

il s'ensuit que la masse de l'atmosphère est de 0,000 000 856 de celle de la terre entière.

Si l'on fait le calcul avec la valeur H , c'est-à-dire sans considérer le décroissement de la gravité et l'agrandissement des surfaces sphériques vers le haut, on obtient pour la masse de l'atmosphère 519×10^{18} tonnes ou 0,000 000 852 de celle de la terre, donc sensiblement le même résultat.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 572.)

Helsingfors. *Société Finno-Ougrienne.*

Journal. 19. 1901. 8:o.

Mémoires. 16: 1. 1901. 8:o.

— *Finlands geologiska undersökning.*

Kartbl. 1: 200,000. N:o 36—37 med beskrifning. Fol. & 8:o.

— *Universitets-biblioteket.*

Akademiskt tryck. 1900/1901. 25 st. 8:o & 4:o.

— *Finska vetenskaps-societeten.*

Acta. T. 26—27. 1900. 4:o.

Hobart. *Meteorological department.*

Report of the government meteorologist. Year 1899. Fol.

Innsbruck. *Meteorologisches Observatorium der Universität.*

Beobachtungen. Jahr 1899. 8:o.

Jena. *Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd 35: H. 4; 36: 1—2.
1901. 8:o.**Karlsruhe.** *Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie im
Grossherzogthum Baden.*

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Jahr 1900. 4:o.

— *Grossh. technische Hochschule.*

Dissertationen etc. 1900/01. 4 st. 8:o & 4:o.

— *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Verhandlungen. Bd 14 (1900/1901). 8:o.

Kassel. *Verein für Naturkunde.*

Abhandlungen und Bericht. 46 (1900/01). 8:o.

Kasan. *Observatoire magnétique de l'université imp.*

Observations. Année 1894—1897. 8:o.

— *Kejsarl. universitetet.*

Učenyija Zapiski. 68 (1901): 3—6. 8:o.

Akademiskt tryck. 1900/1901. 5 st. 8:o.

Kew. *Royal botanic gardens.*Bulletin of miscellaneous information 1899: Nos. 155—156; 1901:
Append. 3. 8:o.**Kharkow.** *Université Impériale.*

Annales. 1901: Kn. 2—3. 8:o.

Kiel. *Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen
Meere und biologische Anstalt auf Helgoland.*Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. 4: H. 2; 5: 2.
1900—1901. 4:o.— *Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein.*

Schriften. Bd 12: H. 1. 1901. 8:o.

Kiew. *Observatoire météorologique de l'université.*Svěděníja o sostojanii sveklovičnych plantacij v svjazis pogodoj. 1898:
4—12. 8:o.— *Société des naturalistes.*

Mémoires. T. 16: 2. 1900. 8:o.

(Forts. & sid. 648.)

Continuité et discontinuité des dérivées du potentiel.

Par HENRIK PETRINI.

[Communiqué le 11 Septembre 1901 par E. PHRAGMÉN.]

§ 1. Les considérations suivantes ont recours à mes mémoires de même sujet publiées dans l'Öfversigt af K. V. A:s Förh. et qui ont les titres

a) Démonstration générale de l'équation de POISSON $\Delta V = -4\pi q$ en ne supposant que q soit continue;

b) Allgemeine Existenzbedingungen für die zweiten Differentialquotienten des Potentials,

dont j'ai une note insérée dans les Comptes Rendus de la Soc. d. Sc. à Paris en 1900 sous le titre:

c) Conditions de l'existence de la dérivée seconde du potentiel;

d) Les valeurs limites des dérivées premières du potentiel d'une couche;

e) Sur les dérivées secondes du potentiel d'une couche.

Je veux les citer sous les numéros a) . . . e).

En nous nous mettant dans les conditions des mémoires citées et en employant les mêmes significations nous poserons

$$(1) \quad V = \int q \frac{d\tau}{r}, \quad q \text{ continue dans tout l'espace } \tau.$$

Si nous formerons le symbole Δ de la manière de a) nous voyons

(a) que ΔV est $= -4\pi q$ si q est continue et par suite Δ elle-

même est continue. Quant à la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ nous avons trouvé (b)) pour le cas où ϱ est continue

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} W_h - \frac{4}{3} \pi \sigma \varrho \\ W_h = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi (1 - 3 \sin^2 \vartheta) d\vartheta \int_h^a \varrho \frac{dr}{r}. \end{cases}$$

La dérivée est continue si la fonction $W \equiv \lim_{h \rightarrow 0} W_h$ est continue.

C'est ce qui a lieu dans tous les cas spéciaux cités $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$, $\epsilon)$, $\zeta)$ où l'existence de W est démontrée, de manière que si un de ces cas est remplis le long d'un élément de courbe la dérivée est continue. En effet, dans les cas $\alpha)$, $\beta)$, $\delta)$ (p. 229) W est $= 0$. Dans le cas $\delta)$ on verra aussi d'un coup d'oeil que W est continue. Si dans le cas $\epsilon)$ nous supposons $\varrho > 0$, il faut que $\lim_{r=0} \varrho = 0$ et qu'on pourra écrire

$$\varrho = \varphi(r) \varrho_1 \quad \lim_{r=0} \varrho_1 \text{ finie et}$$

$$\int_0^a \varphi(r) \frac{dr}{r} \text{ finie}$$

$$\therefore \bar{I} = \varrho'_1 (\Phi(a) - \Phi(0)), \quad \Phi'(r) \equiv \frac{\varphi(r)}{r},$$

ϱ'_1 étant une valeur moyenne, et $\lim_{a \rightarrow 0} \Phi(a) = \Phi(0)$. Par suite

\bar{I} pourra être rendue si petite qu'on le voudra en prenant a assez petite. Par suite W est continue, car la partie d'elle qui a recours aux masses extérieures a une dérivée seconde continue dans le point considéré. Les mêmes considérations pourrons se faire dans le dernier cas, où ϱ admet une dérivée finie, si nous observerons que les dérivées premières d'un potentiel sont toujours continues.

§ 2. Nous voudrions maintenant nous placer à un point de vue un peu plus général.

Soit $\varphi(r)$ une fonction continue de r : $\varphi_0 \equiv \lim_{r=0} \varphi(r) = W_0$ est une quantité finie et déterminée et la fonction $\varphi(r) - \varphi_0 = \bar{\varphi}(r)$ est une fonction telle que $\lim_{r=0} \bar{\varphi}(r) = 0$. Il peut arriver qu'on pourra trouver une fonction $\lambda_1(r)$ telle que $\varphi_1 \equiv \lim_{r=0} \frac{\bar{\varphi}(r)}{\lambda_1(r)}$ est une quantité finie et déterminée : $\bar{\varphi}(r) = \lambda_1(r) (\varphi_1 + \bar{\bar{\varphi}}(r))$, où $\lim_{r=0} \bar{\bar{\varphi}} = 0$.

$$\therefore \varphi(r) = \varphi_0 + \lambda_1(r) \varphi_1 + \lambda_1(r) \bar{\bar{\varphi}}(r).$$

Il peut arriver que l'on pourra continuer de cette manière jusqu'à un certain point et écrire

$$(3) \quad \varphi(r) = \varphi_0 + \lambda_1(r) \varphi_1 + \lambda_1(r) \lambda_2(r) \varphi_2 + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n [\varphi_n + \bar{\varphi}(r)],$$

$$\lim_{r=0} \bar{\varphi} = 0, \quad \lim_{r=0} \lambda_\nu = 0, \quad \varphi_\nu \neq 0 \text{ et finie}$$

de manière que l'intégrale

$$\int_0^a \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m \frac{dr}{r}$$

soit finie pour $m = n$ mais infinie pour $m < n$.

Supposons maintenant que la fonction ϱ pourra s'exprimer de la manière suivante

$$(4) \quad \varrho(r \vartheta \psi) = \varrho_0(\vartheta \psi) + \mu_1(r) \varrho_1(\vartheta \psi) + \mu_2(r) \varrho_2(\vartheta \mu) + \dots$$

$$+ \mu_n(r) (\varrho_n(\vartheta \psi) + \bar{\varrho}), \quad \varrho_\nu \neq 0 \text{ et finie, } \lim_{r=0} \bar{\varrho} = 0, \quad \lim_{r=0} \frac{\mu_{\nu+1}}{\mu_\nu} = 0,$$

où l'intégrale

$$\int_0^a \mu_m \frac{dr}{r}$$

est infinie pour $m < n$ et finie pour $m = n$. Mais nous avons supposé

$$\lim W_h = \text{finie}$$

d'où il suit

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi (1 - 3 \cos^2 \vartheta) \varrho_r d\vartheta = 0, \quad \nu < n.$$

Posons

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi (1 - 3 \cos^2 \vartheta) (\varrho_r + \bar{\varrho}) d\vartheta = P(r),$$

$$\therefore W = \int_0^a P(r) \mu_n(r) \frac{dr}{r}.$$

Supposons en outre $\mu_n > 0$, pour $0 < r < a$, et $\lim_{r \rightarrow 0} P(r) \neq 0$

$$\therefore W = P_m \cdot (K(a) - K(0)),$$

P_m une valeur moyenne de P et $\lim_{a \rightarrow 0} K(a) = K(0)$, $K(r) \equiv \int_0^r \mu_n \frac{dr}{r}$.

D'où il suit que si a est assez petite W est continue. Dans l'intérieur de la masse on pourra donc considérer une sphère de rayon assez petit a pour que W soit $<$ une quantité σ donnée à priori. Dans l'intérieur de cette sphère la dérivée est donc continue autour du centre. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. Si ϱ remplit une des conditions $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$, $\epsilon)$, $\zeta)$ ou si elle peut être développée de la manière (4), autour de chaque point d'un élément de courbe le long de laquelle la dérivée $\frac{\partial_1 V}{\partial x^2}$ existe, cette dérivée est continue le long de cette courbe.

§ 3. La question sur la continuité et la discontinuité des dérivées secondes dans la surface de séparation de deux corps homogènes de différentes densités présente beaucoup d'intérêt.

Si ϱ_1 et ϱ_2 sont les deux densités nous avons trouvée (b) p. 234) dans le cas, où la surface de séparation est plane,

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial n_1^2} = 4\pi\varrho_1 + \frac{8}{3}\pi\varrho' \\ \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = -\frac{4}{3}\pi\varrho', \quad \varrho' = \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2) \end{cases} \quad (2)$$

dn_1 étant l'élément de la normale dirigée vers l'intérieur du corps de densité ϱ_1 et ds l'élément d'une courbe dans la surface.

Si nous plaçons les axes des y et des z dans la surface de séparation et l'axe des x dirigée vers l'intérieur du corps de densité ϱ_1 nous aurons selon (5)

$$\Delta V = -4\pi\varrho_1.$$

Afin d'obtenir les valeurs des dérivées prises dans des directions obliques nous tirons une ligne dans le plan des xy qui fait avec l'axe des x un angle ω . La quantité u étant le cosinus entre cette direction et la direction du rayon recteur

$$\therefore u = \cos \omega \cos \vartheta + \sin \omega \sin \vartheta \cos \psi.$$

Nous avons

$$W_h = \int_{(\Omega)} (1 - 3\omega^2) d\omega \int_h^a \varrho \frac{dr}{r},$$

$d\omega$ étant l'élément de sphère d'unité et Ω sa surface.

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \therefore W_h = (\varrho_1 A + \varrho_2 B) \int_h^a \frac{dr}{r} \\ A = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 3u^2) \sin \vartheta d\vartheta = 0 \\ B = 0 \\ \therefore W_h = 0. \end{array} \right.$$

Dans cette direction ds nous avons donc (b) p. 229 I)

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = - \int_{\Omega} \varrho_0 q(u) du \\ q(u) = 5u^2 + 3u - 1 - (1 - 3u^2) \log \frac{1-u}{2} \\ \therefore \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = - \varrho_1 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(u) \sin \vartheta d\vartheta - \\ \quad - \varrho_2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} q(u) \sin \vartheta d\vartheta \\ u = \cos \omega \cos \vartheta + \sin \omega \sin \vartheta \cos \psi. \end{array} \right.$$

d'où l'on tire

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \Phi(\vartheta) &\equiv - \int \varphi(u) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{5}{8} \alpha^2 \cos \vartheta - \frac{5}{8} u \cos \omega - \cos \vartheta + \\ &+ \frac{4}{3} u^2 \cos \vartheta - 2 \sin^3 \omega \cos \psi \sin^2 \psi \int \frac{d\vartheta}{1-u} + \\ &+ [-2u \cos \omega + 2\alpha^2 \cos \vartheta + u^2 \cos \vartheta - \cos \vartheta] \log \frac{1-u}{2}. \end{aligned} \right.$$

$$(9) \left\{ \begin{aligned} \therefore \Phi(\pi) &= -\frac{5}{8} \sin^2 \omega \cos^2 \psi + 1 + \cos \omega - \frac{4}{3} \cos^2 \omega - \\ &- 2 \sin^3 \omega \cos \psi \sin^2 \psi \int \frac{d\vartheta}{1-u} - \\ &- \sin^2 \omega \cos 2\psi \log \frac{1 + \cos \omega}{2}. \\ \Phi(0) &= \frac{5}{8} \sin^2 \omega \cos^2 \psi - 1 + \cos \omega + \frac{4}{3} \cos^2 \omega - \\ &- 2 \sin^3 \omega \cos \psi \sin^2 \psi \int \frac{d\vartheta}{1-u} + \\ &+ \sin^2 \omega \cos 2\psi \log \frac{1 - \cos \omega}{2}. \\ \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{5}{8} \sin \omega \cos \omega \cos \psi - \\ &- 2 \sin^3 \omega \cos \psi \sin^2 \psi \int \frac{d\vartheta}{1-u} - \\ &- 2 \sin \omega \cos \omega \cos \psi \log \frac{1 - \sin \omega \cos \psi}{2}. \end{aligned} \right.$$

$$\int_0^{2\pi} \Phi(\pi) d\psi = 2\pi \left(\frac{1}{8} + \cos \omega - \frac{1}{2} \cos^2 \omega \right) - I(\pi).$$

$$\int_0^{2\pi} \Phi(0) d\psi = 2\pi \left(-\frac{1}{8} + \cos \omega + \frac{1}{2} \cos^2 \omega \right) - I(0).$$

$$\int_0^{2\pi} \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) d\psi = -I\left(\frac{\pi}{2}\right) - J.$$

$$I(\vartheta) = 2 \sin^3 \omega \int d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{\cos \psi \sin^2 \psi d\psi}{1-u},$$

$$u = \cos \vartheta \cos \omega + \sin \vartheta \sin \omega \cos \psi.$$

$$J = 2 \sin \omega \cos \omega \int_0^{2\pi} \cos \psi \log(1 - \sin \omega \cos \psi) d\psi,$$

$$= 4\pi \cos^2 \omega - 4\pi \cos \omega.$$

$$2 \sin^3 \omega \int_0^{2\pi} \frac{\cos \psi \sin^2 \psi}{1-u} d\psi =$$

$$= \frac{2\pi}{\sin^3 \vartheta} (2[1 - \cos \vartheta \cos \omega]^2 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \omega) -$$

$$- 2 \left(\frac{1 - \cos \vartheta \cos \omega}{\sin^3 \vartheta} \right) (1 - \cos \vartheta \cos \omega)^2 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \omega \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1-u}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1-u} = \frac{2\pi}{|\cos \vartheta - \cos \omega|},$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \therefore 2 \sin^3 \omega \int_0^{2\pi} \frac{\cos \psi \sin^2 \psi}{1-u} d\psi = \\ & = \frac{2\pi}{\sin^3 \vartheta} [2(\cos \vartheta - \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega \sin^2 \vartheta] - \\ & - \frac{4\pi}{\sin^3 \vartheta} (1 - \cos \vartheta \cos \omega) |\cos \vartheta - \cos \omega|. \end{aligned} \right.$$

Supposons

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$$

$$\therefore \cos \vartheta - \cos \omega < 0,$$

$$(11) \quad \therefore I(\vartheta) = -2\pi(1 - \cos \omega)^2 \frac{(1 + \cos \vartheta)}{\sin^2 \vartheta} + \text{const.}$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \left[\Phi(\pi) - \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] d\psi = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cos^2 \omega,$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} &= -q_1 \int_{(\Omega)} \varphi(u) d\vartheta - (q_2 - q_1) \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(u) \sin \vartheta d\vartheta \\
 &= -\frac{1}{3} \pi q_1 - \frac{2\pi}{3} (1 - 3 \cos^2 \omega) (q_2 - q_1) \\
 (12) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} &= -\frac{2\pi}{3} (q_1 + q_2) + 2\pi (q_2 - q_1) \cos^2 \omega.
 \end{aligned}$$

Conséquence. Si par l'origine on place un système d'axes de coordonnées, ces axes pourront se trouver ou toutes les trois sur un même côté du plan de séparation, posito dans la région des q_1 , ou deux dans cette région et une dans l'autre. Si cette dernière axe fait l'angle ω avec la normale on trouve dans le premier cas $\Delta V = -4\pi q_1$ et dans le second

$$(13) \quad \Delta V = -4\pi [q_1 \sin^2 \omega + q_2 \cos^2 \omega].$$

Remarque. Si la surface de séparation avait un point conique, la dérivée selon l'axe du cône en ce point n'existe pas. En effet on aura

$$\begin{aligned}
 \int (1 - 3u^2) du &= u - u^3 \\
 \therefore W_h &= 2\pi \log \frac{a}{h} \cos \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_1 (q_1 - q_2).
 \end{aligned}$$

Le même résultat s'obtiendra pour une direction quelconque.

§ 4. *Dérivées premières d'une couche simple.* Considérons maintenant une partie plane d'une couche simple. On pourra distinguer beaucoup de questions de continuité ou discontinuité de la dérivée du potentiel, savoir

1:0 La dérivée dans un point de la surface est elle continue quand le point se meut dans la surface?

2:0 La dérivée du même point est elle continue quand on change la direction de dérivation?

3:0 La dérivée dans un point extérieur s'approche-t-elle indéfiniment la dérivée du point de la surface à qui le point extérieur s'approche indéfiniment?

4:0 La dérivée dans une point extérieur est elle continue quand le point traverse la surface?

Nous avons trouvé (c) p. 869—870) les formules suivantes

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial h} = W + L, \\ W_h = \int_0^{2\pi} u d\vartheta \int_h^a \frac{\sigma dr}{r}, \\ L = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{ 1 + u + u \log \frac{1-u}{2} \right\}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} W = \lim_{h=0} W_h \\ u = \cos(\vartheta - \omega), \\ \sigma_0 = \lim_{r=0} \sigma, \end{array}$$

V étant le potentiel dans un point de la surface, dh l'élément d'une droite située tout entière dans la même surface et passant par ce point, σ la densité.

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial h} = - \int_0^{2\pi} \sigma_0 d\vartheta + \cos \varphi W - \cos \psi M, \\ W_h = \int_0^{2\pi} \cos(\vartheta - \omega) d\vartheta \int_h^a \sigma \frac{dr}{r} \\ M = \int_0^{2\pi} \sigma_0 \cos(\vartheta - \omega) \left\{ 1 + \log \frac{1-u}{2} \right\} d\vartheta, \\ u = \cos(\vartheta - \omega) \cdot \cos \psi, \end{array} \right. \quad W = \lim_{h=0} W_h$$

où ψ est l'angle que fait dh avec la surface.

1:o Si le point se meut dans la surface la dérivée $\frac{\partial V}{\partial h}$ est continue si σ est continue et si elle peut être représentée de la manière (3).

2:o Si σ est continue ou aura

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial h} = W \text{ dans la surface et} \\ \frac{\partial V}{\partial h} = -2\pi\sigma \sin \psi + W \cos \psi \text{ dans une direction quelconque.} \end{array} \right.$$

La dérivée est donc une fonction continue de la direction (ψ et ω) dans ce cas mais pas généralement. Dans ce cas la dérivée dans une direction est la somme des dérivées prises par rapport

à deux, resp. trois, axes rectangulaires. Dans le second cas la dérivée est symétrique par rapport au plan. Les dérivées dans le plan et perpendiculairement au plan sont respectivement W et $-2\pi\sigma$.

3:0 Quant à la limite de la dérivée extérieure prise dans une direction quelconque nous avons trouvé (c) p 874) qu'elle est, dans le cas général, la projection de trois dérivées prises parallèlement à trois axes, et dépend du chemin le long duquel on s'approche de la surface. Si σ est continue nous retrouverons identiquement les mêmes résultats que du No 2:0. Si σ est continue la dérivée considérée est donc complètement continue dans les sens 2:0 et 3:0.

4:0 Si σ est continue les dérivées varient continuellement quand les directions varient continuellement mais émanent du point fixe de la surface. Si l'on traverse la surface, la direction se change brusquement en la direction opposée et par suite la dérivée pourra changer brusquement de valeur. Pour les dérivées dans la surface ou trouvera pour la somme des dérivées dans des directions opposées

$$\frac{\partial V}{\partial h_1} + \frac{\partial V}{\partial h_2} = -4\pi\sigma \sin \psi$$

d'après (16), parce que W se change en $-W$, ω étant augmenté de π .

Si σ n'est pas continue on trouvera

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial h_1} + \frac{\partial V}{\partial h_2} = -2 \int_0^{2\pi} \sigma_0 d\delta - \cos \psi M' \\ M' = \int_0^{2\pi} \sigma_0 \cos(\vartheta - \omega) \log \frac{1-u}{1+u} d\vartheta, \\ u = \cos(\vartheta - \omega) \cos \psi. \end{array} \right.$$

Si l'on se meut suivant une ligne et cherche la limite des dérivées on trouve que la somme des limites des dérivées est $= 0$ lorsque la dérivée est prise parallèlement à la surface mais

$= -4\pi\sigma$ si elles sont prises normalement. Pour les dérivées obliques ont aura donc

$$\lim \frac{\partial V}{\partial h_1} + \lim \frac{\partial V}{\partial h_2} = -4\pi\sigma \sin \psi$$

et cette limite est indépendant du chemin, s'il ne touche pas le plan (pp. 874—5). Si σ n'est pas continue les limites des dérivées du potentiel dépendant de la direction de la tangente à la courbe suivant laquelle on se meut. Les formules sont très compliquées (équ. (9) p. 875). Pour les dérivées normales on trouvera si l'on se meut suivant la normale elle-même

$$(20) \quad \lim \frac{\partial V}{\partial h_1} + \lim \frac{\partial V}{\partial h_2} = -2 \int_0^{2\pi} \sigma_0 d\vartheta.$$

Exemple. Si l'on considère un point sur la ligne de séparation de deux couches homogènes de densités σ_1 et σ_2 on trouvera, en se mouvant toujours dans le plan normal passant par la ligne de séparation [p. 880 équ. (17) et (18)]

$$(21) \quad \lim \frac{\partial V}{\partial h_1} + \lim \frac{\partial V}{\partial h_2} = -2\pi(\sigma_1 + \sigma_2) \sin \psi$$

ψ étant la direction de la dérivée. Le même résultat s'obtient pour la dérivée dans la surface.

Remarque. Pour le cas d'une couche qui n'est pas plan on trouvera les mêmes résultats que précédemment pour les points, où la surface admet un plan tangent ($\lim \psi = 0$ dans toutes les directions), si σ est continue (pag. 892). Mais ici il faut que W soit infiniment petit en même temps que a , parce que $W(\omega)$ n'est pas en général $= W(\omega + \pi)$, si la surface n'est pas symétrique par rapport à la projection de la ligne suivant laquelle on se meut, c. a. d. que $\psi(\omega) = \psi(\omega + \pi)$ (cfr. équ. (8) p. 888). Pour la limite de la dérivée normale, en se mouvant suivant la normale, on retrouvera la formule (20) dans le cas général par rapport à σ .

§ 5. *Dérivées secondes du potentiel d'une couche.* Les limites des quantités $We(e)$ sont continues sous les mêmes conditions que les quantités analogues pour les dérivées secondes du potentiel d'une masse à trois dimensions. $A'e$ est continue si σ_1 est continue. Quant à $\frac{1}{\varrho} A'e = \frac{1}{\varrho} A_1^e + \frac{1}{\varrho} A_2^e$, on trouve que $\lim \frac{1}{\varrho} A_1^e$ est continue, si $\psi_0 = 0$, et que $\lim \frac{1}{\varrho} A_2^e$ est continue si ψ_1 est continue.

Le changement brusque, qu'éprouvent ces dérivées en tranchant la surface, s'obtient si l'on effectue les intégrations. Quoique les résultats ainsi obtenus sont assez généraux — p. e. on ne suppose pas l'existence d'un plan tangent qu'au point considéré — les formules deviendront trop compliquées. Nous nous bornerons ici aux considérations suivantes.

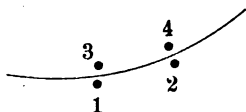
Supposons que la surface soit analytique et quelle pourra se représenter aux infiniments petits près d'ordre supérieur par l'équation

$$(22) \quad z = \frac{1}{2} r_1 x^2 + s_1 xy + \frac{1}{2} t_1 y^2$$

r_1, s_1, t_1 étant des constantes. La normale au point xyz fait avec les axes des angles dont les cosinus directeurs sont

$$(23) \quad \begin{cases} \alpha = r_1 x + s_1 y \\ \beta = s_1 x + t_1 y \\ \gamma = 1. \end{cases}$$

Si σ_1 est continue et si les quantités W le sont aussi, les limites des dérivées secondes sont continues et indépendantes de la direction dans laquelle on s'approche de la surface. Le même a lieu pour les densités des dérivées premières.



Prenons deux points 1 et 2 infiniment près de la surface et sur le même côté d'elle.

Soit δs leur distance. Prenons les points

3 et 4 sur l'autre côté de la surface et infiniment près de 1 et 2 resp. Soit u_1, u_2, u_3, u_4 les valeurs d'une fonction u dans

ces points resp. et soit u ainsi que sa dérivée première suivant ds finie et continue.

Posons

$$v ds = u_4 - u_3 - (u_2 - u_1) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_{3m} - \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_{1m} \right] ds$$

$\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_{3m}$ étant une valeur moyenne de $\frac{\partial u}{\partial s}$ pour les points de 3 à 4.

Cette dérivée est supposée continue,

$\therefore \lim_{ds \rightarrow 0} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_{3m} = \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_3$. Des considérations analogues se rapportent

à $\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_{1m}$

$$(24) \quad \therefore \lim_{ds \rightarrow 0} v = \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_3 - \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_1$$

où $\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_3$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_1$ sont les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial s}$ dans les points 3 et

1 resp.

De même on aura

$$v ds = u_4 - u_2 - (u_3 - u_1).$$

Posons

$$u_4 - u_2 = w_2$$

on aura, si $\frac{\partial w}{\partial s}$ est continue,

$$\lim_{ds \rightarrow 0} v = \lim_{ds \rightarrow 0} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right),$$

$$(25) \quad \therefore \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_3 - \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_1 = \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_1.$$

Soient $u = \frac{\partial V}{\partial x}$ et $ds = dx$

$$(26) \quad \therefore \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_3 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_1 = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_4 - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_2 \right]$$

Prenons un système d'axes de coordonnées $(x_1 y_1 z_1)$ par le point (xyz) dont l'axe des z_1 est dirigé suivant la normale et les

autres axes font des angles infiniment petites avec les axes des x et y . Soient $\alpha_0 \beta_0 \gamma_0, \alpha'_0 \beta'_0 \gamma'_0$ et $\alpha \beta \gamma$ les cosinus directeurs des axes des x_1, y_1 et z_1 . Nous aurons pour un point extérieur

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \alpha_0 + \frac{\partial V}{\partial y_1} \alpha'_0 + \frac{\partial V}{\partial z_1} \alpha$$

et cette formule a évidemment lieu même si l'on s'approche indéfiniment de la surface. Mais $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial V}{\partial y_1}$ sont continues quand on traverse la surface

$$\therefore \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_4 - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_2 = \alpha \left[\left(\frac{\partial V}{\partial z_1} \right)_4 - \left(\frac{\partial V}{\partial z_1} \right)_2 \right] = -4\pi\sigma\alpha$$

si l'axe des z_1 est dirigée dans la direction 2—4. Par suite selon (26) et (23)

$$(27) \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_3 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_1 = \lim \frac{\partial}{\partial x} (-4\pi\sigma\alpha) = -4\pi\sigma t_1.$$

On trouvera de même

$$(28) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_3 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_1 = -4\pi\sigma t_1 \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)_3 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)_1 = -4\pi\sigma s_1 \end{cases}$$

et parce que $\Delta V = 0$

$$(29) \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_3 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_1 = 4\pi(r_1 + t_1).$$

De même on trouvera

$$(30) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right)_3 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right)_1 = \lim \frac{\partial}{\partial x} (-4\pi\sigma\gamma) = -4\pi \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ \hspace{15em} \text{si } \frac{\partial \sigma}{\partial x} \text{ est continue,} \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \right)_3 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \right)_1 = -4\pi \frac{\partial \sigma}{\partial y} \text{ si } \frac{\partial \sigma}{\partial y} \text{ est continue.} \end{cases}$$

Ces formules sont identiques à ceux de M. POINCARÉ,¹⁾ la seule différence consiste en ce que nous avons choisi le sens positif de

¹⁾ H. POINCARÉ, Théorie du Potentiel Newtonien. Paris 1899, p. 251.

l'axe des z autrement que M. POINCARÉ. Quant aux suppositions il y a une divergence. M. POINCARÉ suppose que la densité admet deux dérivées, mais nous supposons seulement que la densité admet des dérivées premières et qu'elle soit de la forme $\sigma = \sigma_0 + r\sigma_1$ et que σ_1 satisfasse à certaines conditions; ces conditions sont remplies p. e. si σ_1 est de la forme $\sigma_1 = \sigma_1^0 + \sigma_2$, σ_1^0 constante et σ_2 infiniment petit avec r de manière que l'intégrale $\int_0^a \sigma_2 \frac{dr}{r}$

soit finie. Au contraire M. POINCARÉ ne suppose que la surface admet des rayons de courbures déterminées au point considéré; nous supposons en outre que la surface ait un plan tangent bien déterminé dans chaque point du voisinage de l'origine et que les dérivées premières des angles que fait la normale avec l'axe des z soient finies et continues.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 632.)

- Kjöbenhavn.** *K. danske Videnskabernes Selskab.*
 Oversigt over Forhandlinger. 1901: No. 2—3. 8:o.
 Skrifter. Naturvid.-math. Afd. (6) T. 10: 2. 1901. 4:o.
 Regesta diplomatica historiæ Danicæ. Række 2: Bd 2: 5. 1901. 4:o.
- Krakau.** *Académie des sciences.*
 Atlas geologiczny Galicyi. Zesz. 8 & Text; 12 & Text. 1900. Fol. & 8:o.
 Biblioteka pisarzów Polskich. T. 38. 1900. 8:o.
 Bulletin international. Cl. des sc. math. et nat. 1901: Nr 1—5. 8:o.
 Collectanea ex archivo collegii iuridici. T. 7. 1900. 8:o.
 Katalog literatury naukowej Polskiej. T. 1 (1901): zesz. 1. 8:o.
 Materyały do klimatografii Galicyi. Rok 1900. 8:o.
 Rozprawy. Wydział filologiczny. (2) T. 16. 1900. 8:o.
 » Wydział hist.-filozoficzny. (2) T. 16. 1900. 8:o.
- *K. K. Sternwarte.*
 Meteorologische Beobachtungen. 1900: 1—12. 8:o.
 Fünfjährige Resultate der meteorologischen Beobachtungen. 1896—
 1900. 8:o.
- Kristiania.** *Det norske meteorologiske Institut.*
 Nedbøriagttagelser i Norge. Aarg. 6 (1900). Fol.
- Kyōto.** *Imperial university.*
 Calendar. 2560—61 (1900—1901). 8:o.
- Königsberg.** *Physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*
 Schriften. Jahrg. 41 (1900). 4:o.
- Lausanne.** *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
 Bulletin. (4) Vol. 37: No. 140. 1901. 8:o.
- Lawrence.** *Kansas University.*
 Kansas University quarterly. Vol. 9 (1900): N:o 3—4; 10 (1901): 1. 8:o.
- Leiden.** *Nederlandsche botanische Vereeniging.*
 Nederlandsch kruidkundig archief. (3) D. 2: St. 2. 1901. 8:o.
 Prodrum floræ Batavæ. Ed. altera. Vol. 1: P. 1. 1901. 8:o.
- Leipzig.** *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
 Abhandlungen. Math.-phys. Classe. Bd 26: N:o 5—7. 1901. 8:o.
 » Philol.-hist. Classe. Bd 21: N:o 1. 1901. 8:o.
 Berichte über die Verhandlungen. Math.-phys. Classe. 1901: 1—3. 8:o.
 » » » » Philol.-hist. Classe. 1901: 1. 8:o.
- *Verein für Erdkunde.*
 Mittheilungen. 1900. 8:o.
 Wissenschaftliche Veröffentlichungen. Bd 5: Text & Atlas. 1901. 8:o & Fol.
- London.** *Geologists' Association.*
 Proceedings. Vol. 17 (1901): P. 2—3. 8:o.
- *British Museum.*
 Accounts etc. 1900/01. 8:o.
 BANKS, J., & SOLANDER, D., Illustrations of the botany of captain
 Cook's voyage round the world. P. 2. 1901. Fol.
 A hand-list of the genera and species of birds. Vol. 2. 1900. 8:o.

London. British Museum.

Catalogue of the Mesozoic plants in the Dep. of Geology. The Jurassic flora. P. 1. 1900. 8:o.

Catalogue of Welwitsch's African plants. Vol. 1: P. 4; 2: 2. 1900—1901. 8:o.

— **Royal Astronomical society.**

Monthly notices. Vol. 61 (1901/02): N:o 7—8 & Append. 2. 8:o.

— **Chemical Society.**

Journal. Vols. 79—80 (1901): 7—9. 8:o.

Proceedings. Vol. 17 (1900/01): N:o 239—240. 8:o.

— **Entomological society.**

Transactions. Year 1900. 8:o.

— **Geological society.**

Quarterly journal. Vol. 57 (1901): P. 3. 8:o.

Geological literature added to the geological society's library. Year 1900. 8:o.

— **Linnean society.**

Journal. Botany. Vol. 35: N:o 243. 1901. 8:o.

 ' Zoology. Vol. 28: N:o 182. 1901. 8:o.

Transactions. Botany. (2) Vol. 5: P. 13—15; 6: 1. 1900—1901. 4:o.

 ' Zoology. (2) Vol. 8: P. 1—4. 1900—1901. 4:o.

— **R. Microscopical Society.**

Journal. 1901: P. 3—4. 8:o.

— **Royal society.**

Proceedings. Vol. 68 (1901): N:o 446—448. 8:o.

— **Zoological society.**

Proceedings. 1901: Vol. 1: P. 1. 8:o.

London, Ontario. Entomological society.

The Canadian Entomologist. Vol. 33 (1901): N:o 6—8. 8:o.

Madison. Wisconsin academy of sciences, arts, and letters.

Transactions. Vol. 13 (1900): P. 1. 8:o.

Madras. Government observatory.

Report on the Kodaikanal and Madras observatories. 1900/1901. Fol.

Magdeburg. Wetterwarte der Magdeburgischen Zeitung.

Jahrbuch. Bd. 18 (1899). 4:o.

Manchester. Geological society.

Transactions. Vol. 27 (1900/1901): P. 3—5. 8:o.

— **Literary and philosophical society.**

Memoirs and proceedings. Vol. 45 (1900/1901): P. 3. 8:o.

Manila. Central observatory.

Bulletin. 1901: 5. Fol.

— **Observatorio de la compañía de Jesús.**

Boletín mensual. Año 1899: Trim. 1—2. Fol.

Marseille. Commission de météorologie du dép. des Bouches-du-Rhône.

Bulletin annuel. Année 19 (1900). 4:o.

— **Faculté des sciences.**

Annales. T. 11: Fasc. 1—9. 1901. 4:o.

- Mauritius.** *Royal Alfred observatory.*
Annual report of the director. Year 1899. Fol.
Results of the magnetical and meteorological observations. Year 1899. Fol.
- Melbourne.** *Royal society of Victoria.*
Proceedings. N. S. Vol. 13 (1900): P. 2. 8:o.
- Mexico.** *Instituto médico nacional.*
Anales. T. 4 (1900): Num. 17. 8:o.
— *Observatorio meteorologico central.*
Boletín mensual. 1901: 1-3. Fol.
Boletín de agricultura, minería e industrias. Año 10 (1900/01): Núm. 4-7. 8:o.
— *Sociedad científica »Antonio Alzate»*
Memorias y revista. T. 15 (1900/1901): Núm. 3-6. 8:o.
- Middelburg.** *Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen.*
Archief. D. 8: St. 3. 1900. 8:o.
- Milano.** *R. Osservatorio astronomico di Brera.*
Osservazioni meteorologiche. Anno 1900. 4:o.
Pubblicazioni. N:o 41. 1901. 4:o.
— *Società Italiana di scienze naturali.*
Atti. Vol. 40 (1901): Fasc. 1-3. 8:o.
Memorie. Vol. 6: Fasc. 3. 1901. 4:o.
— *Comitato per le onoranze a Francesco Brioschi.*
BRIOSCHI, F., Opere matematiche. T. 1. 1901. 4:o.
- Minneapolis.** *Geological and natural history survey of Minnesota.*
Geology of Minnesota. Final report. Vol. 6. 1901. 4:o.
- Mont Blanc.** *Observatoire météorologique, physique et glaciaire.*
Annales. T. 4-5. 1900. 4:o.
- Montevideo.** *Museo nacional.*
Anales. T. 4: Entr. 19. 1901. 8:o.
- Montevideo.** *Observatorio meteorológico del colegio Pío de Villa Colón.*
Boletín mensual. Año 12 (1900): Núms. 7-9. 8:o.
- Montpellier.** *Académie des sciences et lettres.*
Mémoires. Section des lettres. (2) T. 3: N:o 2; 4: 1. 1900. 8:o.
» Section de médecine. (2) T. 1: N:o 4. 1900. 8:o.
- Montreal.** *Natural history society.*
Canadian record of science. Vol. 8 (1901): N:o 5. 8:o.
- Moscou.** *Observatoire météorologique de l'université impériale.*
Observations. 1899: 1-6, 8-12; 1900: 1-12; 1901: 1-2. 8:o.
- Mount Hamilton.** *Lick observatory.*
Bulletin. No 3-4. 1901. 4:o.
- München.** *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Almanach. Jahr 1901. 8:o.
Sitzungsberichte. Math.-phys. Classe. 1901: H. 2. 8:o.
» Philos.-philol. u. hist. Classe. 1901: H. 2. 8:o.
— *Meteorologische Centralstation.*
Übersicht über die Witterungsverhältnisse. 1901: 5-6. 4:o.

Nancy. *Société des sciences.*

Bulletin des séances (3) T. 1 (1900): Fasc. 6; 2 (1901): 1. 8:o.

Nantes. *Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France.*

Bulletin. T. 10 (1900): Trim. 4. 8:o.

Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*

Rendiconto. (3) Vol. 7 (1901): Fasc. 5-6. 8:o.

New York. *Academy of sciences.*

Annals. Vol. 13 (1900/1901): P. 2-3. 8:o.

Memoirs. Vol. 2: P. 3. 1901. 4:o.

— *American Museum of natural history.*

Memoirs. Vol. 1: P. 6. 1901. 4:o.

Annual report of the president. Year 1900. 8:o.

— *Observatory of Columbia university.*

Contributions. No. 18. 1901. 8:o.

— *Meteorological observatory of the department of public parks.*

Report. Year 1900: 3-11 & Annual tables. 4:o.

Osnabrück. *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Jahresbericht. 14 (1899-1900). 8:o.

Ottawa. *Field-naturalists' Club.*

The Ottawa naturalist. Vol. 15 (1901): No 3. 8:o.

Oxford. *Radcliffe observatory.*

Results of meteorological observations. Vol. 48 (1892-1899). 8:o.

Palermo. *Circolo matematico.*

Rendiconti. T. 15 (1901): Fasc. 3-4. 8:o.

Palo Alto. *Leland Stanford junior university.*

Contributions to biology from the Hopkins seaside laboratory. 23-26. 1901. 8:o.

Paris. *Académie des sciences.*

CAUCHY, AUGUSTIN, Oeuvres complètes. (1) T. 12. 1900. 4:o.

PINGRÉ, A. G., Annales célestes du dix-septième siècle. Paris 1901. 4:o.

— *Association internationale des académies.*

Assemblée 1 (1901): Compte rendu. 4:o.

— *Comité international des poids et mesures.*

Procès-verbaux des séances. 1900. 8:o.

— *Comité des travaux historiques et scientifiques.*

Bulletin de géographie historique et descriptive. Année 1900: N:o 1-3. 8:o.

Comptes rendus du congrès des sociétés savantes de Paris et des départements 1900: Section des sciences. 8:o.

— *Congrès international de météorologie.*

Procès-verbaux sommaires. 1900. 8:o.

— *École polytechnique.*

Journal. (2) Cahier 5-6. 1900, 1901. 4:o.

— *École des hautes études.*

Bulletin des sciences mathématiques. (2) T. 24 (1900): 10-12; 25 (1901): 1-3. 8:o.

— *Muséum d'histoire naturelle.*

Bulletin. Année 1900: N:o 7-8; 1901: 1-3. 8:o.

Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1901. Årg. 58. N:o 7.

Paris. *Société astronomique de France.*

Bulletin. 1901: 6, 8—9. 8:o.

— *Société de géographie.*

La Géographie. Année 1901: N:o 7—8. 8:o.

— *Société géologique de France.*

Bulletin. (4) T. 1 (1901): N:o 1. 8:o.

— *Société zoologique de France.*

Bulletin. T. 25 (1900). 8:o.

Mémoires. T. 13 (1900). 8:o.

Philadelphia. *Academy of Natural Sciences.*

Proceedings. Vol. 53 (1901): P. 1. 8:o.

— *American philosophical society.*

Proceedings. Vol. 40 (1901): N:o 165. 8:o.

Memorial Volume. 1. 1900. 8:o.

Transactions. N. S. Vol. 20: P. 2. 1901. 4:o.

Pisa. *Società Toscana di scienze naturali.*

Processi verbali. Vol. 12 (1901): p. 169—230. 8:o.

Pola. *Hydrographisches Amt der k. u. k. Kriegs-Marine.*

Meteorologische Termin-Beobachtungen. 1901: 5—7. tv. Fol.

Veröffentlichungen. Nr 11. 1901. 4:o.

Ponta Delgada. *Observatoire météorologique.*

Resumé des observations. Années 1896—1900. Fol.

Variation diurne de la pression atmosphérique. Année 1900. Fol.

Pulkowo. *Observatoire central Nicolas.*

Publications. (2) Vol. 6; 8. 1900—1901. 4:o.

Prag. *Česká akademie císaře Františka Josefa.*

Rozpravy. Třída 2: Mathem.-přírodnická. Ročník 9 (1900). 8:o.

— *Spolek chemiků Českých.*

Listy chemické. Ročník 25 (1901): Číslo 1—5. 8:o.

Pressburg. *Verein für Natur- und Heilkunde.*

Verhandlungen. N. F. Bd 12 (1900). 8:o.

Puebla. *Observatorio meteorológico del colegio del estado de Puebla.*

Boletín mensual. 1900: 5, 7—12. 8:o.

Resumen correspondiente a cada día. Año 1900: 1—4, 6. Fol.

Rio de Janeiro. *Repartição da carta marítima, Directoria de meteorologia.*

Boletim das observações meteorológicas e dos resultados magneticos.

Anno 5 (1900): N. 10—12. Fol.

Richmond. *National physical laboratory.*

Report. Year 1900. 8:o.

Rochester. *Academy of science.*

Proceedings. Vol. 4: pp. 1—64. 1901. 8:o.

Roma. *Reale accademia dei Lincei.*

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Memorie. (5) Vol. 1—3. 1895—1901. 4:o.

Rendiconti. (5) Vol. 10 (1901): Sem. 1: Fasc. 11—12; 2: 1—4. 8:o.

Roma. *Reale accademia dei Lincei.*

Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

Atti. (5) P. 1: Memorie. Vol. 7 (1899); 2: Notizie degli Scavi. 1901: 2-6. 4:o.

Rendiconti. (5) Vol. 10: Fasc. 3-6. 1901. 8:o.

Rendiconto dell' adunanza solenne del 2/6 1901. 4:o.

— *Accademia Pontificia de Nuovi Lincei.*

Atti. Anno 54 (1900/1901): Sess. 2-7. 4:o.

— *R. Comitato Geologico d'Italia.*

Bollettino. Anno 1901: N. 1. 8:o.

— *Ufficio centrale di meteorologia e di geodinamica.*

Bollettino meteorico. Anno 21 (1899): N:o 31, 247; 22 (1900): 158-159, 214; 23 (1901): 22. 4:o.

Rothamsted. *Laboratory.*

Plans and summary tables, arranged for reference in the fields. 1901. 8:o.

Memoranda of the origin, plan, and results of the field and other experiments conducted on the farm and in the laboratory [during a period of 58 years]. 1901. 8:o.

Memoirs on agricultural chemistry and physiology. Vol. 7 (Suppl.) 1890-1898. 8:o.

Saint Louis. *Missouri botanical garden.*

Annual report. 12 (1901). 8:o.

St Pétersbourg. *Institut impérial de médecine expérimentale.*

Archives. T. 8: N:o 3-4. 1901. 4:o.

— *Jardin botanique impérial.*

Bulletin. Livr. 1. 1901. 8:o.

— *Musée zoologique de l'académie imp. des sciences.*

Annuaire. T. 6 (1901): N:o 1. 8:o.

— *Observatoire physique central Nicolas.*

Annales. Année 1899: P. 1-2. 4:o.

— *Société Imp. Russe de géographie.*

Izvestija. T. 37 (1901): 1-2. 8:o.

Otschet. 1900. 8:o.

San José. *Instituto fisico-geografico de Costa Rica.*

Boletin. Año 1 (1901): Núm. 5-7. 8:o.

San Salvador. *Observatorio astronómico y meteorológico.*

Anales. Año 1895. Fol.

Sofia. *Station centrale météorologique de Bulgarie.*

Bulletin annuel. Année 1900. Fol.

Buletin mensuel. 1900: 1-12. tv. Fol.

Strassburg. *K. Hauptstation für Erdbebenforschung.*

Monatsbericht. 1901: 3-5. 8:o.

Stuttgart. *Meteorologische Centralstation.*

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Württemberg. Jahr 1899. 4:o

Sydney. *Australian museum.*

Report of the trustees. Year 1899. Fol.

Sydney. Observatory.

Results of meteorological observations in N. S. Wales. 1898. 8:o.
Results of rain, river, and evaporation observations made in N. S. Wales. 1898. 8:o.

— *Linnean society of N. S. Wales.*

Proceedings. Vol. 25 (1900): P. 4. 8:o.

Tiflis. Tiflisser Physikalisches Observatorium.

Beobachtungen. Jahr 1897. 4:o.

Monatsberichte der Horizontalpendel-Station. 1900: N:o 1—8. 8:o.

Tokyo. Imperial university. College of science.

Journal. Vol. 15 (1901): P. 2. 4:o.

— *Medicinische Facultät der Kaiserlich-Japanischen Universität.*

Mittheilungen. Bd. 5: No 1. 1901. 8:o.

— *Central meteorological observatory of Japan.*

Weather chart. 1901: 4—6. Fol.

— *Geographical Society.*

Journal of geography. Vol. 13 (1901): N:o 145—150. 8:o.

— *Societas zoologica Tokyonensis.*

Annotationes zoologicae Japonenses. Vol. 3: P. 2—4. 1901. 8:o.

Torino. R. Accademia delle scienze.

Atti. Vol. 36 (1900/1901): Disp. 6—10. 8:o.

— *Osservatorio centrale del R. collegio Carlo Alberto in Moncalieri.*

Bollettino mensuale. (2) Vol. 19 (1899/1900): Num. 1—6; 20(1900): 7—12. 8:o.

Toronto. Meteorological observatory.

General meteorological register. Year 1900. 8:o.

Toulouse. Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres.

Bulletin et mémoires. T. 3 (1899/1900). 8:o.

Tromsø. Museum.

Aarshefter. 23 (1900). 8:o.

Aarsberetning. 1899; 1900. 8:o.

Trondhjem. Det K. Norske Videnskabers Selskab.

Skrifter. 1900. 8:o.

Troyes. Société académique d'agriculture, des sciences, arts et belles-lettres du dép. de l'Aube.

Mémoires. (3) T. 37 (1900). 8:o.

Utrecht. Physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool.

Onderzoekingen. (4) 3: Afl. 1. 1901. 8:o.

— *K. Nederlandsch meteorologisch Instituut.*

Onweders, Optische Verschijnselen enz. in Nederland. D. 21 (1900). 8:o.

Warschau. Observatoire astronomique de l'univ. impériale.

KRASNOW, A. W., La courbe des apsides et les solutions singulières de l'équation différentielle de l'orbite géocentrique de la lune (en russe). Varsovie 1900. 8:o.

Observations faites au cercle méridien de l'observatoire P. 2. 1901. 4:o.

Washington. Academy of sciences.

Proceedings. Vol. 3: pp. 217—370. 1901. 8:o.

Washington. Smithsonian Institution.

- Smithsonian miscellaneous collections. Vol. 61: N:o 1258. 1901. 8:o.
- Annual report. Year 1898/99 & National Museum. 8:o.
- *Bureau of american ethnology.*
Annual report. 17 (1895/96): P. 1; 18 (1896/97): P. 1. 8:o.
- *U. S. Weather Bureau.*
Report of the chief. 1899—1900. 4:o.
Monthly weather review. 1901: 4—5. 4:o
- *U. S. Department of agriculture.*
Report. No. 67, 69. 1901. 8:o.
Yearbook of the department. 1900. 8:o.
Crop reporter. Vol. 3 (1901): No. 1—3. 4:o.
- SALMON, D. E., Rabies: its cause, frequency, and treatment. 1900. 8:o.
- Division of publications. Circular. No. 410, 415—416. 1901. 8:o.
- Div. of agrostology. Bulletin. No 17 (Rev. ed.). 1901. 8:o.
» » » Circular. No. 34—36. 1901. 8:o.
- Bureau of animal industry. Bulletin. No. 29. 1901. 8:o.
- Division of botany. Bulletin. No. 25. 1901. 8:o.
» » » Circular. No. 27. 1901. 8:o.
» » » Contributions from the U. S. National Herbarium.
Vol. 6. 1901. 8:o.
- Division of chemistry. Bulletin. No. 62. 1901. 8:o.
- Division of entomology. Bulletin. N. S. No. 27. 1901. 8:o.
» » » Circular. (2) No. 43. 1901. 8:o.
- Office of experiment stations. Bulletin. No. 22; 97—99. 1895—1901. 8:o.
» » » » Experiment station record. Vol. 12: No. 10—11; 13: 1. 1901. 8:o.
» » » » Circular. No. 44 (Revised); 46. 1901. 8:o.
- Farmers' bulletin. No. 39; 131—132. 1896—1901. 8:o.
- Section of foreign markets. Bulletin. No. 22—23. 1901. 8:o.
- Library. Bulletin. No. 35. 1901. 8:o.
- Division of forestry. Bulletin. No. 30. 1901. 8:o.
- Division of soils. Bulletin. No. 17. 1901. 8:o.
- Division of statistics. Bulletin. Miscellaneous series. No. 18—19. 1901. 8:o.
- Division of vegetable physiology and pathology. Circular. No. 18. 1901. 8:o.
- *Philosophical Society.*
Bulletin. Vol. 13 (1895/99); 14 (1899/1900): pp. 1—166. 8:o.
- *U. S. Geological survey.*
Bulletin. N:o 163—176. 1900. 8:o.
Monographs. Vol. 39—40. 1900. 4:o.
Annual report. 20 (1898/99): P. 2—5 & maps; 7. 4:o.
- SCHRAEDER, F. C., & BROOKS, A. H., Preliminary report on the Cape Nome gold region, Alaska. Washington 1900. 8:o.
- *Astrophysical observatory of the Smithsonian institution.*
Annals. Vol. 1. 1900. 4:o.

Washington. Hydrographic office.

Pilot chart of the North Atlantic Ocean. 1900: 1-12. Fol.

» » » North Pacific Ocean. 1900: 1-12. Fol.

Wien. K. Akademie der Wissenschaften.

Denkschriften. Math.-naturwiss. Classe. Bd 66: Th. 3; 68. 1900. 4:o.

» Philos.-hist. Classe. Bd 46. 1900. 4:o.

Sitzungsberichte. Math.-naturwiss. Classe.

Abth. 1. Bd 108: H. 1-10; 109: 1-7. 1899-1900. 8:o.

» 2a. Bd 108: H. 1-10; 109: 1-9. 1899-1900. 8:o.

» 2b. Bd 108: H. 1-10; 109: 1-10. 1899-1900. 8:o.

» 3. Bd 108: H. 1-10; 109: 1-7. 1899-1900. 8:o.

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Classe. Bd 141 (1899); 142 (1900) & Register zu den Bänden 131-140. 8:o.

Archiv für österreichische Geschichte. Bd 87: H. 1-2; 88: 1-2; 89: 1. 1899-1900. 8:o.

Almanach. Jahrg. 49 (1899); 50 (1900). 12:o.

Fontes rerum Austriacarum. Abth. 2: Bd 48: H. 2; 49: 2; 51 & Register zu 1-50. 1896-1901. 8:o.

Mittheilungen der prähistorischen Commission. Bd 1: N:o 5. 1901. 4:o.

— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*

Jahrbuch. Bd 50 (1900): H. 3-4. 8:o.

Verhandlungen. 1901: N:o 7-8. 8:o.

— *K. K. zoologisch-botanische Gesellschaft.*

Abhandlungen. Bd 1: H. 1. 1901. 8:o.

Verhandlungen. Bd. 51 (1901): H. 4-6. 8:o.

— *K. K. Central-Anstalt für Meteorologie u. Erdmagnetismus.*

Beobachtungen. 1900: 1-12. 8:o.

Zürich. Naturforschende Gesellschaft.

Vierteljahrsschrift. Jahrg. 45 (1900): H. 3-4. 8:o.

— *Schweizerische meteorologische Central-Anstalt.*

Meteorologische Beobachtungen. 1900: Sem. 1. 4:o.

Af Herrar Wahlström & Widstrand.

Bilder ur Nordens flora. Efter Palmstruchs m. fl. Svensk Botanik af C. A. M. LINDMAN. H. 2. 1901. 8:o.

Af Kanslisekreteraren S. Norström.

PLUMANDON, J. N., Formation des principaux hydrométéores. Paris 1885. 8:o.

HÆCKEL, E., Gesammelte populäre Vorträge aus dem Gebiete der Entwicklungslehre. H. 1-2. Bonn 1878-79. 8:o.

JAMES, C., Guide pratique du médecin et du malade aux eaux minérales de France, de Belgique, d'Allemagne etc. Paris 1856. 8:o.

LAUGEL, A., Science et philosophie. Paris 1863. 8:o.

MOUCHEZ, E., La photographie astronomique à l'observatoire de Paris. Paris 1887. 8:o.

Af författarne:

LINDMAN, C. A. M., Einige Beiträge zu den Aristolochiaceen. Genève 1901. 8:o.

NERMAN, G., Något om i Indalsälven, Ljusnan och Dalälven rådande hydrografiska förhållanden. Upsala 1901. 8:o.

Af författarne:

- OLSSON, P., Väderleken i Östersund under år 1900 och normalåret. 1901. 8:o.
- TRYBOM, FILIP, Fisket i Halland 1900. Halmstad 1901. 8:o.
- BALDWIN, E. B., Meteorological observations of the second Wellman Expedition. Washington 1901. 4:o.
- Auroral observations on the second Wellman expedition made in the neighborhood of Franz Joseph land. Washington 1901. 4:o.
- BATHER, F. A., Gustaf Lindström. London 1901. 8:o.
- BRÉDIKHINE, TH., Sur la comète 1899 I (Swift). St. Pétersbourg 1901. 8:o.
- BRÖGGER, W. C., Konglomerater i Kristianiafeltet. Kra 1900. 8:o.
- CZERMAK, P., Der Innsbrucker Föhn. Vortrag. Innsbruck 1901. 8:o.
- DE TONI, G. B., G. G. Agardh e la sua opera scientifica. Padova 1901. 8:o.
- V. HEFNER-ALTENECK, Antrittsrede in der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1901. 8:o.
- MARTIAL, LYDIE, La femme et la liberté. Paris 1901. 8:o.
- NIEDENZU, F., De genere Byrsonima. 1. Braunsberg 1901. 4:o.
- PHILIPPI, R. A., Nueva especie Chilena de Zorras. Santiago de Chile 1901. 8:o.
- RABOT, CH., Les variations de longueur des glaciers dans les régions arctiques et boréales. Genève 1900. 8:o.
- SEELHEIM, F., Äther, Körper und Schwere. Leipzig 1901. 8:o.
- TOMMASINA, TH., Sur les phénomènes des radioconducteurs. Genève 1901. 8:o.
- Stare lore and future events. 5: 27—28. London 1901. 8:o.



ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Ärg. 58.

1901.

Nº 8.

Onsdagen den 9 Oktober.

INNEHÅLL:

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 659.
MÖRNER, C. TH. och VESTERGRÉN, T., Till kännedomen om fri oxaleyras förekomst inom växtriket	» 661.
WIMAN, A., Über die Wurzeln der metacyklischen Gleichungen	» 669.
Skänker till Akademiens bibliotek	sidd. 660, 674.

Tillkännagafs, att bland Akademiens utländske ledamöter professorn vid Universitetet i Paris, ledamoten af Franska Institutet HENRI DE LACAZE DUTHIERS och f. d. professorn vid Universitetet i Würzburg ADOLF FICK med döden afgått.

Till delegerad att å Akademiens vägnar deltaga i den internationella akademiska Associationens arbeten utsågs Herr RETZIUS.

Till professor och intendent vid det Naturhistoriska Riksmuseets palæontologiska afdelning kallades och antogs geologen vid Sveriges geologiska undersökning Fil. Dr. EDVARD JOHAN GERHARD HOLM.

Genom anställt val kallade Akademien f. d. professorn vid Upsala Universitet, Juris och Fil. Dr. CARL YNGVE SAHLIN till sin inländske ledamot.

Ett genom subskription bland Akademiens ledamöter åstadkommet, af artisten NILS JANZON utfördt porträtt i olja af Akademiens framl. ledamot prof. G. LINDSTRÖM öfverlämnades nu å subskribenternas vägnar genom Herr RETZIUS till Akademien.

En summa af 1,500 kronor, som i stället för kransar vid prof. G. LINDSTRÖM's graf insamlats af hans vänner och lär-

jungar, blef nu under namn af »GUSTAF LINDSTRÖM's minnesfond» öfverlämnad till Akademien under villkor »att räntan skulle utgå som ett mindre resestipendium, afsedt att för yngre studerande underlätta resor inom landet i syfte att studera de lägre evertebrerade djuren, fossila eller lefvande».

Herr ARRHENIUS redogjorde för den af honom och Dr. THORVALD MADSEN i Köpenhamn utförda undersökningen angående den fysikaliska kemiens tillämpning på serumterapien.

Herr SÖDERBAUM framlade ett exemplar af J. J. BERZELIUS' nyss färdigtryckta själfbiografiska anteckningar och redogjorde för den plan, som blifvit följd vid dessa anteckningars redigering.

På tillstyrkan af kommitterade antogos följande inlämnade afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter:

i Akademiens Handlingar: »Die Malpighiaceen des Regnell'schen Herbars. Mit 8 Taf.» af Fil. Kand. CARL SKOTTSBERG;

i Bihaget till Akademiens Handlingar: »Arctic Crustacea collected during the Swedish Arctic Expedition 1898, 1899 and 1900 under the direction of Professor A. G. NATHORST and Mr. G. KOLTHOFF». »2. Decapoda and Schizopoda» af Docenten AXEL OHLIN;

i Öfversigten: de i innehållsförteckningen upptagna tvenne uppsatserna.

Följande skänker anmälades:

Till Akademiens Bibliotek:

Stockholm. *Statistiska centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. N: XXXV; K: I: 39. 1899. 4:o. Göteborg. *Högskolan.*

Årsskrift. Bd 6 (1900). 8:o.

Amsterdam. *K. Akademie van Wetenschappen.*

Jaarboek. 1900. 8:o.

Proceedings. Sect. of sciences. Vol. 3. 1901. 8:o.

Verhandelingen. Afd. Natuurk. Sect. 1: D. 7: N:o 6—7. Sect. 2: D. 7: N:o 4—6. 1900—1901. 8:o.

» Afd. Letterkunde. N. R. D. 3: N:o 1—4. 1900—1901. 8:o.

Verslag van de gewone vergaderingen der wis- en natuurk. afd. D. 9 (1900/01). 8:o.

(Forts. å sid. 674.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1901. N:o 8.
Stockholm.

Till kannedomen om fri oxalsyras förekomst inom växtriket.

Af CARL TH. MÖRNER och TYCHO VESTERGREN.¹⁾

(Meddeladt den 9 Oktober 1901 genom O. HAMMARSTEN.)

Oxalsyrans uppträdande hos växterna i form af salt, dels *neutralt* (CaC_2O_4 hos en mångfald af arter, $\text{Na}_2\text{C}_2\text{O}_4$ hos några hafstrandsväxter, tillhörande släktena *Salicornia* och *Salsola*), dels *surt* (KHC_2O_4 — monokaliumoxalat — hos bl. a. *Oxalis*- och *Rumex*-arter, vissa svampar: *Polyporus sulfureus*, *Peziza sclerotiorum*) är väl konstateradt och allmänt känt. Angående den frågan, om samma syra kan inom växtverlden uppträda äfven i fritt tillstånd, anför ROCHLEDER i sin »*Phytochemie*» (Leipzig 1854), sid. 249:

»*Polyporus sulphureus* FR. (*Boletus* Bull.).

Enthält: — — — — saures kleesaures Kali — —. (PESCHIER.)

Enthält: freie Oxalsäure, saures oxalsaures Kali — — — —.»

Af det i nämnda arbete följda uppställningssättet framgår, att den sistnämnda satsen baserar sig på ROCHLEDER's egna iakttagelser.

Det torde vara ganska visst, att denna — utan anförande af undersökningsmetod eller öfver hufvud taget af någon experi-

¹⁾ Den kemiska delen är författad af MÖRNER, den botaniska af VESTERGREN.

mentel detalj publicerade — uppgift är *enda* källan till den i senare utgifna handböcker stundom förekommande upplysningen, att oxalsyra blifvit påvisad i fritt tillstånd som växtbeståndsdel, nämligen hos *Boletus sulfureus*. Under sådana förhållanden är det förklarligt, att SOHENK i sin stora »Handbuch der Botanik» (Breslau 1890) betecknar förekomsten af fri oxalsyra uti växtcellens innehåll eller bland dennas utsöndringsprodukter såsom »nicht erwiesen» (Del 4, sid. 398) resp. »noch nicht in keinem Fall exact erwiesen» (sid. 454). Frågan synes sålunda väl vara i behof af vidare utredning.

Ett litet bidrag — framsprunget ur en tillfälligtvis gjord observation — må härmed lemnas.

Vid besök (Aug. 1899) i en djupt liggande, mörk och sval källare¹⁾ påträffade jag en rent hvit, bomullsliknande svamp, hvars saft frapperade genom sin *intensivt sura* smak. Sedan preliminär undersökning utvisat, att denna saft blåfärgade kongopapper och vid pröfning med lösligt kalksalt gaf starkt utslag för oxalsyra, tillvaratogs allt det för tillfället tillgängliga svampmaterialet, som vid pressning lemnade 60 c.c. tunnflytande, nästan färglös saft (10 c.c. erfordrade till neutralisering 28,8 c.c. $n/20$ alkali). Sedan den filtrerade vätskan koncentrerats och afkylts, afsatte sig kristaller i riklig mängd, hvilka, efter urpressning mellan filterpapper, omkristalliserades genom den i värme beredda vattenlösningens afkylning. De väl utbildade, skarpt sursmakande och kongopapper blånande, fullkomligt färglösa kristallerna torkades i exsiccator (Prep. I).

Qualitativ undersökning utvisade, förutom *oxalsyra*, *kalium*.

En portion (0,093 gr.) löstes i vatten, och $n/20$ alkali tillsattes under användning af fenoltalein som indikator. Till neutralisering erfordrades 21,8 c.c. eller, omräknadt på 0,1 gr.: 23,4 c.c.

¹⁾ I Upsala, gården Ö. Ågatan N:o 9.

Pro 0,1 gr. substans erfordra:

<i>Monokaliumoxalat</i> , vattenfritt ¹⁾ (KHC_2O_4)	15,6	} c.c. n/20 alkali
<i>Monokaliumdioxalat</i> , kristall. ($\text{KHC}_2\text{O}_4 + \text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$)	23,6	
" vattenfritt ($\text{KHC}_2\text{O}_4 + \text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$) . .	27,4	
<i>Oxalsyra</i> , kristall. ($\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$)	31,8	

Preparatet utgjordes sålunda af kristall. monokaliumdioxalat (öfversurt kaliumoxalat).

I Aug. 1900 erhöles af det då regenererade svampbeståndet en ny portion saft (110 c.c.) med en aciditet, motsvarande pr 10 c.c. 26,4 c.c. n/20 alkali. Denna portion försattes omedelbart med eter och utskakades dermed upprepade gånger.

A. Etern, som genom dekantering och filtrering genom med eter fuktadt filtrum sorgfälligt befriats från bemängning med partiklar af den vattenhaltiga lösningen, afdunstades, och återstoden värmdes med litet vatten. Efter fränfiltrering af något olöst, hartzartad massa afsatte sig vid vätskans afkylning kristaller, hvilka omkristalliserades genom lösningens koncentring i exsiccator. De nu uppkomna, stora, färglösa, skarpt sursmakande kristallerna befriades från moderlut genom kraftig pressning mellan filtrerpapper²⁾ (Prep. II).

Substansen visade sig fri från kalium och gaf vid förbränning öfver hufvud taget icke någon återstod. Vid pröfning med lösligt kalksalt erhöles fällning af kalciumoxalat. Till titreringsanalys användes 0,100 gr.; neutralisering inträdde efter tillsats af 30,8 c.c. n/20 alkali. Den erhållna substansen utgjordes alltså af fri oxalsyra (beräknadt 31,8 c.c.).

B. Vattenlösningen afskiljde efter koncentring vid afkylning kristaller, som efter en gångs omkristallisering (Prep. III) förbrukade pr 0,100 gr. 15,3 c.c. n/20 alkali, hvilket förhållande, jemte den kvalitativa pröf-

¹⁾ Monokaliumoxalat, som äfven kan kristallisera med 1 mol. vatten, utfaller i vattenfritt tillstånd vid vattenlösningens ej alltför långsamma afvalning.

²⁾ Torkning i exsiccator undveks på grund af risken för kristallernas vittrande.

ningens resultat, karakteriserade dem såsom bestående af monokaliumoxalat (beräknadt 15,6 c.c.).

Ett mindre parti saft, som erhöles i Juli 1901, användes till konstaterande af nyss anförda observation, att vid direkt utskakning med eter fri oxalsyra anträffades i resten efter eterextraktets afdunstning. Å detta material utröntes vidare, beträffande förekomsten af baser, att *kalium* (vida öfvervägande) beledsagades af *magnesium*; *natrium* förekom spårvis, under det att *kalium* saknades.

Efter fyndet af samma slags svampbildning uti andra, intill den förut besökta lokalen närbelägna källarerum kom jag i Aug. 1901 åter i besittning af en nämnvärd portion saft (80 c.c.) med en aciditet, motsvarande pr 10 c.c. 32,1 cc. *n/20* alkali. Detta material bearbetades på samma sätt, som det 1899 erhållna, med undantag deraf, att det till sist framställda kristallpulvret torkades till konstant vikt vid + 120° C., hvarunder de förut färglösa, klart genomskinliga kristallerna blefvo ogenomskinligt hvita (Prep. IV). Till titrering afvägdes 0,168 gr., hvilken kvantitet till neutralisering förbrukade 44,4 c.c. *n/20* alkali (motsvarande pr 0,1 gr.: 26,4 c.c.). Preparatet, som vid kvalitativ pröfning befans innehålla enbart oxalsyra och kalium, utgjordes alltså af vattenfritt monokaliumdioxalat (beräknadt 27,4 c.c.), antagligen i ringa mån förorenadt med vanligt monokaliumoxalat¹⁾ (för hvilket beräknas 15,6 c.c.).

Utaf samtliga nu relaterade försök framgår med tydlighet, att den omnämnda svampens saft:

- 1) vid direkt utskakning med eter afger fri oxalsyra;
- 2) efter koncentrering afskiljer kristaller af monokaliumdioxalat, d. v. s. en förening, som syntetiskt framställes genom att i samma lösning med hvarandra sammanföra fri oxalsyra och det i sig sjelf sura saltet monokaliumoxalat.

¹⁾ Närvaron af det mindre svårlösliga monokaliumoxalatet uti moderluten ådagalades vid dennas närmare undersökning.

Dermed anser jag mig äfven på ett mer exakt sätt hafva uppvisat ett bestämdt fall, i hvilket en växt innehåller resp. afsöndrar *fri oxalsyra* eller — om man vill fasthålla vid monokaliumdioxalatets saltkaraktär — ett kaliumoxalat af vida *större* aciditet, än det inom växtverlden förut påvisade, vanliga monokaliumoxalatet. Naturligt nog låg det i mitt intresse att, om möjligt, kontrollera den första och hittills enda uppgiften (ROCHLEDER's) om *fri oxasyras* förekomst som växtbeståndsdel. Efter resultatlös vädjan till ett flertal botanister lyckades det mig, genom godhetsfull bemedling af en i Göteborg bosatt svampamatör¹⁾, komma i besittning af det erforderliga undersökningsmaterialet, *Polyporus sulfureus*.

Den genom pressning utvunna saften besatt sur smak och en aciditet, motsvarande 17,5 c.c. *n/20* alkali pr 10 c.c., men reagerade icke på kongopapper. För oxalsyra och kalium erhöles kvalitativt utslag. Ur en portion, som direkt koncentrerats, afsatte sig ett salt, som efter en gångs omkristallisering och exsiccator-torkning förbrukade pr 0,1 gr. 15,6 c.c. *n/20* alkali (beräknadt för monokaliumoxalat: 15,6 c.c.). En annan portion utskakades upprepade gånger med eter.

A. *Etern* gaf vid afdunstning hartzartad rest, som vid behandling med varmt vatten visserligen afgaf en ringa mängd organisk syra, men denna var *icke* oxalsyra (negativt utslag med lösligt kalksalt!).

B. *Vattenlösningen* blef, efter koncentrerering till omkr. $\frac{1}{5}$ af ursprungliga volymen, åter utskakad med eter i riklig mängd.

a) *Etern* lemnade efter afdunstning, förutom litet hartzartad massa, i helt ringa mängd en organisk syra, som, enligt hvad pröfning med lösligt kalksalt gaf vid handen, *icke* var oxalsyra.

b) Den med eter behandlade *vattenlösningen* koncentrerades till syrups konsistens. Derur afskiljda

¹⁾ Kassören A. BERGMAN, som insamlade svampen invid Lorenzberg i början af Okt. 1900.

kristaller (hvilka, i likhet med syntetiskt framställt monokaliumoxalat blånade kongopapper, ehuru moderluten, antagligen till följd af andra ämnens hindrande inflytande, icke gjorde detta) fordrade, efter en gångs omkristallisering och exsiccatorbehandling, i och för neutralisering 15,5 cc. n/20 alkali pr 0,1 gr. (beräknadt för monokaliumoxalat: 15,6 c.c.).

Bekräftelse af ROCHLEDER's uppgift angående *Polyporus sulfureus* vanns sålunda icke vid denna undersökning. Svampens saft visade sig nämligen innehålla endast vanligt *monokaliumoxalat*. Möjligt är emellertid, att denna svamp under andra förhållanden (i anseende till ålder, årstid och växtlokal etc.) skulle kunna förete äfven fri oxalsyra som beståndsdel.

I samband med här omnämnda undersökningar har jag tagit äfven *Polyporus officinalis* FR. (»Fungus laricis», »*Agaricus albus*») under pröfning på grund deraf, att man å visst håll velat till en botanisk art sammanslå denna svamp med *Polyporus sulfureus*. Ett från apotek inköpt, torkadt exemplar söndermaldes och urlakades under ett par dygn med 5-dubbla vigten vatten (i rumsvärme). Uti det endast svagt surt reagerande filtratet, som koncentrerats till sirup, lät sig oxalsyra öfverhufvud taget ej påvisa, än mindre afsatte sig kristaller af något surt (eller öfversurt) kaliumoxalat.

Det af MÖRNER sedan längre tid i Upsala iakttagna sterila svampmyceliet är utan tvifvel identiskt med en i SACCARDO's nyutkomna sammanställning af de sterila svampformerna¹⁾ under namn af *Hypha bombycina* PERSOON upptagen form. Beskrifningen därstädes lyder som följer:

»*Rhabdis hyphoideis, simplicissimis, subparallelis, niveis, primum laxe intertextis, hypham reluti gossypinam elatam subrotundam, mundissimam, dein collapsis, membranam compactam*

¹⁾ SACCARDO & SYDOW, *Sylloge fungorum*, vol. XIV, pag. 1192. Patavii 1899.

seu corium tenacellum mentientibus. — Habitat ad ligna et lapides in caveis udis et fodinis minime rara in Germania. 18—20 cm. alta et lata, occissime gliscens.»

Myceliet är sedan lång tid tillbaka bekant. Det beskrefs af PERSOON (Myc. Europ. I p. 63) under ofvanstående namn (Hypha bombycina), hvilket han sedermera i sin bekanta Synopsis förändrade till *Dematium bombycinum*.¹⁾ Då beskrifningen därstädes, ehuru kort, är synnerligen träffande, anföres densamma här:

»*Dematium bombycinum*: fugacissimum, candidum, lanuginem aut gossypium referens. Habitat in fodinis subterraneis ubique fere lignis imo lapidibus adhærens, ad tactum ferme in aquam soluitur. — —»

Svampen är vidare af andra äldre mykologer upptagen under flera olika namn, såsom *Byssus floccosa* SCHREB., *Byssus bombycina* NEES, *Hyphasma floccosum* REBENT.²⁾

Myceliet, som tilldrager sig uppmärksamheten genom sin betydliga storlek, utbreder sig i källaren på föremål af trä, men kan äfven öfvergå på själfva stenväggen. Det är till formen ej olik flagor af bomull, till färgen snöhvitt, och afsöndrar vattenklara droppar af starkt sur smak. Hyferna utbreda sig från en midtpunkt centrifugalt, så att de äldsta, utdöende myceldelarna befinna sig i centrum, de yngsta i periferien. Därigenom kommer myceliet att upptaga en mer eller mindre cirkelformig yta. Det kan uppnå en storlek af ända till 6 dm. i diameter och en höjd af närmare 1 dm. Man kan äfven iakttaga en radiär veckning af myceliet samt en uppdelning i tillväxtzoner i periferisk riktning. På mindre mycelier är detta dock otydligt, liksom myceliet äfven genom äldre delars bortdöende eller på grund af underlagets ojämnhet o. dyl. kan få en mer oregelbunden form. Hyfväfnaden är ytterst lös, så att den vid beröring lätt faller samman. Äldre, döda eller i utdöende stadda myceldelar, hvilkas

¹⁾ PERSOON, Synopsis methodica fungorum I, pag. 696. — Namnet *Dematium* användes numera för ett Hyphomycet-släkte, med hvilket det ifrågavarande myceliet ingenting har gemensamt.

²⁾ Utförligare om synonymiken se STREINZ, Nomenclator fungorum, p. 166. Vindobonæ 1862.

hyfer förlorat sin turgescens, äro sammanfallna till en gulaktig, seg och tämligen torr hud.

Vid mikroskopisk undersökning visar sig myceliet bestå af 3—4 μ tjocka, sparsamt septerade, hyalina hyfer, hvilka äro förgrenade, med sidogrenarna utgående under tvärsepta. Hyferna i de äldre myceldelarna äro något tjockare, 3—6 μ i genomskärning med högst 2 μ tjocka väggar.

Huruvida myceliet någonsin bildar några särskilda fruktifikationsorgan, är obekant. På den ifrågavarande lokalen förefunnos inga högre utvecklingsstadier af svampar, hvilka skulle kunna misstänkas stå i samband med myceliet. Hyferna sakna de för basidiomyceterna utmärkande »Schnallen-fusionerna.»

Hypha bombycina PERS. torde förefinnas flerstädes i vårt land. Sålunda tror jag mig ha iakttagit den på grufstöttor af trä i Falu grufva vid ett besök därstädes i juni detta år. Myceliet var igenkänligt bl. a. på de afsöndrade sura dropparna. Äfven i Dannemora grufva iakttog jag på hösten 1900 ett liknande mycelium.

Über die Wurzeln der metacyklischen Gleichungen.

Von A. WIMAN.

(Mitgeteilt am 9. October 1901 durch E. PHRAGMÉN.)

Wie wir in einer früheren Note bemerkt haben, muss der Grad einer primitiven metacyklischen Gleichung eine Primzahlpotenz p^m sein.¹⁾ Durch Radicale zusammengesetzte Ausdrücke, welche, als Wurzeln, einer solchen Gleichung genügen, wollen wir hier für den allgemeinsten Fall, dass der Grad eine beliebige Primzahlpotenz ist, liefern. Für $p = 2$ haben wir solche Ausdrücke bereits in unserer citierten Note gegeben, und für $m = 1$ ist die Aufgabe schon durch Arbeiten von ABEL, KRONECKER und Herrn WEBER gelöst, und zwar wurde hier bewiesen, dass auch umgekehrt jede irreductible metacyklische Gleichung von einem Primzahlgrade sich vermittelst Radicalausdrücke der beschriebenen Art auflösen lässt. Auf die Frage, ob auch für $m > 1$ die Wurzeln der *allgemeinen* primitiven metacyklischen Gleichungen sich auf die in dieser Note beschriebene Weise darstellen lassen, hoffen wir in einer späteren ausführlicheren Arbeit zurückkommen zu können.

Bei den Ausdrücken, welche wir hier aufstellen wollen, treten als Endradicale die p^{ten} Wurzeln aus gewissen Grössen v auf. Die Darstellung dieser Grössen v durch Radicale ist dann als ein einfacheres Problem zu betrachten und kommt ebenfalls auf die

¹⁾ »Über die durch Radicale auflösbaren Gleichungen, deren Grad eine Potenz von 2 ist«. Öfversigt af Kongl. Vet.-Akad. Förh. 1901. N:o 7.

Lösung von primitiven metacyklischen Gleichungen zurück. Geben wir nun auch als Wurzeln der letzteren Gleichungen Ausdrücke in der in dieser Note zu erörternden Weise, so erhalten wir am Ende Radicalausdrücke aus rationalen Grössen, welche die Wurzeln einer Gleichung von beliebiger metacyklischer Gruppe liefern können.

Die Grössen v , welche wir einführen wollen, charakterisieren wir durch m Indices $z_1, z_2, \dots z_m$, welche unabhängig von einander die Zahlen $0, 1, \dots p-1$ durchlaufen, doch so, dass die Combination $z_1 = z_2 = \dots = z_m = 0$ unzulässig ist. Die Anzahl der Grössen $v_{z_1, z_2, \dots z_m}$ ist mithin $p^m - 1$. In ganz entsprechender Weise sollen $t_1, t_2, \dots t_m$ Zahlen aus derselben Reihe $0, 1, \dots p-1$ bedeuten, so dass man ebenfalls $p^m - 1$ zulässige Combinationen $t_1, t_2, \dots t_m$ erhält. Zu jeder Combination der t_i bestimmen wir alle Lösungen der $p-1$ Congruenzen

$$(1) \quad t_1 z_1 + t_2 z_2 + \dots + t_m z_m \equiv q \pmod{p} \quad [q = 1, 2, \dots p-1].$$

Es lässt sich leicht nachweisen, dass jede solche Congruenz p^{m-1} Lösungen besitzt, oder eben so viele, wie die Congruenz, welche entsteht, wenn $q = 0$ gesetzt wird, falls die Lösung $z_1 = z_2 = \dots = z_m = 0$ mitgezählt wird. Hiermit haben wir aus den Grössen $v_{z_1, z_2, \dots z_m}$ auf $p^m - 1$ Weisen $p-1$ Aggregate von je p^{m-1} Grössen herausgenommen. Die in Aussicht genommene Wurzeldarstellung wird sich hinsichtlich dieser Aggregate symmetrisch verhalten, wie jetzt ausgeführt werden soll.

Unter der Voraussetzung, dass die Grössen v einer Gleichung genügen, deren Gruppe wir späterhin näher charakterisieren wollen, liefert nun der folgende Ausdruck

$$(2) \quad a + \sum_{t_1, t_2, \dots t_m} F_{t_1, t_2, \dots t_m} \prod_{z_1, z_2, \dots z_m} \left[\sqrt[p]{v_{z_1, z_2, \dots z_m}} \right]^q$$

eine Wurzel einer primitiven metacyklischen Gleichung des Grades p^m . Die Summation wird über die $p^m - 1$ zulässigen Combinationen der t_i ausgedehnt, und in jedem Gliede wird die Potenz q , zu welcher die p^{te} Wurzel aus einer Grösse $v_{z_1, z_2, \dots z_m}$

erhöht werden soll, durch die zugehörige Congruenz (1) bestimmt. Es bezeichnet a eine rationale Grösse, und F_{t_1, t_2, \dots, t_m} eine in den Grössen v rationale Funktion, welche sich in Bezug auf solche Grössen v symmetrisch verhält, die bei der bezüglichen Wahl der t_i zu demselben q gehören. Aus einer Funktion F_{t_1, t_2, \dots, t_m} soll eine beliebige andere erhalten werden können, indem die zu den einzelnen q gehörigen Aggregate der v durch die entsprechenden Aggregate bei der neuen Combination der t_i ersetzt werden.

Giebt man den Radicalen $\sqrt[p]{v_{t_1, t_2, \dots, t_m}}$ andere Werte, indem man p^m Einheitswurzeln als Factoren hinzufügt, so geht (2) in neue Ausdrücke über; doch bekommt man in solcher Weise nur p^m verschiedene Ausdrücke, was eben in Übereinstimmung mit der Gradzahl der metacyklischen Gleichung steht, um deren Wurzeln es sich handelt. In der That lässt sich aus einem beliebigen Anfangswerte jeder andere durch Änderung der m Radicale $\sqrt[p]{v_{1, 0, \dots, 0}}, \sqrt[p]{v_{0, 1, \dots, 0}}, \dots, \sqrt[p]{v_{0, 0, \dots, 1}}$ herleiten, bei denen ein einziger Index = 1, die übrigen = 0 sind. Es ist ja aus der Bildung von (2) klar, dass der Ausdruck dieselbe Änderung erleidet, falls man zwei Reihen von Radicalen $\sqrt[p]{v_{t_1, t_2, \dots, t_m}}$ mit einem Factor $e^{\frac{2k\pi i}{p}}$ multipliziert, wenn nur für $i = 1, 2, \dots, m$ die m Summen $\sum t_i$ in den beiden Reihen nach dem Modul p übereinstimmen; wird hierbei ein Radical mehrmals gezählt, so bedeutet dies nur, dass bei diesem Radicale die Einheitswurzel $e^{\frac{2k\pi i}{p}}$ eben so viele Male als Factor hinzutritt. Giebt man also den oben aufgezählten m Radicalen die bez. Factoren $e^{\frac{2ka_1\pi i}{p}}, e^{\frac{2ka_2\pi i}{p}}, \dots, e^{\frac{2ka_m\pi i}{p}}$, so hat dies auf (2) dieselbe Wirkung, als ob man das Radical $\sqrt[p]{v_{a_1, a_2, \dots, a_m}}$ mit dem Factor $e^{\frac{2k\pi i}{p}}$ multipliziert. Hieraus folgt in Übereinstimmung mit unserer obigen Behauptung, dass man alle Werte des Ausdruckes (2) erhält, indem man jene m Radicale ihre bez. p Werte unabhängig von einander durchlaufen lässt und dabei alle übrigen Radicale beliebig fixiert.

Über die Gruppe der Gleichung, als deren Wurzeln die Grössen v auftreten, ist zunächst festzusetzen, dass bei ihr die $p^m - 1$ Glieder der Summe (2) sich geschlossen permutieren sollen, wenn man auf die Verschiedenheit der Werte, welche die Radicale $\sqrt[p]{v}$ annehmen können, keine Rücksicht nimmt. Die Gruppe muss also durch solche Substitutionen in den z_i ausgedrückt werden können, bei denen die $p^m - 1$ Lösungen einer Congruenz (1) in ein entsprechendes System übergehen. Der fraglichen Bedingung genügt die lineare Gruppe L , welche alle Substitutionen von der Gestalt

$$(3) \quad z'_i \equiv a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \dots + a_{im}z_m \quad [i = 1, 2, \dots m]$$

umfasst, bei denen die Substitutionsdeterminante

$$D = |a_{ik}| \equiv \sigma \quad [\sigma = 1, 2, \dots p - 1]$$

ist. In der Tat wird die durch (3) erhaltene Vertauschung der Lösungssysteme der Congruenzen (1) auch durch eine Umordnung der betreffenden Congruenzen bewirkt, indem man in den t_i die transponierte Substitution

$$(4) \quad t_i \equiv a_{i1}t'_1 + a_{i2}t'_2 + \dots = a_{mi}t'_m \quad [i = 1, 2, \dots m]$$

ausführt. Nur für $m = 1$ und für $m = 2, p = 2, 3$ ist aber die allgemeine lineare Gruppe L metacyklisch.¹⁾ Sollen nun die Grössen v durch Wurzelziehen darstellbar sein, so kann in den übrigen Fällen als Gruppe jener Gleichung nur eine Untergruppe von L auftreten. In der Gestalt (2) lassen sich aber die Wurzeln jeder primitiven Gleichung vom Grade p^m darstellen, falls die Gruppe der Gleichung eine ausgezeichnete ABEL'sche G_{p^m} enthält, ohne dass die Hilfspgleichung der Grössen v metacyklisch zu sein braucht.

¹⁾ Wir verweisen hier auf C. JORDAN, *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Paris 1870). Dort findet man, wie man die umfassendsten metacyklischen Untergruppen von L solcher Eigenschaft bestimmen kann, dass die Gleichung vom Grade p^m primitiv wird. Die (letztete) Hälfte dieser Arbeit ist noch die umfassendste Monographie über die metacyklischen Gleichungen. Doch handelt es sich dort fast ausschliesslich um die Gruppen der Gleichungen, nicht, wie hier, um die Darstellung der Wurzeln.

Die Gruppe einer primitiven Gleichung mit einer ausgezeichneten ABEL'schen Gp^m lässt sich bekanntlich durch Erweiterung des Rationalitätsbereiches auf eben diese Gp^m reduzieren, indem man einen gewissen Unterkörper α des durch die Wurzeln der Gleichung bestimmten Körpers adjungiert. Von vornherein wäre man wohl geneigt anzunehmen, dieser Körper α sei mit dem durch die Grössen v definierten Körper $k(v)$ identisch. Es verhält sich aber im Allgemeinen nicht so. Bei dem absoluten Rationalitätsbereich tritt z. B. eine Übereinstimmung der beiden Körper nur für $p = 2$ ein. Erst in dem erweiterten Körper $\alpha(\zeta)$, welchen man erhält, indem man den Körper α mit dem Körper $k(\zeta)$, wo $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, der p^{ten} Einheitswurzeln zusammensetzt, ist nämlich $k(v)$ als Unterkörper enthalten. In Übereinstimmung hiermit ist $k(v)$ nur dann Unterkörper von α , falls letzterer Körper schon die Zahl ζ enthält. Es werden aber in allen übrigen Fällen mit den Grössen v solche Irrationalitäten eingeführt, welche als rationale Funktionen der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung des Grades p^m nicht ausgedrückt werden können; doch gelingt eine solche Darstellung immer, falls man den Rationalitätsbereich in geeigneter Weise vermittelt Adjunktion von in dem Körper $k(\zeta)$ enthaltenen Grössen erweitert.

Enthält α einen umfassenderen Unterkörper von $k(\zeta)$ als den Körper der rationalen Zahlen, so gestalten sich die Verhältnisse übersichtlicher, falls man den Ausdruck (2) durch einen anderen ersetzt, so dass man, den verschiedenen Unterkörpern von $k(\zeta)$ entsprechend, eben so viele verschiedene Ausdrucksweisen für die Wurzeln einer metacyklischen Gleichung bekommt. Hat nämlich der in α enthaltene Unterkörper von $k(\zeta)$ den Grad e , so wird es ausreichen, eine Anzahl von $\frac{p^m - 1}{e}$ Grössen v einzuführen. Doch wollen wir die hierauf bezüglichen Entwicklungen auf spätere Publicationen verschieben.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 660.)

- Berlin.** *Deutsche geologische Gesellschaft.*
Zeitschrift. Bd 53 (1901): H. 2. 8:o.
- *Deutsche physikalische Gesellschaft.*
Die Fortschritte der Physik. Jahrg. 56 (1900): Abth. 1—3. 8:o.
- *K. Preussisches meteorologisches Institut.*
Bericht über die Thätigkeit. Jahr 1900. 8:o.
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen 2. und 3. Ordnung.
Jahr 1896: H. 3. 4:o.
- *K. Sternwarte.*
Beobachtungs-Ergebnisse. H. 9. 1901. 4:o.
- *Entomologischer Verein.*
Berliner entomologische Zeitschrift. Bd 46 (1901): H. 2—3. 8:o.
- Bruxelles.** *Musée du Congo.*
Annales. Zoologie. Sér. 1. T. 2: Fasc. 1. 1901. Fol.
Mission scientifique du Ka-Tanga. Mém. 12—15. 1900. 4:o.
WILDEMAN, É., Les Caféiers. 1. 1901. 8:o.
- *Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie.*
Bulletin. T. 14 (1900): Fasc. 5. 8:o.
- Buenos Aires.** *Sociedad científica Argentina.*
Anales. T. 52 (1901): Entr. 1. 8:o.
- Calcutta.** *Indian museum.*
ALCOCK, A., Catalogue of the Indian Decapod Crustacea in the coll.
of the Indian Museum. P. 1 (Brachyura): Fasc. 1. 1901. 4:o.
- Cambridge, Mass.** *Museum of comparative zoology.*
Memoirs. Vol. 25: No. 1. 1901. 4:o.
- Chambésy.** *Herbier Boissier.*
Bulletin. (2) T. 1 (1901): N:o 10. 8:o.
- Charlottesville.** *Leander McCormick Observatory of the univ. of Virginia.*
Publications. Vol. 2: P. 1. 1901. 8:o.
- Chicago.** *Field Columbian Museum.*
Publications. 55—59. 1901. 8:o.
- Cincinnati.** *Lloyd Library.*
Bulletin. N:o 2. 1901. 8:o.
- Dorpat.** *Meteorologisches Observatorium.*
Meteorologische Beobachtungen. 1900. 8:o.
- Edinburgh.** *R. Physical society.*
Proceedings. Sess. 1899/1900. 8:o.
- Erfurt.** *K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften.*
Jahrbücher. N. F. H. 27. 1901. 8:o.
- 's-Gravenhage.** *Commission géologique Néerlandaise.*
STEIN, J. W. J. A., Beobachtungen zur Bestimmung der Breiten-
variation in Leiden ... 1899/1900. 1901. 4:o.
- Göttingen.** *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Philol.-hist. Klasse. N. F. Bd 3: N:o. 2; 4: 4. 1901. 4:o.

Halle a. S. *Verein für Erdkunde.*

Mitteilungen. 1901. 8:o.

Hamburg. *Deutsche Seewarte.*

Aus dem Archiv der deutschen Seewarte. Jahrg. 23 (1900). 4:o.

— *Hamburger Sternwarte.*

Mittheilungen. N:o 7. 1901. 8:o.

SCHORR, R., *Die Hamburger Sternwarte.* 1901. 8:o.

Helsingfors. *Statistiska centralbyrån.*

Statistisk årsbok för Finland. Årg. 22 (1901). 8:o.

Hew. *Royal botanic gardens.*

Bulletin of miscellaneous information. 1901: Nos. 169—177 & Append.
4. 8:o.

Kjöbenhavn. *Direktionen for Carlsbergfondet.*

Oversigt over Carlsbergfondets Virksomhed siden dets Stiftelse 25.
Sept. 1876. 1901. 4:o.

— *Carlsberg-Laboratoriet.*

Meddelelser. Bd 5: Extra Hefte. 1901. 8:o.

— *Det danske meteorologiske Institut.*

Meteorologisk Aarbog. 1899: D. 2. Fol.

Krakau. *Académie des sciences.*

Bulletin international. Cl. des sc. math. et nat. 1901: N:r 6. 8:o.

Rozprawy. Wydział hist.-filozoficzny. (2) T. 15. 1901. 8:o.

La Plata. *Facultad de ciencias físico-matem. de la Universidad.*

Publicaciones. No. 1. 1901. 8:o.

Liège. *Société géologique de Belgique.*

Annales. T. 28 (1901): Livr. 3. 8:o.

Linz. *Museum Francisco-Carolinum.*

Jahres-Bericht. 59 (1900/1901). 8:o.

London. *The Wellcome chemical research laboratories.*

N:o 20. 1901. 8:o.

— *Chemical society.*

Journal. Vol. 79—80 (1901): 10. 8:o.

— *Royal Society.*

Proceedings. Vol. 68 (1901): N:o 450. 8:o.

London, Ontario. *Entomological society.*

The Canadian Entomologist. Vol. 33 (1901): N:o 9. 8:o.

Madrid. *R. Academia de ciencias exactas, físicas y naturales.*

Memorias. T. 14. 1900—1901. 8:o.

Manchester. *Literary and philosophical society.*

Memoirs and proceedings. Vol. 45 (1900/1901): P. 4. 8:o.

Melbourne. *Royal society of Victoria.*

Proceedings. N. S. Vol. 14 (1901): P. 1. 8:o.

Mexico. *Sociedad científica »Antonio Alzate».*

Memorias y revista. T. 13 (1899): Núms. 1—2; 15 (1900/01): 7—10.
8:o.

Milano. *R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.*

Memorie. Cl. di scienze mat. e nat. Vol. 18: Fasc. 11; 19: 1—4.
1900—1901. 4:o.

Rendiconti. (2) Vol. 33. 1900. 8:o.

Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. 1901. Årg. 58. N:o 8.

Montevideo. *Museo Nacional.*

Anales. T. 3: Entr. 20. 1901. 8:o.

Moscou. *Société imp. des naturalistes.*

Bulletin. Année 1900: N:o 4. 8:o.

München. *K. B. Akademie der Wissenschaften.*

Abhandlungen. Hist. Classe. Bd 22: Abth. 1. 1901. 4:o.

» Math.-phys. Classe. Bd 21: Abth. 2. 1901. 4:o.

RIGGAUER, H., Über die Entwicklung der Numismatik u. der numismatischen Sammlungen im 19. Jahrh. Festrede ^{14/11} 1900. 4:o.

V. ZITTEL, K. A., Ziele u. Aufgaben der Akademien im 20. Jahrh. Rede ^{14/11} 1900. 4:o.

Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*

Rendiconto. (3) Vol. 7 (1901): Fasc. 7. 8:o.

Ottawa. *Field-naturalists' club.*

The Ottawa Naturalist. Vol. 15 (1901): N:o 6. 8:o.

— *Royal Society of Canada.*

Proceedings and Transactions. (2) Vol. 6 (1900). 8:o.

Paris. *Bureau central météorologique.*

Annales. Année 1898: 1-3. 4:o.

— *École des mines.*

Annales. T. 18 (1900): Livr. 12; 19 (1901): 1-3. 8:o.

— *Observatoire.*

Atlas photographique du la lune. Fasc. 5: Text & Atlas. 4:o & Fol.

— *Société de géographie.*

La Géographie. Année 1901: N:o 9. 8:o.

— *Société géologique de France.*

Bulletin. (3) T. 27 (1899): N:o 6. 8:o.

Philadelphia. *American philosophical society.*

Proceedings. Vol. 40 (1901): N:o 166. 8:o.

Prag. *K. k. Sternwarte.*

Magnetische u. meteorologische Beobachtungen. Jahrg. 61 (1900). 4:o.

Rio de Janeiro. *Jardin botanique.*

Contributions. Vol. 1: N. 1-2. 4:o.

RODRIGUES, J. BARBOSA, Palmæ Hasslerianæ novæ ... 1900. 4:o.

— As heveas ou seringueiras. 1900. 4:o.

— *Observatorio.*

Annuario. Anno 17 (1901). 8:o.

Roma. *Reale accademia dei Lincei.*

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Rendiconti. (5) Vol. 10 (1901): Sem. 2: Fasc. 5-6. 8:o.

— *R. Comitato geologico d'Italia.*

Bollettino. Anno 1901: N. 2. 8:o.

Rousdon. *Observatory.*

Meteorological observations. Vol. 17 (1900). 4:o.

San Francisco. *Astronomical society of the Pacific.*

Publications. Vol. 13 (1901): N. 79. 8:o.

Sydney. *Australian museum.*

Records. Vol. 4: No 3-4. 1901. 8:o.

Sydney. *Geological survey of New South Wales.*

Memoirs. Geology. No. 2. 1901. 4:o.

PITTMAN, E. F., The mineral resources of New South Wales. 1901. 8:o.

Torino. *Laboratoire de physiologie de l'université.*

Travaux. Années 1899—1900. 8:o.

Toronto. *Canadian Institute.*

Transactions. Vol. 7 (1901): P. 1. 8:o.

Washington. *U. S. Weather Bureau.*

Monthly weather review. 1901: 6. 4:o.

— *U. S. Department of agriculture.*

Division of biological survey. North American Fauna. No. 20. 1901. 8:o.

Division of chemistry. Bulletin. No. 63. 1901. 8:o.

Division of entomology. Technical Series. N:o 9. 1901. 8:o.

Office of experiment stations. Experiment station record. Vol. 13: No. 2. 1901. 8:o.

Section of foreign markets. Bulletin. No. 24—25. 1901. 8:o.

Division of soils. Bulletin. No. 18. 1901. 8:o.

Division of vegetable physiology and pathology. Bulletin. No. 28. 1901. 8:o.

Wien. *Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse.*

Schriften. Bd 41 (1900/1901). 8:o.

Zürich. *Naturforschende Gesellschaft.*

Vierteljahrsschrift. Jahrg. 46 (1901): H. 1—2. 8:o.

Af Løjtnant H. Sandeberg.

LINDBLAD, M. A., Svampbok. Bearb. af L. Romell, jämte anvisn. om svampars insaml., förvaring... af H. Sandeberg. Stockholm 1901. 8:o.

Af utgifvarne:

La Feuille des jeunes naturalistes, publ. par M. A. DOLLFUS. (4) Année 31 (1901): N:o 372. 8:o.

Af författarne:

GRÖNBERG, G., Die Ontogenese eines niedern Säugergehirns. Jena 1901. 8:o.

NATHORST, A. G., A. E. Nordenskiöld. Gotha 1901. 4:o.

— Bidrag till Kung Karls lands geologi. Sthlm 1901. 8:o.

DE FIGUEROA, R. P., El conde de Cañete del Pinar y el sextante de reflexión. Madrid 1901. 8:o.

GAUDRY, A., Sur la similitude des dents de l'homme et de quelques animaux. Paris 1901. 8:o.

HINRICHS, G. D., The absolute atomic weights of the chemical elements... St. Louis 1901. 8:o.

WILD, H., Über den Föhn und Vorschlag zur Beschränkung seines Begriffs. Zürich 1901. 4:o.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 58.

1901.

N^o 9.

Onsdagen den 18 November.

INNEHÅLL:

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 679.
BOTHÉN, C. O., Ytterligare ett fynd af Större Skrikörnen (<i>Aquila clanga</i>) i Sverige	» 681.
CAVALLIN, C. B. S., Contributions to the theory of the secular perturbations of the planets.	» 685.
KLASON, P. och KÖHLER, J., Öfver ammoniumparamolybdatets inverkan på natriumbitartrats specifika vridning af polariseradt ljus	» 709.
BOHLIN, K., Sur l'extension d'une formule d'EULER et sur le calcul des moments d'inertie principaux d'un système de points matériels	» 715.
Skänker till Akademiens bibliotek	sidd. 680, 684, 708, 720.

Tillkännagafs att bland Akademiens utländske ledamöter professorn vid John Hopkins Universitetet i Baltimore HENRY A. ROWLAND samt geheimekonferensrådet i Köpenhamn CARL FREDRIK TIETGEN med döden afgått.

Till professor och intendent vid det Naturhistoriska Riksmuseets mineralogiska afdelning kallades och antogs f. d. professorn vid Upsala Universitet Fil. Dr HJALMAR SJÖGRÉN.

Den disponibla årsräntan å Wallmarkska donationen beslöt Akademien fördela i två lika stora delar, af hvilka den ena tillerkändes Observatorn vid Upsala observatorium Fil. Dr ÖSTEN BERGSTRAND för hans i Akademiens skrifter under tiden 1896—1900 införda astrofotografiska arbeten, och den andra professorn i oftalmiatrik vid Upsala Universitet Fil. Dr ALVAR GULLSTRAND för hans under år 1900 utgifna arbete: Allgemeine

Theorie der monochromatischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie.

Utaf Regnells zoologiska gåfvomedel beslöt Akademien utdela följande understöd:

åt Docenten O. CARLGREN 600 kronor för fortsatt bearbetning af Riksmuseets Anthozoeer;

åt Fil. Doktor Y. SJÖSTEDT 600 kronor för fortsatt bearbetning af Riksmuseets samlingar af Orthoptera från Kamerun;

åt Fil. Doktor GÖSTA GRÖNBERG 500 kronor för undersökningar angående orsaker, som bestämma afkommans kön.

Genom anställt val kallade Akademien till inländsk ledamot af sjette klassen professorn och intendenten vid Naturhistoriska Riksmuseum Fil. Dr. EDVARD JOHAN GERHARD HOLM samt till inländsk ledamot af åttonde klassen öfverståthållaren i Stockholms stad Friherre CLAES GUSTAF ADOLF TAMM.

På tillstyrkan af kommitterade antogos följande inlämnade afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter:

i Bihanget till Akademiens Handlingar: 1:o) Elektriska svängningar af mycket hög frekvens af Fil. Lic. K. R. JOHNSON; 2:o) Sur les facteurs démagnétisants des cylindres af Fil. Kand. C. BENEDICKS; 3:o) Om o-aminobenzolsulfonsyreamid, derivat till densamma och om diazsulfoninföreningar 1. af amanuensen ALFRED EKBOM; 4:o) Die Blüteneinrichtungen einiger südamerikanischen Pflanzen. 1. Leguminosæ af lektor C. A. M. LINDMAN; 5:o) Untersuchungen über den Polarabstand magnetisirter Cylindern af Fil. Kand. C. BENEDICKS;

i Öfversigten: de i innehållsförteckningen upptagna fyra uppsatserna.

Följande skänker anmälades:

Till Berzelius Museet:

af professor A. W. CRONQUIST:

En lampa; en kristallmortel; en mindre Woulfs flaska, blåst för lampa; 2 porslinstrattar och en vågskål, som alla tillhört Frih. Berzelius. af f. d. statsgeologen AXEL LINDSTRÖM:

En mindre byst af Berzelius, modellerad af Sjöstrand.

(Forts. å sid. 684.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1901. N:o 9.
Stockholm.

Ytterligare ett fynd af Större Skrikörnen (*Aquila clanga*) i Sverige.

Af C. O. BOTHÉN.

(Meddeladt den 13 November 1901 genom F. SMITT.)

Till de fynd af denna art, som förut blifvit gjorda här i Sverige, kan nu läggas ännu ett, hvilket har sitt förnämsta intresse deruti, att det blifvit gjordt i en del af landet, der denna fogel veterligen aldrig förr blifvit anträffad.

Hos Göteborgs Jagtsällskap uttogs nemligen i dag (den ¹⁶/₁₀) skottpenningar för en skrikörn, som i går — således den 15 Oktober 1901 — skjutits i Fässberg, straxt söder om Göteborg.

Exemplaret, som var en särdeles vacker unghona, blef naturligtvis tillvarataget och är nu under uppstoppning hos Konservator GUSTAF KIHLEN för att, som jag hoppas, sedermera införlifvas med Göteborgs Museum.

Rörande fogelns utseende har jag — i dess färska tillstånd — gjort följande anteckningar.

Total längd	721	mm.
Stjertens midt-längd	285	»
» sido-längd	259	»
» längd utöfver de hoplagda vingarne	9	»
Hufvudets längd, med näbben	114	»
Från munviken till underkäkens spets	57	»
» näsborrens framkant till öfverkäkens spets	31	»

Näbbens höjd vid näsborrens framkant	24 mm.
» bredd	16 »
Vaxhudens bredd från pannan	15 »
Ögats diameter	15 »
Vingbredd	1712 »
Vingens längd — från handlof till vingspetsen . . .	464 »
Tarsens längd — från häl till fotsula	119 »

Iris mörk, ockergul. Tårna citrongula. Näbbet utåt svart, inåt vaxhuden öfvergående i blågrått. Vaxhuden och munviken mörkt citrongula.

Tarserna rundt om fjäderklädda ända ned till tåleden.

Hufvudet ofvan svartbrunt med något mera i brunt stötande fjäderspetsar, i synnerhet på bakhufvudet; på sidorna helt svartbrunt utan ljusare fjäderspetsar. Nackens ganska spetsiga fjädrar svartbruna med mörkt ockerbruna spetsar. Halsryggen och ryggen likadana, men med större fläckar, hvilka nedåt öfvergumpen blifva dels ljusare ockergula och dels så stora, att de på en del fjädrar äro ända till 37 m.m. långa och 9 m.m. breda. Skulderfjädrarne likaledes svartbruna med droppformade ockergula fläckar på spetsarne. Äfven vingtäckfjädrarne äro färgade på samma sätt, ehuru de droppformade, ockergula fläckarne på de öfversta fjädrarne äro så små och fina, att de snarast se ut som små strimmor, men längre ner på vingen blifva allt större och större, tills de slutligen uppnå en storlek af 39 m.m. i längd och 26 m.m. i bredd; och samtidigt blifva de allt ljusare och ljusare, ju större de blifva, så att de största fläckarne äro mycket ljusst grågula. Armpennorna äro svartbruna, de innersta med ganska stora i gulgrått stötande fläckar vid spetsen, hvilka fläckar på de yttre armpennorna blifva dels mörkare och dels allt mindre och mindre, så att de på de närmast handpennorna sittande endast bilda en något ljusare kant rundt sjelfva pennans spets. Handpennorna äro svarta utom de 3 innersta, hvilka hafva nästan samma färg som de dem närmast sittande armpennorna, till och med ändå något ljusare. Alla så väl hand- som armpennor hafva ljusare infan, uti hvilka finnas mörka,

tväreställda små fläckar, som gå nästan in till sjelfva spolen. Härigenom kommer vingen, då den är utspänd, att se ut som om den på undersidan vore försedd med 8 å 10 smala, mörka tvärband. Öfre stjert-täckfjädrarne äro utåt hvitgula, inåt mörkt gulbruna, öfvergående till rent brunt. Stjerten är svartbrun med i grågult stötande fjäderspetsar, hvarigenom på stjertens undersida bildas ett 24 m.m. bredt, grågult band i sjelfva stjertspetsen.

Hakan är mörkt gråbrun; strupen likadan, men med mörkt rostbruna fjäderspetsar. Bröst, mage och sidor mörkt bruna med aflånga, utåt spetsiga, rostbruna fläckar, som nedåt kroppen blifva allt större, och slutligen vid undergumpen så stora, att hela fjädrarne, med undantag af ett mörkt smalt band, täckas af den rostbruna färgen, hvarigenom hela undergumpen ser ut att vara rostbrun. De undre stjert-täckfjädrarne äro ljust rostgula. Skänkelfjädrarne äro svartbruna med ganska stora, aflånga, ockergula fläckar på hvarje fjäder. De tarsen täckande fjädrarne äro likaledes svartbruna med en liten, smal, gråhvit kant nere vid tåleden.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts från sid. 680.)

Stockholm. *K. Vitterhets historie och antiquitets akademien.*

Handlingar. D. 33: 1. 1901. 8:o.

Månadsblad. Årg. 25 (1896). 8:o.

— *K. Statistiska Centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. I: N.F. 40; L: 39 a.; M: 37;

U: XXXV. 1899—1900. 4:o.

— *Entomologiska föreningen.*

Uppsatser i praktisk entomologi. 11. 1901. 8:o.

— *Karolinska mediko-kirurgiska institutet.*

1 dissertation. 1901. 4:o.

— *Sjökarteverket.*

Svenske Lotsen 1894: Tillägg N:o 7. 1901 ¹⁰/₄. 8:o.

— *Svenska sällskapet för Antropologi och Geografi.*

Ymer. Årg. 21 (1901): H. 3. 8:o.

— *Svenska trädgårdsföreningen.*

Tidskrift. N. F. 1901: N:o 6—8. 8:o.

Göteborg. *K. Vetenskaps- och Vitterhetssamhället.*

Handlingar. (4) H. 3. 1901. 8:o.

Lund. *Astronomiska observatoriet.*

Meddelanden. Ser. 2. N:r 2. 1901. 4:o.

— *Universitetet.*

Årsberättelse 1900/1901. 4:o.

Acta. 36 (1900): Afd. 1. 4:o.

Malmö. *Museum.*

Malmö museum 1851—1901. En minnesskrift af H. E. Larsson. 1901. 4:o.

Amerikas Förenta Stater. *American microscopical society.*

Transactions. Annual meeting 23 (1900, New York). 8:o.

Amsterdam. *Wiskundig genootschap.*

Wiskundige opgaven met de oplossing. D. 8: St. 4. 1901. 8:o.

Baltimore. *Maryland geological survey.*

Eocene. 1901. 8:o.

Physical atlas of Maryland. Allegany country: Text & Atlas. 1900. 8:o & Fol.

— *Peabody academy of science.*

Origin and objects of the institution, its museum. 1891. 8:o.

Bamberg. *Naturforschende Gesellschaft.*

Bericht. 18 (1900 01). 8:o.

Berlin. *K. Preussische Akademie der Wissenschaften.*

Acta Borussica. Bd 6: 1—2. 1901. 8:o.

— *K. botanischer Garten und Museum.*

Notizblatt. N:o 27. 1901. 8:o.

(Forts. & sid. 708.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1901. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium. N:o 19.

Contributions to the theory of the secular perturbations of the planets.

By C. B. S. CAVALLIN.

(Communicated 13 November 1901 by C. V. L. CHARLIER.)

The fundamental formulas, from which this research issues, are the following:

$$\text{and} \quad \left. \begin{aligned} e \cos \pi &= \sum_{i=1}^n A_i \cos (g_i t + \beta_i) \\ e \sin \pi &= \sum_{i=1}^n A_i \sin (g_i t + \beta_i) \end{aligned} \right\}, \quad (\text{I})$$

where e denotes the excentricity and π the longitude of the perihelion of the planet in question, t the time and the A , g and β are certain real constants, the former being positive.

The question is to determine e and π as functions of t .

When one of the constants A , say A_r , satisfies the condition

$$A_r > A_1 + A_2 + \dots + A_{r-1} + A_{r+1} + \dots + A_n \quad (\text{I}')$$

it is easy to show that, for all t ,

$$\pi = g_r t + \text{a finite function.} \quad (\text{I}'')$$

In this case g_r is the mean velocity with which π increases with t .

The condition (I') is valid, and therefore also the formula (I''), for all planets within our system, with the exception of the Earth, Venus and about a dozen of the small planets.

Again, when the condition (I') is not satisfied, no explicit formula is up to this time given for the determination of the mean motion.

Generally it is said, that no mean motion exists in this case.

In the following it will however be demonstrated, that at all events there exists a mean motion, limited by the greatest and the least g_i . Methods will also be given for its determination.

The solution of the above system of equations (I) is a special case of the solution of the following purely mathematically formulated question:

When

$$re^{i\theta} = \sum_{r=1}^n A_r e^{i g_r t}, \quad (1)$$

where the constants A_r are all significative and in general imaginary, the constants g all real and t a real variable; to determine the modulus r and the argument θ as functions of t .

No loss of generality arises, if we assume the constants g_r all unequal, for if two or more terms contain the same g , these terms may be joined to one.

Besides we at first assume all the g positive and put

$$g_1 > g_2 \dots > g_n. \quad (2)$$

As convergents to the constants

$$g_1, g_2, \dots, g_n \quad (3)$$

we assume the fractions with common denominator

$$\frac{m_1}{m}, \frac{m_2}{m}, \dots, \frac{m_n}{m}, \quad (4)$$

which we suppose to be reduced to their lowest terms.

Moreover we assume these convergents to be so accurate that conformably to (2) the inequalities

$$m_1 > m_2 \dots > m_n \quad (5)$$

also take place.

Further we assume

$$r_1 e^{i\theta_1} = \sum_{r=1}^n A_r e^{i \frac{m_r}{m} t} \quad (6)$$

so that, when the convergents (4) converge against the values (3), the modulus r_1 and the argument θ_1 converge against the modulus r and the argument θ , and the equation (6) thus in the limit coincides with the equation (1).

Putting

$$z = e^{i \frac{t}{m}}$$

the right member of the equation (6) is changed into the rational polynomial in respect to z :

$$\begin{aligned} & A_1 z^{m_1} + A_2 z^{m_2} + \dots + A_n z^{m_n} \\ &= A_1 z^{m_n} \left\{ z^{\mu_1} + \frac{A_2}{A_1} z^{\mu_2} + \dots + \frac{A_n}{A_1} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

where we have assumed

$$\mu_1 = m_1 - m_n, \mu_2 = m_2 - m_n, \dots, \mu_{n-1} = m_{n-1} - m_n, \quad (8)$$

from which it further follows according to (5).

$$\mu_1 > \mu_2 \dots > \mu_n. \quad (9)$$

The expression within brackets in (7) is thus a rational polynomial of the degree μ_1 .

As the equation

$$A_1 u^{\mu_1} + A_2 u^{\mu_2} + \dots + A_n = 0 \quad (10)$$

can not have any root equal to zero, all the coefficients A being assumed significative, its roots may be denoted by

$$e^{i \frac{\lambda_1}{m}}, e^{i \frac{\lambda_2}{m}}, \dots, e^{i \frac{\lambda_{\mu_1}}{m}}, \quad (11)$$

and hence it follows by (6) and (7)

$$\begin{aligned}
 r_1 e^{i\theta_1} &= A_1 e^{i \frac{m_n}{m} t} \prod_{r=1}^{\mu_1} \left(e^{i \frac{t}{m}} - e^{i \frac{\lambda_r}{m}} \right) \\
 &= A_1 e^{i \frac{m_n}{m} t} \prod_{r=1}^{\mu_1} 2i e^{i \frac{t+\lambda_r}{2m}} \frac{e^{i \frac{t-\lambda_r}{2m}} - e^{-i \frac{t-\lambda_r}{2m}}}{2i} \\
 &= C e^{i \frac{2m_n + \mu_1}{2m} t} \prod_{r=1}^{\mu_1} \sin \frac{t - \lambda_r}{2m},
 \end{aligned} \tag{12}$$

where C is a constant the value of which we do not need to determine.

Thus we get since by (8)

$$\begin{aligned}
 2m_n + \mu_1 &= 2m_n + m_1 - m_n = m_1 + m_n, \\
 r_1 e^{i\theta_1} &= C e^{i \frac{m_1 + m_n}{2m} t} \prod_{r=1}^{\mu_1} \sin \frac{t - \lambda_r}{2m}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

By logarithmic differentiation of both members of (13) we get

$$\frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{dt} + i \frac{d\theta_1}{dt} = i \frac{m_1 + m_n}{2m} + \frac{1}{2m} \sum_{r=1}^{\mu_1} \cot \frac{t - \lambda_r}{2m}. \tag{14}$$

As r_1 and θ_1 respectively constitute the modulus and the argument of the right member of (6) they are both real and thus also $\frac{dr_1}{dt}$ and $\frac{d\theta_1}{dt}$.

Comparing real and imaginary parts in both members of (14) we arrive at the formulas

$$\frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{dt} = \frac{1}{2m} R \sum_{r=1}^{\mu_1} \cot \frac{t - \lambda_r}{2m} \tag{15}$$

and

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{m_1 + m_n}{2m} + \frac{1}{2m} R \frac{1}{i} \sum_{r=1}^{\mu_1} \cot \frac{t - \lambda_r}{2m}, \tag{16}$$

where the symbol R has the meaning: »the real part of».

If we had differentiated the equation (6) directly in the same manner we should have obtained

$$\frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{dt} = Ri\varphi \left(e^{i \frac{t}{m}} \right) \quad (17)$$

and

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{m_1 + m_n}{2m} + R\varphi \left(e^{i \frac{t}{m}} \right), \quad (18)$$

where we have introduced the abridged notation

$$\varphi \left(e^{i \frac{t}{m}} \right) = \frac{\sum_{r=1}^{\mu_1} A_r \frac{m_r}{m} e^{i \frac{m_r}{m} t}}{\sum_{r=1}^{\mu_1} A_r e^{i \frac{m_r}{m} t}}, \quad (19)$$

because this function will be frequently used in the following.

The points of infinity of the cotangent being all real, $\cot \frac{t - \lambda_r}{2m}$ can only become infinite, when λ_r is real — t being a real quantity.

But when λ_r is real we have

$$R \frac{1}{i} \cot \frac{t - \lambda_r}{2m} = 0$$

and hence the sum in the right member of (16) *always has a finite value.*

When λ_r is real the modulus of $e^{i \frac{\lambda_r}{m}}$ is unity. On the contrary for λ_r imaginary the modulus of the corresponding root is greater or less than unity according as $Ri\lambda_r$ is positive or negative.

In order to find a development of $\cot \frac{t - \lambda_r}{2m}$ when λ_r is imaginary we start from the relations

$$\cot \frac{t - \lambda_r}{2m} = \pm i \frac{1 + e^{\mp i \frac{t - \lambda_r}{m}}}{1 - e^{\mp i \frac{t - \lambda_r}{m}}}.$$

Using the relation

$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{n-1} + 2\frac{z^n}{1-z}$$

we thus get

$$\begin{aligned} & \cot \frac{t - \lambda_r}{2m} \\ &= \pm i \pm 2i \left\{ e^{\mp i \frac{t - \lambda_r}{m}} + e^{\mp 2i \frac{t - \lambda_r}{m}} + \dots + e^{\mp (n-1)i \frac{t - \lambda_r}{m}} \right\} \\ & \quad \pm 2i \frac{e^{\mp ni \frac{t - \lambda_r}{m}}}{1 - e^{\mp ni \frac{t - \lambda_r}{m}}}, \end{aligned}$$

where we take the upper or lower sign according as $\left| e^{i \frac{\lambda_r}{m}} \right|$ is less or greater than unity.

In both cases the remainder vanishes for $n = \infty$ and we obtain

$$\cot \frac{t - \lambda_r}{2m} = \pm i \pm 2i \sum_{n=1}^{\infty} e^{\mp ni \frac{t - \lambda_r}{m}}. \quad (20)$$

With the aid of the relation (20) the equation (16) is transformed into

$$\begin{aligned} & \frac{d\theta_1}{dt} \\ &= M + \frac{1}{m} R \Sigma \sum_{n=1}^{\infty} e^{ni \frac{\lambda_r}{m}} e^{-ni \frac{t}{m}} - \frac{1}{m} R \Sigma'' \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ni \frac{\lambda_r}{m}} e^{ni \frac{t}{m}}, \quad (21) \end{aligned}$$

where

$$M = \frac{m_1}{2m} + \frac{m_n}{2m} + \frac{l' - l''}{2m} \quad (21')$$

and l' and l'' each denote the number of roots the modulus of which is less or greater than unity, and the symbols of summation, Σ and Σ'' , have reference to such roots respectively.

From the significations of the integers l' and l'' it follows that they must satisfy the inequalities

$$0 \leq l', \quad l'' \leq \mu_1 = m_1 - m_n. \quad (22)$$

The greatest value of M occurs according to (21') and (22) when $l' = m_1 - m_n$ and $l'' = 0$, with $\frac{m_1}{m}$; the least value for $l' = 0$ and $l'' = m_1 - m_n$, with $\frac{m_n}{m}$.

Thus: *the greatest and the least M coincides with the greatest and the least of the convergents (4).*

For $l' = l''$, thus specially when $l' = l'' = 0$, with other words in the latter case when all the roots have unity as modulus, we have

$$M = \frac{m_1 + m_n}{2m}. \quad (23)$$

When the equation (10) has an even number of roots, the modulæ of which are not unity, and amongst these the modulus of one root always is the inverse of the modulus of another, then the formula (23) holds good. Particularly this occurs when the equation (10) is reciprocal.

When the right member of the equation (6) consists of two terms we have an excellent example for illustrating the last three results gained, as they are all here represented.

In this case assuming

$$|A_1| > |A_2|, \quad (24)$$

the modulæ of all the roots are less than unity and therefore

$$M = \frac{m_1}{m}. \quad (24')$$

On the contrary if

$$|A_1| < |A_2| \quad (25)$$

the modulæ of all the roots are greater than unity and thus

$$M = \frac{m_2}{m}. \quad (25')$$

Finally if

$$|A_1| = |A_2| \quad (26)$$

the modulæ of all the roots are unity, so that by (23)

$$M = \frac{m_1 + m_2}{2m}. \quad (26')$$

Generally we may anticipate the possibility of determining M as often as the equation (10) is possible to solve. Therefore it ought to be practicable to determine M , when the right member of (6) consists of three terms with the aid of the solution newly found of a trinomial equation.

Integrating both members of (20) between the limits $t = 0$ and $t = t$ and denoting by $\theta_{1,0}$ the value of θ_1 for $t = 0$, we obtain

$$\begin{aligned} & \theta_1 - \theta_{1,0} \\ &= Mt - R \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} e^{n i \frac{\lambda_r}{m}} e^{-n i \frac{t}{m}} \frac{1}{n} - R \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n i \frac{\lambda_r}{m}} e^{n i \frac{t}{m}} \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (27)$$

The series in the right member of (27) having a finite value for all t we thus conclude

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta_1}{t} = M. \quad (28)$$

Now let us introduce a new system of convergents to the constants (3) by changing the convergents (4) into

$$\frac{m'_1}{m'}, \frac{m'_2}{m'}, \dots, \frac{m'_n}{m'} \quad (29)$$

and r_1 and θ_1 into r'_1 and θ'_1 .

Besides we assume these convergents to be so accurate that in accordance with (4) we also have

$$m'_1 > m'_2 \dots > m'_n,$$

and moreover we assume the convergents (4) to be maximim- and the convergents (29) minimim-convergents, so that

$$\frac{m_1}{m} \geq g_1 \geq \frac{m'_1}{m'}, \frac{m_2}{m} \geq g_2 \geq \frac{m'_2}{m'}, \dots, \frac{m_n}{m} \geq g_n \geq \frac{m'_n}{m'}.$$

According to (28) we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta'_1}{t} = M',$$

where M' has a signification analogous to that of M .

If the convergents (4) and (29) are taken accurate enough, θ will be situated between θ_1 and θ'_1 and hence

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta}{t} = \lim M = \lim M' = G.$$

Therefrom we draw the consequence that θ for all t can be expressed in the form

$$\theta = Gt \tag{30}$$

+ one between fixed limits oscillating function.

Also it follows immediately from the preceding that G is confined between g_1 and g_n as limits.

Herewith we have decided a question, about which, in its general form, hitherto uncertainty has prevailed.

Owing to the periodicity of the series in the right member of (27) we get

$$M = \frac{\theta_1(t + 2\pi ml) - \theta_1(t)}{2\pi ml} \tag{31}$$

where l denotes some positive or negative integer and $\theta_1(t)$ is identical with θ_1 .

Assuming $n = 2$ in (1) we get

$$re^{i\theta} = A_1 e^{i\theta_1 t} + A_2 e^{i\theta_2 t},$$

and thus according as we admit the condition (24), (25) or (26) we immediately receive by passing to the limit in (24'), (25') or (26')

$$G = g_1, \quad G = g_2 \quad \text{or} \quad G = \frac{g_1 + g_2}{2}. \tag{32}$$

When the modulus of one of the coefficients A , say A_g , is greater than the sum of the remaining A , it is easy to determine G .

Let ε denote a function, whose value is 0 for $r = q$ and + 1 for $r = 1, 2, \dots, q-1, q+1, \dots, n$; then this condition can be written

$$|A_q| > \sum_{r=1}^n \varepsilon_r |A_r|. \quad (33)$$

We have

$$\begin{aligned} & R \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \log \sum_{r=1}^n A_r e^{i \frac{m_r}{m} t} \\ &= R \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \log \left\{ A_q e^{i \frac{m_q}{m} t} + \sum_{r=1}^n \varepsilon_r A_r e^{i \frac{m_r}{m} t} \right\} \\ &= \frac{m_q}{m} + R \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \log \left\{ 1 + \frac{e^{-i \frac{m_q}{m} t} \sum_{r=1}^n \varepsilon_r A_r e^{i \frac{m_r}{m} t}}{A_q} \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

But in consequence of the condition (33) is

$$\left| \frac{e^{-i \frac{m_q}{m} t} \sum_{r=1}^n \varepsilon_r A_r e^{i \frac{m_r}{m} t}}{A_q} \right| < 1.$$

Consequently the logarithm in (34) can be developed in a convergent series in the manner that we get instead of (34)

$$\begin{aligned} & \frac{m_q}{m} + R \frac{1}{i} \frac{1}{A_q} \frac{d}{dt} \left\{ e^{-i \frac{m_q}{m} t} \sum_{r=1}^n \varepsilon_r A_r e^{i \frac{m_r}{m} t} \right\} \\ & - \frac{1}{2} R \frac{1}{i} \frac{1}{A_q^2} \frac{d}{dt} \left\{ e^{-i \frac{m_q}{m} t} \sum_{r=1}^n \varepsilon_r A_r e^{i \frac{m_r}{m} t} \right\} \\ & + \dots, \end{aligned}$$

where the series in the right member, dependent on the symbol R , after the differentiations are performed only contains terms involving dignities of $e^{\pm i \frac{t}{m}}$.

Hence according to the definition before given to M and by (18) and (19) it follows in the present case

$$M = \frac{m_q}{m} \quad (35)$$

and therefore by passing to the limit

$$G = g, \quad (36)$$

which is the result in (I'') before and in another manner given by LAGRANGE and LAPLACE.

From the value of M given in (21') we see, that if the coefficients in the equation (10) are altered, while the exponents of z remain unchanged, then M only could be altered by means of an alteration of the difference, $l' - l''$, between the number of roots, whose modulæ are respectively less and greater than unity.

We assume, that all the roots, the roots with a modulus equal to unity included, in respect to the magnitude of their modulus can be divided in s groups, the number within each of these groups being assumed to be

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s,$$

so that

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_s = \mu_1. \quad (37)$$

The modulæ of the roots within the same groups we denote with

$$|\varrho_{\sigma_1}|, |\varrho_{\sigma_2}|, \dots, |\varrho_{\sigma_s}|$$

and assume that they are subject to the conditions

$$|\varrho_{\sigma_1}| > |\varrho_{\sigma_2}| \dots > |\varrho_{\sigma_s}|. \quad (38)$$

Now let a be an arbitrary complex quantity and let the coefficients in the right number of (6) be changed into

$$A_1 a^{\mu_1}, A_2 a^{\mu_2}, \dots, A_n a^{\mu_n}, \quad (39')$$

whereby thus the equation (10) is changed into

$$A_1 a^{\mu_1} u^{\mu_1} + A_2 a^{\mu_2} u^{\mu_2} + \dots + A_n = 0. \quad (39)$$

Accordingly this equation by (11) possesses the roots

$$\frac{e^{i \frac{\lambda_1}{m}}}{a}, \frac{e^{i \frac{\lambda_2}{m}}}{a}, \dots, \frac{e^{i \frac{\lambda_{\mu_1}}{m}}}{a}. \quad (40)$$

If $|a|$ differs from unity, we see that none of these roots can have a modulus equal to unity. That is: the equation (39)

can not be satisfied by any root the modulus of which is unity.

From the unequalities (38) it follows corresponding to the roots (40) the unequalities

$$\left| \frac{q_{\sigma_1}}{a} \right| > \left| \frac{q_{\sigma_2}}{a} \right| \dots > \left| \frac{q_{\sigma_\lambda}}{a} \right|. \quad (41)$$

Assuming

$$|a| = |q_{\sigma_\lambda}|$$

these unequalities are transformed into

$$\left| \frac{q_{\sigma_1}}{q_{\sigma_\lambda}} \right| > \left| \frac{q_{\sigma_2}}{q_{\sigma_\lambda}} \right| \dots > \left| \frac{q_{\sigma_{\lambda-1}}}{q_{\sigma_\lambda}} \right| > 1 > \left| \frac{q_{\sigma_{\lambda+1}}}{q_{\sigma_\lambda}} \right| \dots > \left| \frac{q_{\sigma_\lambda}}{q_{\sigma_\lambda}} \right|.$$

Thus we see that the number of roots in (40) possessing a modulus greater than unity is

$$l''(q_{\sigma_\lambda}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{\lambda-1}$$

and a modulus less than unity

$$l'(q_{\sigma_\lambda}) = \mu_1 - (q_1 + q_2 + \dots + q_\lambda),$$

from which thus follows

$$\begin{aligned} & l'(q_{\sigma_\lambda}) - l''(q_{\sigma_\lambda}) \\ &= \mu_1 - 2(q_1 + q_2 + \dots + q_{\lambda-1}) - q_{\sigma_\lambda} \end{aligned} \quad (42)$$

and

$$\begin{aligned} & l'(q_{\sigma_{\lambda+1}}) - l''(q_{\sigma_{\lambda+1}}) \\ &= \mu_1 - 2(q_1 + q_2 + \dots + q_\lambda) - q_{\lambda+1}. \end{aligned} \quad (42')$$

If a has such a value that

$$|q_{\sigma_\lambda}| > |a| > |q_{\sigma_{\lambda+1}}|$$

the unequalities (41) immediately show that

$$\begin{aligned} & l'(a) - l''(a) \\ &= \mu_1 - 2(q_1 + q_2 + \dots + q_\lambda). \end{aligned} \quad (43)$$

A mere glance upon the relations (42), (42') and (43) at once shows that

$$l'(q_{\sigma_1}) - l''(q_{\sigma_1}) > l'(a) - l''(a) > l'(q_{\sigma_{\lambda+1}}) - l''(q_{\sigma_{\lambda+1}})$$

and hence from (21') it follows that

$$M(q_{\sigma_1}) > M(a) > M(q_{\sigma_{\lambda+1}}). \quad (44)$$

From (42) it follows that $M(a)$ increases discontinuously in the same time as $|a|$ continuously increases from

$$|a| < |q_{\sigma_1}| \text{ to } |a| > |q_{\sigma_1}|,$$

and for the rest, as a consequence from (37) and the preceding, with limits for $M(a)$ of

$$M(0) = \frac{m_n}{m} \text{ and } M(\infty) = \frac{m_1}{m}.$$

Thus particularly is

$$M(a_1) \geq M \geq M(a_2), \quad (45)$$

when

$$|a_1| > 1 > |a_2|. \quad (45')$$

It is therefore possible to obtain limits for M , when it succeeds to determine $M(a_1)$ and $M(a_2)$, for instance by (35).

Assuming

$$|q_{\sigma_{\lambda-1}}| > |a| > |q_{\sigma_1}| > |a_2| > |q_{\sigma_{\lambda+1}}|$$

the relation (43) gives

$$\frac{[l'(a_1) - l''(a_1)] + [l'(a_2) - l''(a_2)]}{2} = \mu_1 - 2(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{\lambda-1}) - \sigma_{\lambda}$$

and hence by (42)

$$l'(q_{\sigma_1}) - l''(q_{\sigma_1}) = \frac{[l'(a_1) - l''(a_2)] + [l'(a_2) - l''(a_2)]}{2}$$

and further from (21')

$$M(q_{\sigma_1}) = \frac{M(a_1) + M(a_2)}{2}. \quad (46)$$

For the rest we see that the relation

$$M(a) = \frac{M(a_1) + M(a_2)}{2} \quad (47)$$

always holds good when

$$|a_1| > |a| > |a_2|, \quad (47')$$

$|a|$ may be the modulus of a root or not, provided that $|a_1|$ and $|a_2|$ are situated sufficiently near to $|a|$.

For, if $|a|$ is not the modulus of a root, then as a consequence of (43)

$$M(a_1) = M(a_2) = M(a).$$

Particularly it follows from (47) and (47')

$$M = \frac{M(a_1) + M(a_2)}{2}. \quad (48)$$

with the condition

$$|a_1| > 1 > |a_2|, \quad (48')$$

when $|a_1|$ and $|a_2|$ are situated sufficiently near to unity.

All the propositions we have deduced concerning $M(a)$ also hold for $G(a)$, as immediately follows by passing to the limit.

Thus assuming the condition (48') it follows from (45)

$$G(a_1) \geq G \geq G(a_2) \quad (49)$$

and from (48)

$$G = \frac{G(a_1) + G(a_2)}{2}. \quad (49')$$

Assume in (1) that the right member consists of two terms, and also that the condition

$$|A_1| = |A_2|$$

holds.

Because $g_1 > g_2$, we have then

$$|A_1 a_1^{g_1}| > |A_2 a_1^{g_2}|$$

and

$$|A_1 a_2^{g_2}| < |A_2 a_2^{g_2}|$$

and therefore from the first and second formula in (32)

$$G(a_1) = g_1 \text{ and } G(a_2) = g_2,$$

and hence by (49)

$$G = \frac{g_1 + g_2}{2}, \quad (50)$$

agreeing with the last result in (32).

If we have several polynomials such as

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{r=1}^n A_r e^{ig_r t}, \\ F_1(t) &= \sum_{r=1}^n A_{1,r} e^{ig_{1,r} t} \\ &\dots \dots \dots \\ F_s(t) &= \sum_{r=1}^n A_{s,r} e^{ig_{s,r} t} \end{aligned}$$

and the relation

$$F(t) = F_1(t) F_2(t) \dots F_s(t)$$

holds, and M_1, M_2, \dots, M_s have the same significations in respect to $F_1(t), F_2(t), \dots, F_s(t)$ as M has relating to $F(t)$, then it follows immediately from the preceding that the relation

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_s \quad (51)$$

also holds.

Now the results in (24') and (25') follow from (35) and the result in (26') from (48) with the aid of the two former results. Thus upon the whole the propositions in (24'), (25') and (26') are derivable without the assistance of the formula (21).

From this reason it is possible to determine M in (21') independent of (21).

Indeed, the M corresponding to the elementary factor

$$e^{i \frac{1}{m} t} - e^{i \frac{\lambda_r}{m} t} = e^{i \frac{1}{m} t} - e^{i \frac{\lambda_r}{m} t} e^{i \frac{0}{m} t}$$

in (12), according to (24'), (25') and (26'), has the values $\frac{1}{m}$,

0, $\frac{1}{2m}$ according as $\left| e^{i \frac{\lambda_r}{m} t} \right|$ is less, greater or equal to unity.

Also the M corresponding to the factor $e^{i\frac{m_n}{m}t}$ is $\frac{m_n}{m}$.

Then if l' , l'' and l''' denote the number of roots, whose modulæ are respectively less, greater and equal to unity, we get in consequence of (51)

$$\begin{aligned} M &= \frac{m_n}{m} + l' \cdot \frac{1}{m} + l'' \cdot 0 + l''' \cdot \frac{1}{2m} \\ &= \frac{2m_n + 2l' + l''}{2m} \\ &= \frac{m_1 + m_n + l' - l''}{2m}, \end{aligned}$$

because

$$l' + l'' + l''' = m_1 - m_n.$$

We will now give general formulas for the calculation of $M(a)$.

Changing the coefficients A into the coefficients (39') the roots (11) of the equation (10) are changed into the roots (40) of the equation (39).

In stead of (21) we then obtain according to (18) and (19)

$$\left. \begin{aligned} &R\varphi\left(ae^{i\frac{t}{m}}\right) \\ &= M(a) + \frac{1}{m} R\Sigma' \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} e^{n i \frac{\lambda_r}{m}} e^{-n i \frac{t}{m}} - \frac{1}{m} R\Sigma'' \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{-n i \frac{\lambda_r}{m}} e^{n i \frac{t}{m}}, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

where the symbols of summation, Σ' and Σ'' , operate on those terms respectively in which $\left| e^{i\frac{\lambda_r}{m}} \right|$ is less or greater than unity.

In this equation we put successively $a\sigma_1$, $a\sigma_2$, ..., $a\sigma_k$ in stead of a , where σ_1 , σ_2 , ..., σ_k are the k roots of unity, and add all the equations thus formed.

Owing to the properties of symmetrical functions of roots of unity, and because

$$M(a\sigma_1) = M(a\sigma_2) = \dots = M(a\sigma_k) = M(a),$$

we thus obtain

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{k} R \sum_{i=1}^k \varphi \left(a \sigma_i e^{i \frac{t}{m}} \right) \\ & = M(a) + \frac{1}{m} R \sum_{n=1}^{\infty} a^{-nk} e^{\frac{\lambda_r}{m} nk} e^{-nk i \frac{t}{m}} \\ & \quad - \frac{1}{m} R \sum_{n=1}^{\infty} a^{nk} e^{-\frac{\lambda_r}{m} nk} e^{nk i \frac{t}{m}} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

and hence

$$M(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} R \sum_{i=1}^k \varphi \left(a \sigma_i e^{i \frac{t}{m}} \right) \quad (54)$$

or

$$M(a) = \int_0^1 R \varphi \left(a e^{2\pi i x} e^{i \frac{t}{m}} \right) dx. \quad (55)$$

As a convergent to $M(a)$ and therefore to $G(a)$ we may legitimately assume

$$\frac{1}{k} R \sum_{i=1}^k \varphi \left(a \sigma_i e^{i \frac{t}{m}} \right), \quad (56)$$

or, as this expression for $k = \infty$ must be independent of t , with greater simplicity

$$\frac{1}{k} R \sum_{i=1}^k \varphi(a \sigma_i). \quad (57)$$

The convergent in (56) can with omission of the factor $\frac{1}{k}$ be written

$$R \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \log \prod_{i=1}^k \sum_{r=1}^n A_r a^{m_r} \sigma_i^{m_r} e^{i \frac{m_r}{m} t}.$$

The product

$$\prod_{i=1}^k \sum_{r=1}^n A_r a^{m_r} \sigma_i^{m_r} e^{i \frac{m_r}{m} t}$$

entering in the last expression is a polynomial of the degree μ_1 with respect to $(az)^t$, where $z = e^{i \frac{t}{m}}$.

In fact, by (12)

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^n A_r a^{m_r} e^{i \frac{m_r}{m} t} \\ &= A_1 a^{\mu_1} e^{i \frac{m_n}{m} t} \prod_{r=1}^{\mu_1} \left(e^{i \frac{t}{m}} - e^{i \frac{\lambda_r}{m}} \right) \end{aligned}$$

and hence

$$\begin{aligned} & \prod_{l=1}^k \sum_{r=1}^n A_r a^{m_r} a_l^{m_r} e^{i \frac{m_r}{m} t} \\ &= A_1^k a^{k\mu_1} \prod_{r=1}^k \left\{ e^{i \frac{kt}{m}} - \frac{e^{i \frac{k\lambda_r}{m}}}{a^k} \right\} \\ &= A_1^k \prod_{r=1}^k \left(\overline{az^k} - e^{i \frac{k\lambda_r}{m}} \right), \end{aligned}$$

a polynomial of the degree μ_1 in respect to $\overline{az^k}$.

The coefficients in the polynomial

$$\prod_{r=1}^{\mu_1} \left(\overline{az^k} - e^{i \frac{k\lambda_r}{m}} \right)$$

can by the aid of the formulas of NEWTON be expressed in function of the sum of powers of the roots of the original equation (10) and the latter in their order by means of the formula of WARING directly in function of the coefficients of the same equation.

In this manner we obtain according to (56) a convergent to $M(a)$, in which after the operations are performed we may put $t = 0$, the more accurate the greater k is.

Next we will deduce a relation between $M(a)$ and known functions.

To this purpose we commence by deducing some general propositions.

Assume

$$F(y) = \sum_{s=1}^{\infty} f(sy), \quad (58)$$

where the series is supposed to be absolutely convergent for $y \geq 1$. A first condition for convergence is of course $f(\infty) = 0$.

If d_s denotes the number of divisors in the integer s , the number itself and unity being reckoned amongst them, we immediately find from (58)

$$\sum_{s=1}^{\infty} F(sy) = \sum_{s=1}^{\infty} d_s f(sy). \quad (59)$$

Thus the series

$$\sum_{s=1}^{\infty} s f(sy)$$

converges absolutely, because the series in (58) does so, and as $d_s \leq s$ the series

$$\sum_{s=1}^{\infty} d_s f(sy)$$

and therefore also by (59) the series

$$\sum_{s=1}^{\infty} F(sy) \quad (60)$$

is absolutely convergent.

Now let $\mu(s)$ denote MÖBIUS' coefficient corresponding to the integer s , so that $\mu(s)$ has the value $+1$ for $s=1$ and the value $(-1)^k$, when $s = q_1 q_2 \dots q_k$, q_1, q_2, \dots, q_k being unequal prime numbers and the value 0 in all other cases, which amounts to assume that s contains a quadratic factor.

Converting both members of (58) we thus obtain

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mu(s) F(sy) = f(y), \quad (61)$$

where the series converges absolutely and more rapid than the series (60).

Let us now assume

$$F(y) = R \sum_{n=1}^{\infty} a^{-ny} e^{\frac{\lambda_r}{m} ny} e^{-\frac{t}{m} ny} - R \sum_{n=1}^{\infty} a^{ny} e^{-\frac{\lambda_r}{m} ny} e^{\frac{t}{m} ny}, \quad (62)$$

where $y \geq 1$, and where, when y is not a whole number, to avoid ambiguity the principal value is supposed to be taken.

The series in the right member of (62) converges absolutely, and swifter than the series in the right member of (53) when $y > 1$.

The series in (62) is of the same form as the series in (58) and thus by converting both members of the former in accordance with (61) we arrive at the result

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\infty} \mu(s) F(s) \\ &= R \Sigma a^{-1} e^{i \frac{\lambda_r}{m}} e^{-i \frac{t}{m}} - R \Sigma a'' a e^{-i \frac{\lambda_r}{m}} e^{i \frac{t}{m}}, \end{aligned} \right\} (63)$$

after having put $y = 1$.

But the value of $F(s)$ is found according to (53) and (62) to be

$$m \left\{ \frac{1}{s} R \sum_{i=1}^s \varphi(a \sigma_i e^{i \frac{t}{m}}) - M(a) \right\}, \quad (63')$$

and hence by (63)

$$\begin{aligned} & m \sum_{s=1}^{\infty} \mu(s) \left\{ \frac{1}{s} R \sum_{i=1}^s \varphi(a \sigma_i e^{i \frac{t}{m}}) - M(a) \right\} \\ &= R \Sigma a^{-1} e^{i \frac{\lambda_r}{m}} e^{-i \frac{t}{m}} - R \Sigma a'' a e^{i \frac{\lambda_r}{m}} e^{i \frac{t}{m}}. \end{aligned}$$

If in this equation we put $-t$ in stead of t and so add the two equations, then $\cos \frac{t}{m}$ will be a factor in the second member, which thus disappears when $t = \frac{m\pi}{2}$.

In this manner we arrive at the relation

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mu(s) \left\{ \frac{1}{s} R \sum_{i=2}^s [\varphi(a \sigma_i) + \varphi(-a \sigma_i)] - 2M(a) \right\} = 0.$$

We can not solve this equation in respect to $M(a)$; the convergency of the series should be destroyed if we endeavoured to separate $M(a)$ from the connection in which it is situated.

Nevertheless the relation may claim some interest, because of its simplicity and perhaps the alone existing of this kind. For the rest this relation may be of use as a formula of control for a calculated $M(a)$.

Hitherto we have assumed the constants (3) positive and as a consequence thereof their convergents (4).

We now assume that these constants are capable of positive as well as negative values, and also that the inequalities (2) yet subsist.

Multiplying both members of (1) by e^{ht} we get

$$re^{h(h+h)} = \sum_{r=1}^n A_r e^{i(h+g_r)} . \quad (64)$$

Now we assume this h to be positive and sufficiently great in order to ensure that all the $(h + g_r)$ are positive. Thus the preceding theories become applicable to the equation (64).

If we call G_h the G corresponding to the right member of (64), this can be determined according to (21'), and the generalized G becomes

$$G = G_h - h .$$

When M is known it is easy to determine θ_r .

The equation (1) can be written in the form

$$r_1(t)e^{i\theta_1(t)} = R \sum_{r=1}^n A_r e^{i\frac{m_r}{m}t} + iR \frac{1}{i} \sum_{r=1}^n A_r e^{i\frac{m_r}{m}t} \quad (65')$$

and hence

$$\theta_1(t) = \operatorname{arctg} \frac{R \frac{1}{i} \sum_{r=1}^n A_r e^{i\frac{m_r}{m}t}}{R \sum_{r=1}^n A_r e^{i\frac{m_r}{m}t}} + \pi k(t) , \quad (65)$$

where $k(t)$ is some positive or negative integer or zero, depending on t .

The first term in the right member of (65) has the period $2\pi m$, and thus it follows

$$\theta_1(t + 2ml\pi) - \theta_1(t) = \pi \{k(t + 2ml\pi) - k(t)\},$$

where l is some positive or negative integer or zero.

In the same manner we get from (27), because the series in the right member after the term Mt has the period $2\pi m$,

$$\theta_1(t + 2ml\pi) - \theta_1(t) = 2ml\pi M$$

and thus by comparison with the last relation

$$k(t + 2ml\pi) - k(t) = 2mlM$$

or particularly

$$k(2ml\pi) - k(0) = 2mlM.$$

Here $k(0)$ in so far is arbitrary, as it can signify a positive or negative integer whichever or zero. Amongst these innumerable determinations we select

$$k(0) = 0,$$

from which by (64) follows

$$\theta_1(0) = \operatorname{arctg} \frac{\sum_{r=1}^n \frac{1}{t} A_r}{\sum_{r=1}^n A_r}$$

and

$$k(2ml\pi) = 2mlM, \quad (66)$$

where $k(2ml\pi)$ has the same sign as lM .

Assuming t positive and

$$2m(l+1)\pi > t \geq 2ml\pi$$

$$l = E \frac{t}{2m\pi}$$

and thus by (66)

$$k(t) = 2mE \frac{t}{2m\pi} \cdot M.$$

If t had been negative we should have obtained

$$k(t) = -2mE \frac{-t}{2m\pi} \cdot M.$$

If τ denotes the positive or negative unity these both relations can be combined into the one

$$k(t) = 2m\tau E \frac{\tau t}{2m\pi} \cdot M.$$

Hence we finally obtain by means of (65)

$$\theta_1(t) = \operatorname{arctg} \frac{R \frac{1}{i} \sum_{r=1}^n A_r e^{i \frac{m_r}{m} t}}{R \sum_{r=1}^n A_r e^{i \frac{m_r}{m} t}} + 2m\pi\tau E \frac{\tau t}{2m\pi} \cdot M. \quad (67)$$

From the formula (67) innumerable relations can be derived by using properties of the E -function.

From (1) we get

$$[\tau(t)]^2 = \left[R \sum_{r=1}^n A_r e^{i\vartheta_r t} \right]^2 + \left[R \frac{1}{i} \sum_{r=1}^n A_r e^{i\vartheta_r t} \right]^2.$$

The important question to determine the maxima and minima of the function $\tau(t)$ we do not treat here.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 684.)

Berlin. *K. Preussisches meteorologisches Institut.*

Abhandlungen. Bd 1: No. 6—8. 1901. 4:o.

Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen 2. und 3. Ordnung.
Jahr 1900: H. 2. 4:o.**Bremen.** *Meteorologisches Observatorium.*

Meteorologisches Jahrbuch. Jahrg. 11 (1900). 4:o.

Brisbane. *R. Geographical Society of Australasia.*

Queensland geographical journal. Vol. 16 (1900/1901). 8:o.

Bruxelles. *Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-
art de Belgique.*

Classe des lettres. Bulletin. 1901: N:o 8. 8:o.

Classe des sciences. Bulletin. 1901: N:o 8. 8:o.

Mémoires couronnés et mém. des savants étrangers. T. 57 (1898/99)—
58 (1899/1900). 4:o.

Mémoires couronnés et autres mémoires. T. 58—60. 1899—1901. 8:o.

Biographie nationale. T. 15: Fasc. 2; 16: 1. 1899—1900. 8:o.

— *Société entomologique de Belgique.*

Mémoires. 8. 1901. 8:o.

Budapest. *Musée national de Hongrie.*Természetrzaji füzetek. (Journal de zoologie, de botanique, de miné-
ralogie et de géologie.) Vol. 24 (1901). P. 3-4. 8:o.**Buenos Aires.** *Museo Nacional.*

Comunicaciones. T. 1 (1901): N:o 9. 8:o.

— *Sociedad científica Argentina.*

Anales. T. 52 (1901): Entr. 2. 8:o.

Buitenzorg. *Jardin botanique.*

Mededeelingen. 49, 51. 1901. 8:o.

Calcutta. *Geological survey of India.*

Memoirs. Vol. 30: P. 2; 31: 1. 1900—1901. 8:o.

General report. 1900/1901. 8:o.

Palæontologia Indica. Ser. 9. Vol. 3: P. 1; N.S. 1: 3. 1900—01. 4:o.

Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoölogy.*

Bulletin. Vol. 37: No 3. 1901. 8:o.

Annual report. 1899/1900. 8:o.

Catania. *Accademia Gioenia di scienze naturali.*

Bollettino delle sedute. N. S. Fasc. 68—70. 1901. 8:o.

Chambésy. *Herbier Boissier.*

Bulletin. (2) T. 1 (1901): N:o 11. 8:o.

Chemnitz. *K. Sächs. meteorologisches Institut.*

Abhandlungen. H. 6. 1901. 4:o.

Firenze. *R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento.*Pubblicazioni. Sezione di scienze fisiche e naturali. Fasc. 13—15.
1900—1901. 8:o.

(Forts. å sid. 720.)

Öfver ammoniumparamolybdats inverkan på natrium-bitartrats specifika vridning af polariseradt ljus.

AF PETER KLASON och JOHN KÖHLER.

[Meddeladt den 13 November 1901 af PETER KLASON.]

I afseende å den stegring af vridningsförmågan hos vinsyran och dess sura salter, som inträder vid tillsats af molybden- och wolframsalter, hafva ROSENHEIM och ITZIG ¹⁾ uppställt den regeln — och i vissa fall påvisat dess giltighet — att maximum hos vridningen inträder, när på en tvåvärdig vinsyrejon två envärdiga alkalijoner förekomma i lösningen.

För vanlig molybdensyrad ammoniaks inflytande på natriumbitartrat har ITZIG ²⁾ sålunda funnit, att maximum nås, när lösningen innehåller $\frac{1}{2}$ mol. molybdensyrad ammoniak på 1 mol. natriumbitartrat. Han har emellertid vid sina beräkningar utgått från den DELAFONTAIN'ska formeln å molybdensyrad ammoniak, $(\text{NH}_4)_6\text{Mo}_7\text{O}_{24} + 4\text{H}_2\text{O}$, utan att taga hänsyn till KLASON's ³⁾ undersökning af samma salt, hvaraf framgår, att detta egentligen är ett dubbelsalt emellan di- och triammoniumtrimolybdat, $(\text{NH}_4)_2\text{H}_4\text{Mo}_3\text{O}_{12} + (\text{NH}_4)_3\text{H}_3\text{Mo}_3\text{O}_{12}$. ⁴⁾

¹⁾ Ber. Ber. 88. 707.

²⁾ Ber. Ber. 84. 1374.

³⁾ Öfversigt af Vet. Akad. Förh. 1901, s. 13.

⁴⁾ I en nyligen offentliggjord afhandling (Öfversigt af Vet. Akad. Förh. 1901, s. 573) har ASRID CLEVE beskrifvit en del salter af metallen ytterbium och bland andra äfven ett molybdat. Det heter dervid:

»Ytterbiumnitrat ger ej ögonblicklig fällning med en kall lösning af ammoniummolybdat, $3(\text{NH}_4)_2\text{O} \cdot 7\text{MoO}_3$, men efter någon tid afsättes saltet $\text{Yb}_2\text{O}_3 \cdot 7\text{MoO}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ (torkadt vid 130°) i opaka, färglösa, äfven i hett vatten olösliga

Härvid må dock anmärkas, att, på grund af den nära lika procentiska sammansättningen hos de båda molybdatformlerna, ITZIG vid sin undersökning icke med sådan skärpa fixerat maximum, att någon slutsats angående hvilken af formlerna är den riktiga kan dragas. I stället för att i närheten af maximum endast helt litet öka förhållandet mellan salterna vid hvarje bestämning har han alltmör förstorat detsamma. Efter att hafva funnit maximum vid tillsats af 0,5929 gr. molybdat till en enligt den äldre formeln beräknad mängd tartrat, har han med ökat molybdatmängden till 0,8235 gr., under det att den nya formeln skulle fordrat endast 0,6143 gr. till samma tartratmängd. Spec. vridningen har härunder minskats med $7,4^\circ$, men intet bevisar, vid nu anförda förhållande, att icke denna minskning utgör summan af både en höjning och en minskning hos vridningsvinkeln, hvadan ITZIG i sjelfva verket ingenting har bevisat, som ådagalägger den ena formelns riktighet framför den andra.

För att emellertid på denna väg om möjligt erhålla ett nytt bevis för den nya formeln hafva vi med största möjliga noggrannhet omgjort hithörande bestämningar; och detta så mycket mer, som ITZIG antagligen använt handels ammoniummolybdat, beträffande hvilket vi visste, att det sällan har samma proc. sammansättning som den rena föreningen. Det för undersökningen af oss använda molybdatet var detsamma, som den ene af oss förut framställt och undersökt.¹⁾ Natriumbitartratet framställdes af vinsyra, omkristalliserades upprepade gånger och pröfvades slutligen på sin renhet genom analys och polarisation.

Vid försöken hafva användts en förträfflig LIPPICH-LANDOLT's polarimeter med tredeladt synfält från SCHMIDT och HAENSCH i krutor. I och för analys löstes saltet i salpetersyra, hvarpå ytterbinjorden fälldes med ammoniak och ur filtratet molybdensyra med HgNO_3 .²⁾

Härvid är först att märka, att det ej är ådagalagdt, att föreningen ej innehåller ammoniak, vidare är det nästan a priori klart, att ytterbinjord och molybdensyra på anförda sätt lika litet kunna fullständigt skiljas som t. ex. ytterbinjord och fosforsyra. Ytterbiummolybdat torde sålunda ha en helt annan sammansättning än författarinnan angifvit.

¹⁾ loc. cit.

Berlin, LANDOLT's natriumlampa samt polarisationsrör försedt med mantel för vatten och termometer. Rörets längd var 1,9995 dm. Lösningen bereddes på så sätt, att till en viss mängd natriumbitartratlösning af bestämd halt sattes stigande mängder af molybdatlösning af känd halt, hvarpå utspäddes med vatten till 25,05 ccm (sanna ccm). Lösningens temperatur hölls vid 20°.

I tab. I är i det allra närmaste samma koncentration nyttjad, som ITZIG använt, i tab. II äro försöken utförda vid en dubbelt så stor koncentration som i tab. I, och i tab. III vid en 10 gånger större utspädning än i tab. I. I tabellerna betyder I volymen af natriumbitartratlösningen, II molybdenlösningens volym, c halten af vinsyra i 100 ccm. Den spec. vridningen $[\alpha]_D^{20}$ är beräknad på vinsyrehalten c.

Tab. I.

I 100 ccm = 5,4316 gr. $\text{NaHC}_4\text{H}_4\text{O}_6 + \text{H}_2\text{O}$.

II 100 ccm = 12,1113 gr. $5\text{NH}_3 \cdot 6\text{MoO}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$.

c = 1,7115 gr. $\text{C}_4\text{H}_6\text{O}_6$.

I ccm.	II ccm.	$\alpha_D^{20^\circ}$	$[\alpha]_D^{20^\circ}$
10	—	0.95°	+ 27.6°
10	3.50	14.97	437.4
10	4.00	16.80	490.9
10	4.50	18.51	540.8
10	4.86	19.50	569.8
10	5.00	19.75	577.1
10	5.18	19.85	580.5
10	5.30	19.85	580.5
10	5.50	19.85	580.5
10	6.00	19.77	577.7
10	7.00	19.54	570.9

I strid mot regeln inträffar här maximet, 580,5°, när lösningen innehåller en större molybdatmängd än den beräknade. Vid tillsats af 4,99 ccm molybdatlösning, då förhållandet emellan

salterna är 1 mol. $\text{NaHC}_4\text{H}_4\text{O}_6 + \text{H}_2\text{O} : \frac{1}{2}$ mol. $5\text{NH}_3 \cdot 6\text{MoO}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, borde maximet hafva inträffat och enligt den äldre formeln ännu tidigare eller efter tillsats af 4,86 ccm molybdatlösning, då salterna i lösningen förhålla sig såsom 1 mol. $\text{NaHC}_4\text{H}_4\text{O}_6 + \text{H}_2\text{O} : \frac{1}{6}$ mol. $(\text{NH}_4)_6\text{Mo}_7\text{O}_{24} + 4\text{H}_2\text{O}$.

Tager man åter, såsom i tab. II, en dubbelt så hög koncentration, finnes maximet hafva förskjutits närmare den punkt, der det enligt regeln skulle ligga, och så nära, att det kan antagas, att vid tillräckligt hög koncentration regeln verkligen har sin fulla giltighet.

Tab. II.

I 100 ccm = 10,8632 gr. $\text{NaHC}_4\text{H}_4\text{O}_6 + \text{H}_2\text{O}$.

II 100 ccm = 24,2226 gr. $5\text{NH}_3 \cdot 6\text{MoO}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$.

c = 3,4230 gr. $\text{C}_4\text{H}_6\text{O}_6$.

I ccm.	II ccm.	$\alpha_D^{20^\circ}$	$[\alpha]_D^{20^\circ}$
10	—	1.90°	+ 27.7°
10	4.86	40.91	597.7
10	5.18	41.10	600.5
10	5.30	40.85	596.8
10	6.00	40.17	586.9

Vi finna äfven, att värdet å maximet stigit med koncentrationen.

Det af ITZIG funna maximet, 456.7, är därför vid nyttjandet af ett rent molybdat uppenbarligen för lågt, hvartill kommer ett konstant fel i hans bestämningar, hvilka samtliga äro för låga, som ock framgår af hans bestämning af bitartratets vridning.

Af intresse äro äfven bestämningarne vid stark utspädning, hvars resultat finnas i följande tabell.

Tab. III.

I 100 ccm = 1,0863 gr. $\text{NaHC}_4\text{H}_4\text{O}_6 + \text{H}_2\text{O}$.II 100 ccm = 1,5050 gr. $5\text{NH}_3 \cdot 6\text{MoO}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$.c = 0,17115 gr. $\text{C}_4\text{H}_6\text{O}_6$.

I ccm.	II ccm.	$\alpha_D^{20^\circ}$	$[\alpha]_D^{20^\circ}$
5	—	0.101°	+ 29.5°
5	1.40	0.725	211.8
5	1.80	0.863	252.2
5	3.90	1.334	389.8
5	4.16	1.378	401.2
5	4.26	1.386	405.0
5	4.80	1.441	421.0
5	6.00	1.515	442.7
5	8.00	1.575	460.2
5	10.00	1.596	466.3
5	12.00	1.618	472.8
5	16.00	1.661	485.3
5	0.3091 gr.	1.676	489.7
5	0.5079 „	1.715	501.1
5	1.0089 „	1.776	518.9
5	2.0026 „	1.805	527.4
5	3.2422 „	1.842	538.2

Enligt regeln skulle vridningsmaximet nås redan efter tillsättningen af 4,02 ccm molybdatlösning, hvilket emellertid, som man ser, långt ifrån är förhållandet. Regeln gäller sålunda uppenbarligen mindre, ju mera utspädd lösningen är. Det är ock klart, att en generell regel för vridningsmaximet icke blott måste taga hänsyn till alkalijonerna, såsom ROSENHEIM och ITZIG gjort, utan äfven till molybdensyran och jemväl till koncentrationen, hvilken senare uppenbarligen har ett stort inflytande på de aktiva jonernas antal och beskaffenhet. Öfverhufvud är hela optiska förhållandet väl förenligt med antagandet, att den i koncentrerad lösning uppstående föreningen vid utspädning

åter delvis sönderdelas genom hydrolys, en hydrolys, som genom öfverskott af molybdat kan förminskas.

I följande tab. IV äro några af de funna värdena å spec. vridningsförmågan vid olika koncentrationer men med samma förhållande mellan salterna sammanställda.

Tab. IV.

$[\alpha]_D^{20}$ c = 0.17115	$[\alpha]_D^{20}$ c = 1.7115	$[\alpha]_D^{20}$ c = 3.4230
389.8°	569.8°	597.7°
401.2	580.5	600.5
405.0	580.5	596.8
421.0	577.7	586.9

Tab. V visar slutligen vridningens föränderlighet med temperaturen.

Tab. V.

$\text{NaHC}_4\text{H}_4\text{O}_6 + \text{H}_2\text{O}$ gr.	$5\text{NH}_3 \cdot 6\text{MoO}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ gr.	α_D^{20}	$[\alpha]_D^{20}$	α_D^{10}	$[\alpha]_D^{10}$	α_D^0	$[\alpha]_D^0$
		c = 3.4230 gr. $\text{C}_4\text{H}_6\text{O}_6$		c = 3.4278 gr. $\text{C}_4\text{H}_6\text{O}_6$		c = 3.4287 gr. $\text{C}_4\text{H}_6\text{O}_6$	
1.0868	1.1774	40.91°	597.7°	41.92°	611.7°	21.19° ¹⁾	618.0°
1.0868	1.2546	41.10	600.5	41.77	609.5	—	—

Vi hoppas genom mera ingående undersökningar vinna ytterligare klarhet i hithörande frågor och inskränka oss här till den förmodan, att molybdensyra och vinsyra bilda en komplex, lätt hydrolyserbar syra, $\text{MoO}_4 \begin{smallmatrix} \text{CHCOOH} \\ \text{CHCOOH} \end{smallmatrix}$, som utgör grundlaget för hithörande företeelser.

Tekniska Högskolan, November 1901.

¹⁾ Rörets längd 1 dm.

Sur l'extension d'une formule d'EULER et sur le calcul des moments d'inertie principaux d'un système de points matériels.

Par K. BOHLIN.

(Communiqué le 13 November 1901.)

On sait que les moments d'inertie A , B , C d'un système de points matériels se composent au moyen de trois quantités de la forme:

$$T_a = \Sigma a^2; T_b = \Sigma b^2; T_c = \Sigma c^2,$$

sous la condition que les produits d'inertie soient nuls, c'est à dire qu'on a:

$$0 = \Sigma bc; 0 = \Sigma ca; 0 = \Sigma ab.$$

Sous ce point de vue on aura souvent une application d'une formule très connue d'EULER usuellement employée dans la théorie des cosines de direction, à savoir:

$$\left. \begin{aligned} (a^2 + a'^2 + a''^2)(b^2 + b'^2 + b''^2) - (ab + a'b' + a''b'')^2 = \\ = \left| \begin{array}{cc} a & a' \\ b & b' \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a & a'' \\ b & b'' \end{array} \right|^2 \\ + \left| \begin{array}{cc} a' & a'' \\ b' & b'' \end{array} \right|^2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Un cas spécial de cette formule est la relation simple:

$$(a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2) - (ab + a'b')^2 = \left| \begin{array}{cc} a & a' \\ b & b' \end{array} \right|^2, \quad (A)$$

et de l'autre côté on a cette extension de la même formule:

$$\left. \begin{aligned} & (a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2)(b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2) - \\ & - (ab + a'b' + a''b'' + a'''b''')^2 = \\ & = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & a'' \\ b & b'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & a''' \\ b & b''' \end{vmatrix}^2 \\ & + \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a' & a''' \\ b' & b''' \end{vmatrix}^2 \\ & + \begin{vmatrix} a'' & a''' \\ b'' & b''' \end{vmatrix}^2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ainsi que des formules analogues se rapportant à un nombre quelconque de quantités a et b . Ces formules doivent être connues.

On aura d'un autre côté quelques extensions de la formule d'EULER qui me paraissent être peu connues et lesquelles je me permets de signaler. C'est surtout la formule suivante:

$$\left. \begin{aligned} & (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \\ & + 2(y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)(z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3)(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ & - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)^2 \\ & - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)(z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3)^2 \\ & - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 = \\ & = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}^2 \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

— formule qu'on peut regarder comme une extension à trois dimensions de la formule (A). J'ai vérifié cette relation par un calcul direct. On aura très facilement ce résultat, en employant le théorème de multiplication des déterminants.¹⁾ Mais on voit que la relation (B) pourra même être généralisée. En effet, on doit avoir:

¹⁾ Conférez JACOBI Werke T. III, pag. 385, propositio V.

$$\left. \begin{aligned}
 & (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) \\
 & + 2(y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 + y_4z_4)(z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3 + z_4x_4) \\
 & \quad (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4) \\
 & - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 + y_4z_4)^2 \\
 & - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)(z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3 + z_4x_4)^2 \\
 & - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2)(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 = \\
 & = \begin{vmatrix} x_1x_2x_3 \\ y_1y_2y_3 \\ z_1z_2z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1x_2x_4 \\ y_1y_2y_4 \\ z_1z_2z_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1x_3x_4 \\ y_1y_3y_4 \\ z_1z_3z_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2x_3x_4 \\ y_2y_3y_4 \\ z_2z_3z_4 \end{vmatrix}^2,
 \end{aligned} \right\} (1')$$

ce qu'on peut regarder comme une extension de la formule (1). A ce qui concerne cette formule je ne l'ai pas vérifiée directement, mais on voit tout de suite qu'on pourra en déduire la formule (1) de plusieurs manières différentes, par exemple en posant:

$$\begin{aligned}
 x_4 = y_4 = 0 \\
 z_1 = z_2 = z_3 = 0 \quad \text{et} \quad z_4 = 1.
 \end{aligned}$$

La formule (1') s'étend en outre généralement à n éléments. Pour cinq éléments x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , le membre gauche gardant la même forme que dans (B) ou dans (1'), le membre droit se compose des déterminants-carrés suivants:

$$\left. \begin{aligned}
 & (123)^2 + (124)^2 + (125)^2 + (134)^2 + (135)^2 + (145)^2 \\
 & \quad + (234)^2 + (235)^2 + (245)^2 \\
 & \quad + (345)^2,
 \end{aligned} \right\} (2')$$

en adoptant une notation abrégée pour les déterminants dont il s'agit. La formule (2) se déduit de la formule dont le membre droit est désignée par (2'), par exemple en posant:

$$\begin{aligned}
 x_5 = y_5 = 0 \\
 z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0 \quad \text{et} \quad z_5 = 1,
 \end{aligned}$$

le membre droit se réduisant alors à:

$$\begin{aligned}
 & (12)^2 + (13)^2 + (14)^2 \\
 & \quad + (23)^2 + (24)^2 \\
 & \quad + (34)^2.
 \end{aligned}$$

En posant par exemple

$$T_x = \sum_1^4 x_i^2; \quad T_y = \sum_1^4 y_i^2; \quad T_z = \sum_1^4 z_i^2$$

et en supposant

$$0 = \sum_1^4 y_i z_i; \quad 0 = \sum_1^4 z_i x_i; \quad 0 = \sum_1^4 x_i y_i,$$

on aura d'après la formule (1')

$$T_x T_y T_z = \begin{vmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ y_1 y_2 y_3 \\ z_1 z_2 z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 x_2 x_4 \\ y_1 y_2 y_4 \\ z_1 z_2 z_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 x_3 x_4 \\ y_1 y_3 y_4 \\ z_1 z_3 z_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 x_3 x_4 \\ y_2 y_3 y_4 \\ z_2 z_3 z_4 \end{vmatrix}^2. \quad (a)$$

La relation (2) nous donnera

$$\left. \begin{aligned} T_y T_z &= \begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ z_1 z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 y_3 \\ z_1 z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 y_4 \\ z_1 z_4 \end{vmatrix}^2 \\ &\quad + \begin{vmatrix} y_2 y_3 \\ z_2 z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_2 y_4 \\ z_2 z_4 \end{vmatrix}^2 \\ &\quad + \begin{vmatrix} y_3 y_4 \\ z_3 z_4 \end{vmatrix}^2, \\ T_z T_x &= \begin{vmatrix} z_1 z_2 \\ x_1 x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 z_3 \\ x_1 x_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 z_4 \\ x_1 x_4 \end{vmatrix}^2 \\ &\quad + \begin{vmatrix} z_2 z_3 \\ x_2 x_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 z_4 \\ x_2 x_4 \end{vmatrix}^2 \\ &\quad + \begin{vmatrix} z_3 z_4 \\ x_3 x_4 \end{vmatrix}^2, \\ T_x T_y &= \begin{vmatrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 x_3 \\ y_1 y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 x_4 \\ y_1 y_4 \end{vmatrix}^2 \\ &\quad + \begin{vmatrix} x_2 x_3 \\ y_2 y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 x_4 \\ y_2 y_4 \end{vmatrix}^2 \\ &\quad + \begin{vmatrix} x_3 x_4 \\ y_3 y_4 \end{vmatrix}^2, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

et on aura encore:

$$T_x + T_y + T_z = \sum_1^4 (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2). \quad (c)$$

Prenons pour x_i, y_i, z_i les coordonnées de quatre points matériels multipliées par les racines carrées des combinaisons des masses correspondantes. Désignons de la même façon les rayons vecteurs de ces points par r_i . Posons

$$A = \sum r_i^2$$

et désignons de plus les aires des divers triangles formés par ces rayons par

$$A_{\mu\nu}$$

ainsi que les volumes des tétraèdres formés par ces mêmes rayons par

$$A_{\lambda\mu\nu},$$

toutes ces quantités étant affectées de leurs facteurs de masse propres. Alors on voit que ces trois quantités:

$$\begin{aligned} &T_x T_y T_z; \\ &T_y T_z + T_z T_x + T_x T_y; \\ &T_x + T_y + T_z \end{aligned}$$

seront des fonctions des quantités connues

$$A, A_{\mu\nu}, A_{\lambda\mu\nu}.$$

Il est donc possible de former l'équation du troisième degré:

$$T^3 + cT^2 + bT + a = 0, \quad (d)$$

dont dépend la détermination des moments d'inertie.

— — —

Skänker till Vetenskaps-Akademins Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 708.)

- Frankfurt a. M.** *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*
Bericht 1901. 8:o.
- Genova.** *Musei di zoologia ed anatomia comparata della R. Università.*
Bollettino. 1899—1900: N:o 98—107. 8:o.
- Graz.** *Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark.*
Mittheilungen. Jahrg. 1900. 8:o.
- Göttingen.** *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Philol.-hist. Klasse. N. F. Bd 5: N:o. 2. 1901. 4:o.
- Halifax.** *Nova Scotian Institute of science.*
Proceedings & Transactions. Vol. 10 (1899—1900): P. 2. 8:o.
- Halle.** *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen u. Thüringen.*
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd 74 (1901/02): H. 1—2. 8:o.
- Hamburg.** *Deutsche Seewarte.*
Katalog der Bibliothek. Nachtrag 3. 1901. 8:o.
- Harlem.** *Société Hollandaise des sciences.*
HUYGENS, CHR., Œuvres complètes. T. 9. 1901. 4:o.
- Kiel.** *Sternwarte.*
Publicationen. 11. 1901. 4:o.
- Kjöbenhavn.** *Det danske meteorologiske Institut.*
Résumé des travaux de l'expéd. polaire Danoise internat. 1884. 8:o.
— *K. danske Videnskabernes Selskab.*
BRAHE, TYCHO, De nova stella . . . Hauniæ 1901. 4:o.
- Klagenfurt.** *Naturhistorisches Landes-Museum von Kärnten.*
Diagramme der magnetischen und meteorologischen Beobachtungen.
1899/1900. Fol.
Jahrbuch. H. 26. 1900. 8:o.
- Krakau.** *Académie des sciences.*
Biblioteka pisarzy Polskich. T. 39—40. 1901. 8:o.
Katalog literatury naukowej Polskiej. T. 1 (1901): Zesz. 2. 8:o.
Materyały i prace komisji jezykowej. T. 1: Zesz. 1. 1901. 8:o.
Rozprawy. Wydział filologiczny. (2) T. 17. 1901. 8:o.
Sprawozdanie komisji fizyogr. T. 35 (1900). 8:o.
- KARLOWICZ, J.,** Słownik gwar Polskich. T. 2 (F do K). 1901. 8:o.
- Kremsmünster.** *Sternwarte.*
Resultate der meteorologischen Beobachtungen. Jahr 1900. 8:o.
- Kristiania.** *Universitets-Bibliothek.*
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd 21: H. 4; 22: 1—4; 23:
1. 1899—1900. 8:o.
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd 37: H. 1—4; 38: 1—4. 1900.
8:o.
- Leeds.** *Yorkshire geological and polytechnic society.*
Proceedings. N. S. Vol. 14 (1901): P. 2. 8:o.
- Leipzig.** *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Math.-phys. Classe. Bd 27: N:o 1. 1901. 8:o.

- Leipzig.** *Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft.*
Jahresbericht. 1901. 8:o.
- Liège.** *Société Royale des sciences.*
Mémoires. (3) T. 3. 1901. 8:o.
- Lisboa.** *Direcção dos serviços geologicos de Portugal.*
Comunicações. T. 4. 1900—1901. 8:o.
- London.** *The Wellcome chemical research laboratories.*
N:o 21. 1901. 8:o.
- *Meteorological Office.*
Monthly pilot charts of the North Atlantic and Mediterranean. 1901:
Sheet 7—8. Fol.
- *Royal Astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 61 (1901/02): N:o 9 & Append. 3—4. 8:o.
- *Chemical society.*
Journal. Vol. 79—80 (1901): 11. 8:o.
- *R. Microscopical Society.*
Journal. 1901: P. 5. 8:o.
- *Royal Society.*
Proceedings. Vol. 68 (1901): N:o 449. 8:o.
- *Zoological society.*
Proceedings. 1901: Vol. 1: P. 2. 8:o.
Transactions. Vol. 16: P. 2—3. 1901. 4:o.
- London, Ontario.** *Entomological society.*
The Canadian Entomologist. Vol. 33 (1901): N:o 10. 8:o.
- Lübeck.** *Geographische Gesellschaft und Naturhistorisches Museum.*
Mitteilungen. Reihe 2: H. 15. 1901. 8:o.
- Lussinpiccolo.** *Manora Sternwarte.*
Thätigkeit. Jahr 1900. 4:o.
- Manchester.** *Geological society.*
Transactions. Vol. 27 (1900/1901): P. 6—7. 8:o.
- Manila.** *Observatorio de la compañía de Jesús.*
Boletín mensual. Año 1899: Trim. 3. Fol.
CORONAS, P. J., El baguio del 8 de Sept. 1900. 8:o.
- Melbourne.** *Observatory.*
Results of observations in meteorology and terrestrial magnetism.
1900: 2. 8:o.
- Mexico.** *Instituto médico nacional.*
Anales. T. 5 (1901): Num. 1. 8:o.
- *Observatorio meteorologico central.*
Boletín mensual. 1901: 4—6. Fol.
- Montevideo.** *Museo nacional.*
Anales. T. 3: Entr. 21. 1901. 8:o.
- Moscou.** *Société imp. des naturalistes.*
Bulletin. Année 1901: N:o 1—2. 8:o.
- Mount Hamilton.** *Lick observatory.*
Bulletin. No 2, 5—8. 1901. 4:o.

München. *K. B. Akademie der Wissenschaften.*

Abhandlungen. Philos.-philol. Cl. Bd 21: Abth. 3. 1901. 4:o.

Sitzungsberichte. Math.-phys. Classe. 1901: H. 3. 8:o.

» Philos.-philol. u. bist. Classe. 1901: H. 3. 8:o.

LIPPS, TH., Psychologie, Wissenschaft und Leben. Festrede ¹⁵ 3 1901. 4:o.— *Meteorologische Centralstation.*

Übersicht über die Witterungsverhältnisse. 1901: 8–9. 4:o.

New York. *Botanical Garden.*

Bulletin. Vol. 1 (1896—1900). 8:o.

Nizza. *Société de médecine et de climatologie.*

Nice-médical. Année 26 (1901): N:o 1. 8:o.

Nürnberg. *Naturhistorische Gesellschaft.*

Festschrift (1801—1901). 8:o.

Odessa. *Observatoire.*

Observations des protubérances solaires du mois de janvier 1897 jusqu'au mois de janvier 1901. 8:o.

Ottawa. *Field-naturalists' club.*

The Ottawa Naturalist. Vol. 15 (1901): N:o 8. 8:o.

— *Royal Society of Canada.*

Proceedings and Transactions. (2) Vol. 5 (1899): Map. 8:o.

— *Meteorological service of Canada.*

Report. 1898. 4:o.

— *Geological survey of Canada.*

Annual report. Vol. 11 (1898) & Maps. 8:o.

Paris. *Congrès international de météorologie.*

Procès-verbaux des séances et mémoires. 1900. 8:o.

— *Société astronomique de France.*

Bulletin. 1901: 10–11. 8:o.

— *Société de géographie.*

La Géographie. Année 1901: N:o 10. 8:o.

— *Société géologique de France.*

Bulletin. (4) T. 1 (1901): N:o 2. 8:o.

Pittsburgh. *Allegheny observatory.*

Miscellaneous scientific papers. N. S. N:o 1—3. 8:o.

Pola. *Hydrographisches Amt der k. u. k. Kriegs-Marine.*

Meteorologische Termin-Beobachtungen. 1901: 8–9. tv. Fol.

Portici. *R. Scuola superiore d'Agricoltura.*

1901. 8:o.

Prag. *K. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*

STUDNIČKA, F. J., Bericht über die astrologischen Studien des Reformators der beobachtenden Astronomie, Tycho Brahe. 1901. 8:o.

MATIEGKA, H., Bericht über die Untersuchung der Gebeine Tycho Brahe's. 1901. 8:o.

Riga. *Naturforscher-Verein.*

Korrespondenzblatt. 44. 1901. 8:o.

Rio de Janeiro. *Observatorio.*

Boletim mensal. 1900: 2–12. 8:o.

Rio de Janeiro. *Repartição da carta marítima, Directoria de meteorologia.*

Boletim das observações meteorológicas e dos resultados magneticos.

Anno 6 (1901): N. 1—3. Fol.

Boletim semestral. N. 7 (1900). 8:o.

Roma. *Reale accademia dei Lincei.*

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Rendiconti. (5) Vol. 10 (1901): Sem. 2: Fasc. 7—8. 8:o.

Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

Atti. (5) P. 2: Notizie degli Scavi. 1901: 7—8. 4:o.

St. Pétersbourg. *Académie impériale des sciences.*

Mémoires. Cl. phys.-math. (8) Vol. 11: N:o 1—5. 1900—1901. 4:o.

— *Section géologique du cabinet de Sa Majesté.*

Travaux. Vol. 3: Livr. 2. 1901. 8:o.

— *Société Imp. Russe de géographie.*

Izvestija. T. 37 (1901): 3. 8:o.

San Fernando. *Instituto y observatorio de marina.*

Almanaque náutico. Año 1903. 8:o.

San José. *Instituto físico-geográfico de Costa Rica.*

Boletín. Año 1 (1901): Núm. 8. 8:o.

Stavanger. *Museum.*

Aarshefter. Aarg. 11 (1900). 8:o.

Strassburg. *K. Hauptstation für Erdbebenforschung.*

Monatsbericht. 1901: 6—7. 8:o.

— *Geologische Landesanstalt von Elsass-Lothringen.*

Mittheilungen. Bd 5: H. 3. 1901. 8:o.

Sydney. *Linnean society of N. S. Wales.*

Proceedings. Vol. 26 (1901): P. 1. 8:o.

Tokyo. *Central meteorological observatory of Japan.*

Weather chart. 1901: 7—8. Fol.

— *Societas zoologica Tokyonensis.*

Annotationes zoologicae Japonenses. Vol. 4: P. 1. 1901. 8:o.

Torino. *R. Accademia delle scienze.*

Atti. Vol. 36 (1900/1901): Disp. 11—15. 8:o.

— *Museo di zoologia ed anatomia comparata.*

Bollettino. Vol. 16 (1900/01): N:o 382—403. 8:o.

Washington. *U. S. Weather Bureau.*

Monthly weather review. 1901: 7. 4:o.

— *U. S. Department of agriculture.*

Crop reporter. Vol. 3 (1901): No. 4—5. 4:o.

Division of publications. Circular. No. 417—418. 1901. 8:o.

Division of agrostology. Bulletin. No 25. 1901. 8:o.

Bureau of animal industry. Circular. N:o 35. 1901. 8:o.

Division of biological survey. North American Fauna. No. 21. 1901. 8:o.

» » » » Bulletin. No. 16. 1901. 8:o.

Division of botany. Contributions from the U. S. National Herbarium.

Vol. 7: No. 2. 1901. 8:o.

Washington. *U. S. Department of agriculture.*

Division of entomology. Bulletin. N. S. No. 29. 1901. 8:o.

Farmers' bulletin. No. 133—135; 137. 1901. 8:o.

Library. Bulletin. No. 36. 1901. 8:o.

Division of statistics. Bulletin. Miscellaneous series. No. 20—22. 1901. 8:o.

Division of vegetable physiology and pathology. Bulletin. No. 29. 1901. 8:o.

Bureau of soils. Circular. No. 8. 1901. 8:o.

Wien. *K. k. Centralanstalt für Meteorologie.*

Telegraphischer Wetterbericht 1898—1900. 4:o.

— *K. K. zoologisch-botanische Gesellschaft.*

Verhandlungen. Bd. 51 (1901): H. 7—8. 8:o.

— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*

Verhandlungen. 1901: N:o 9—10. 8:o.

— *K. K. Militär-geographisches Institut.*

Astronomisch-geodätische Arbeiten. Bd 17. 1901. 4:o.

Af Madame Veuve Godin, Guise.

Le Devoir. T. 25 (1901): 9—10. 8:o.

Af utgifvarne:

La Feuille des jeunes naturalistes, publ. par M. A. DOLLFUS. (4)

Année 32 (1901/02): N:o 373. 8:o.

Paedologisch Jaarboek onder redactie van Prof. M. C. SCHUYTEN.

Jaarg. 2 (1901). 8:o.

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen, hrsg. von A.

SEIDEL. Jahrg. 5: H. 4. 1900. 8:o.

Af Kanslisekreteraren S. Nordström:

MINISCALCHI-ERIZZO, F., Le scoperte artiche. Venezia 1855. 8:o.

Af författarne:

HAMBERG, A., Sarjekfjällen. En geografisk undersökning. Sthlm 1901. 8:o.

HAMBERG, H. E., [Upland] Klimatet. Upsala 1901. 8:o.

MITTAG-LEFFLER, G., Weierstrass. Sthlm 1901. 4:o.

NERMAN, G., Något om i Indalsälven, Ljusnan och Dalälven rådande hydrografiska förhållanden. Upsala 1901. 8:o.

OLSSON, P., Socknar och sockennamn i Jämtlands län. Östersund 1901. 12:o.

AGAMENNONE, G., Gli strumenti sismici all'esposizione universale del 1900. Modena 1901. 8:o.

— Gli strumenti sismici e le perturbazioni atmosferiche. Roma 1900.

DAVENPORT, C. B., On the variation of the shell of Pecten irradians Lamarck from Long Island. Boston 1900. 8:o.

DELISLE, L., Tychonis Brahe astronomiæ instauratæ mechanica. Paris 1901. 4:o.

GOPPELSROEDER, F., Capillaranalyse beruhend auf Capillaritäts- und Adsorptionerscheinungen . . . Basel 1901. 8:o.

Af författarne:

- GROSSMANN, L., Die Extrem-Temperaturen in Hamburg in den Jahren 1876—1900. Hamburg 1900. 4:o.
- HECK, O., Die Natur der Kraft und des Stoffs. Homberg 1901. 8:o.
- HELLMANN, G., Regenkarte der Provinzen Brandenburg und Pommern. Berlin 1901. 8:o.
- HAECKEL, E., Kunst-Formen der Natur. Lief. 6. Lpz. 1901. Fol.
- JORDAN, D. S., The fish fauna of Japan, with observations on the geographical distribution of fishes. 1901. 8:o.
- MÜLLER, H., Das Klima von Calw nach hundertjährigen Wetterbeobachtungen. Stuttgart 1901. 8:o.
- MÖLLER, J., Bestimmung der Bahn des Cometen 1897 I. Kiel 1901. 4:o.
- NEUPERT, K., Mechanik des Himmels und der Moleküle. Bamberg 1901. 8:o.
- PEPRNÝ, L., Tycho Brahe v české literatuře. Prag 1901. 8:o.
- RATHBUN, M. J., Synopses of North-American invertebrates. 10—11. Washington 1901. 8:o.
- Results of the Branner-Agassiz expedition to Brazil. 1. Washington 1900. 8:o.
- RAULIN, M. V., Sur les observations pluviométriques faites dans les régions arctiques au nord du 60^e degré de latitude. 1899—1900. Paris 1900—01. 8:o.
- SRESNEWSKY, B., Geschützte Rotations-Thermometer. Jurjew 1901. 8:o.
- WALLIS, H. S., & MILL, H. R., British rainfall 1900. London 1901. 8:o.



ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 58.

1901.

Nº 10.

Onsdagen den 11 December.

INNEHÅLL:

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 727.
HANSSON, C. A., Anteckningar om Skandinaviens Glatmaskar, Iglar m. m.	> 729.
BJERKNES, V., Cirkulation relativ zu der Erde	> 739.
SANDSTRÖM, J. W., Ueber die Beziehung zwischen Temperatur und Luftbewegung in der Atmosphäre unter stationären Verhältnissen	> 759.
BJERKNES, V., Bemerkung zu der vorhergehenden Abhandlung	> 775.
BOHLIN, K., Sur l'extension d'une formule d'Euler et sur son rapport à la méthode des moindres carrés	> 779.
MITTAG-LEFFLER, G., Sur le terme complémentaire de mon développement de la branche uniforme d'une fonction monogène dans le cas où ce développement possède une étoile de convergence	> 785.
WIEBERT, S., Sur l'équation différentielle du calcul des variations	> 791.
PHRAGMÉN, E., Ueber eine direkte Methode, eine gegebene ganze rationale Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen in irreduktible Faktoren zu zerlegen	> 795.
Skänker till Akademiens Bibliotek	sid. 728, 738, 758, 778, 784, 811.

På grund af Kongl. remiss afgafs utlåtande af Herrar WITTRÖCK och ERIKSSON rörande en ansökan af fil. kandidaten L. ROMBELL om inlösen för statens räkning af ett visst antal exemplar af framl. doktor M. Lindblads svampbok, och godkände Akademien för sin del detta utlåtande.

Det *Beckowska* stipendiet, som denna gång skulle bortgifvas för idkande af biologiska studier, tilldelades docenten vid Stockholms Högskola, fil. doktor GUNNAR ANDERSSON för att sätta honom i tillfälle att i Riksmusei samlingar göra anteckningar öfver de skandinaviska växtarternas geografiska utbredning i och för en bearbetning af Skandinaviens flora för ENGLER & DRUDE's: *Vegetation der Erde*.

Till sin ständige sekreterare kallade och utsåg Akademien intendenten vid Riksmuseets entomologiska afdelning, professor PER OLOF CHRISTOPHER AURIVILLIUS.

Genom anställdt val kallades Lord AVEBURY (JOHN LUBBOCK) och professorn i fysiologi vid universitetet i Heidelberg ALBRECHT KOSSEL till utländske ledamöter af Akademien.

Herr BOHLIN redogjorde i korthet för innehållet i sin till »Bihanget» inlämnade uppsats om stjärnan Nova Persei.

Herr ARRHENIUS höll ett föredrag om vulkanismen från fysikalisk-kemisk standpunkt.

Herr Grefve MÖRNER lämnade ett meddelande rörande de af honom fortsatta undersökningarne om svaflets bindningssätt i proteinämnen.

Herr MITTAG-LEFFLER redogjorde för innehållet af sin till »Öfversigten» inlämnade uppsats.

Herr PHRAGMÉN lämnade likaledes en redogörelse för sin till »Öfversigten» meddelade uppsats.

På tillstyrkan af kommitterade antogos följande inlämnade afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter:

i Bihanget till Akademiens Handlingar: 1:a) »Untersuchungen über eigenartige Inhaltskörper bei den Orchideen» af studeranden M. O. MALTE; 2:a) »Zur Kenntniss der littoralen Arten der Gattung *Bdella* LATR» af fil. kandidat S. TRÄGÅRDH; 3:e) »*Taphridium* LAG. & JUEL, eine neue Gattung der Protomycetaceen» af docenten H. O. JUEL; 4:e) »Studien über die Inversion» af fil. doktor KARL KULLGREN; 5:e) Beobachtungen und Photogramme des neuen Sterns Nova (3. 1901) Persei. Erste Mitteilung af professor K. BOHLIN;

i Öfversigten: de i innehållsförteckningen upptagna åtta uppsatserna.

Följande skänker anmälades:

Till Akademiens Bibliotek.

Stockholm. K. Statistiska centralbyrån.

Bidrag till Sveriges officiella statistik. F: 1900. 4:o.

(Forts. å sid. 733.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1901. N:o 10.
Stockholm.

Anteckningar om Skandinaviens Glattmaskar, Iglar m. m.

AF CARL AUG. HANSSON.

(Meddeladt den 11 December 1901 genom Hj. THEEL.)

Jag vågar härmed framlägga en förteckning öfver de af mig tagna och med säkerhet bestämda arterna jemte noggranna uppgifter å fyndorterna för dem.

Endast fullkomligt oskadade exemplar hafva utvalts till examinering.

Använda arbeten för artsbestämning:

EISEN, Bidrag till Skand. Oligochetfauna (Kongl. Vet. Akad. Förh. Öfvers. 1870).

» Om Skand. Lumbricider (ibid. 1873).

» New Englands och Granadas Lumbricidæ (ibid. 1873).

MALM, A. W., Om Daggmaskar. (Öfvers. af sällskap. Hortikulturens vänner i Göteborg Förhandl. 1877).

» Svenska Iglar. 1860.

» Ichthyol. Bidrag till Skand. Fauna (Förhandl. vid de Skand. Naturf. 9:de möte 1865 (Iglar).

JOHANSSON, Bidr. till kanned. om Sveriges Ichthyobdellider. Akad. Afhandl. Ups. 1896.

OLSSON, Bidrag till Skand. Helminthfauna I. 1876.

LEVINSEN, Systematisk-geografisk Oversigt over de nordiske An-
nulata, Gephyrea etc. (Vidensk. Meddel. fra den
naturhist. Forening i Kjöbenhavn 1882—1883).

Lumbricidæ.

Gen. *Allurus* EISEN.

1. *Allurus tetraëdrus* EISEN.

Bohuslän: flerstädes kring stränderna af Strömsvattnet vid Strömstad och kring stränderna på flera större eller mindre insjöar i n. Boh.; vid Qvistrumsån (m. Boh.); Vestra Dalsland vid Husebotjärnet i Nössemarken.

Gen. *Lumbricus* LINN.

2. *Lumbr. Boeckii*, EISEN, har jag tagit några gånger i trädgården »Ekmanska myren» vid Strömstad, dels under fuktig mossa på en brant, åt nordvest vettande bergvägg och dels bland nedfallet löf och smolk vid foten af samma berg. Vidare på liknande lokal i inre delen af »Stigkilen» på Öddö vid Strömstad och der på en några meters bred diabasgång under mattor af en lefvermossa (*Ptilidium ciliare* N. v. Es.); Sydkoster, n. Boh. i en smal sprickdal mellan »Kläppenhagen» och Långegårde.

3. *L. terrestris* LINN. Denna daggmask har jag träffat allmän öfver allt i Bohuslän der jag farit fram, vestra Dalsland, Göteborg, Halmstad, Malmö, Karlskrona, Sundsvallstrakten (Skönvik, Bünzows villa) i fet och humusrik jord. — Norge; Kristiania, Fredrikshald, m. fl. st.; Danmark vid Klampenborg och Köpenhamn.

Allmogebenämningen i Bohuslän och Dalsland på denna, såväl som på de öfriga arterna är: »Daggmask», »metmask» och »metmark».

4. *L. rubellus* HOFFM. Allmän i norra Bohuslän i och kring Strömstad; Näsinga, Bullaren; vestra Dalsland; Norge vid Femajö (Fredrikshald) 1879.

5. *L. purpureus* EISEN. Denna art har jag ofta tagit vid Strömstad i parken »Kalfhagen» samt i »Laholmen» under regniga dagar på eftersommaren och hösten, på sjelfva grus-

vägarne. Vidare på Kåringön (m. Bohuslän), vid Göteborg vestra Dalsland (Töftedals kyrkogård).

6. *L. foetidus* SAV. Denna »vackra och lifliga» daggmusk har jag anträffat i mängd under bräder på drifbänklister såväl i Strömstad (Ekmanska myren; Blomsholms trädgård) som i Göteborg (Trädgårdsföreningen; Carnegiska Bruket) samt i Botaniske haven i Kristiania.

Professor MALMS förmodan, att denna lumbricid »ursprungligen till oss blifvit införd från sydligare länder i Europa, liksom så mången annan lägre djurförm, som bevisligen inkommit med sådana växter, som utifrån införeskrifvas af trädgårdsodlaren», synes hafva all sannolikhet för sig.

Jag vill här anföra: I början af Maj 1880 tog jag under ett bräde vid en drifbänk i Botaniske haven i Kristiania några exemplar. På samma ställe påträffade jag samtidigt ett exemplar af den i södra och mellersta Europa förekommande, för Skandinaviska halfön okända landtsnäcken *Hyalinia lucida* (Drap.) — diam. 15, alt. 5,8 millimeter; exemplaret öfverlemnades till Prof. L. ESMARK, Universitetet.

I Augusti månad 1900 tog jag åtskilliga exemplar af Lumbr. foetidus vid Göteborg, i en drifbänk, i Carnegiska bruksträdgården under ett bräde; samtidigt påträffade jag derstädes tre ex. af den för vår fauna ytterst sällsynta myriopoden *Cryptops hortensis* LEACH, som sedan öfverlemnades till Intendenten vid Göteborgs museum, d:r A. STUXBERG.

7. *L. subrubicundus* EISEN. I Strömsdalen vid Strömstad har jag några få gånger påträffat enstaka individ af arten. Ett ex. togs vid Carnegies bruk, Göteborg d. 9/5 1901.

8. *L. riparius* HOFFM. af mig anträffad flera gånger i och kring Strömstad, såsom vid Lejonkällan, Österröd (på lerig jordmån) Nötholmen, Keballs egor, (i rent postglacialskalgrus). Göteborg vid Örgryte 1900.

9. *L. turgidus* EISEN. Strömstad: »Ekmanska myren», Källeviken, Blomholm. — Dalsland på Jacobseruds egor nära riksgränsen vid kvarnfallet 1894.

10. *L. norvegicus* EISEN. Af denna art tog jag två ex. på Tranö (sundet öster om Senjen) Tromsø amt i Norge d. 17 Sept. 1896.

11. *L. mucosus* EISEN. Strömstad: »Ekmanaka myren» på sandgången i trädgården Juli 1891. Tre exemplar, längd 120, 135, 142 millimeter.

Exemplar af nästan alla de af mig i och kring Strömstad tagna arter af daggmaskar insändes, jemte åtskilliga andra evertebrater, från mig till Professor LOVÉN 1886.

Under mitt vistande i Isfjorden på Spetsbergen sommaren 1896 sökte jag förgäfvess efter såväl lumbricider, som ock myriopoder, oniscider och landtmollusker.

Disciferæ.

Fam. Hirudinidæ.

Gen. Nephelis SAV.

1. *N. octoculata* (BERGM.), förekommer allmänt i dammar och insjöar inom hela norra Bohuslän, såväl inåt landet, som ock i yttersta skärgården, t. ex. Kusterskären, Wäderöarne etc. och detta t. o. m. i sådana dammar der vattnet till följd af sjöstänk är mer eller mindre »bräckt».

2. *N. reticulata* MALM. Denna igel har jag ofta påträffat i sällskap med föregående, under stenar eller andra i flodbrädden liggande föremål omkring Strömstad, såsom vid stränderna af Strömsvattnet, Färingsjön med fl. sjöar och dammar inom norra Boh.

På Dalsland vid Kornsjön under bron på Böns egor (Töftedals sn) tog jag i Aug. 1876 ett tolfatal exemplar af denna art, men af föregående lyckades jag ej påträffa ett enda.

Gen. *Hirudo*, auct.

3. *H. medicinalis* LIN. Ehuruval jag af personer i och omkring Strömstad hört uppgifvas, att »Blodiglar» skulle förekomma på flera ställen inom orten, har jag likväl ej varit i tillfälle att anträffa sådana på mer än två ställen, nemligen i en mindre tjärn på hemmanet Helle, vid Dynekil (c:a $\frac{3}{4}$ mil från Strömstad) samt i »Grönnötjärnet» på Öddö ($\frac{1}{4}$ mil från Strömstad) helt nära den af badbesökande i Strömstad välkända »vallfartsorten» Tofterna.

Gen. *Anlostoma* Moq.-Tand.

4. *A. sanguisuga* (BERGM.) = *A. gulo* BRAUN, DIESING m. fl.

Allmän i diken, bäckar, dammar etc. Jag har observerat arten talrikast, under soliga dagar, straxt efter isslossningen, samtidigt och ofta i sällskap med *Gordius*. Benämningen »hästigel» är allmän i trakten och äldre personer veta noga akta sig för densamma.

Fam. *Clepsinidae*.Gen. *Clepsine* SAV.

5. *Cl. bioculata* (BERGM.): förekommer allmänt under stenar och andra i strandbrädden befintliga föremål, kring Strömsvattnet (Strömstad) med fl. sjöar och dammar i trakten, ofta i sällskap med *Cl. sexoculata*.

6. *Cl. marginata* (MÜLL.): två exemplar af denna art tog jag d. 6 Juni 1886 på undre sidan af ett i strandbrädden liggande murket trästycke vid »Gäsallén» strax ofvanför bryggeriet (Strömstad) i sällskap med såväl föregående, som följande arter.

7. *Cl. sexoculata* (BERGM.): allmän kring stränderna af Strömsvattnet med flera sjöar och smådammar i och kring Strömstad.

8. *Cl. heteroclita* (LIN.): af denna art tog jag i Juni 1883 ett exemplar under »Vernlandsbro» i bäcken som kommer från Färingsjön och faller ut i Strömsvattnet — c:a $\frac{1}{2}$ mil från Strömstad. Sedermera har jag träffat arten åtskilliga gånger vid Strömsvattnet. — Göteborg: vid Lindholmen på Hisingen tog jag i Aug. 1900 2 ex.

— *Cl. tessulata* (MÜLL.): ett 48 mm. långt exemplar togs tillsammans med *Cl. heteroclita* vid Lindholmen på Hisingen (Göteborg) i Aug. 1900.

Fam. Ichthyobdellidae.

Gen. Pontobdella LEACH.

9. *P. muricata* (LIN.) LAM. Förekommer rätt allmänt på Rockarter (*Raja clavata*, *batis* och *omer*) och man träffar ej sällan 7 à 8 individ på en rocka.

I Strömstadstrakten har jag hört fiskare kalla den »rockigel». Det största ex. jag anträffat, var vid medelutsträckning 190 millimeter.

Gen. Oxytonostoma MALM.

10. *O. typica* MALM. (? = *Ichthyobdella elegans* SARS; *Pisciola typica* LEV.): Våren 1884, tog jag på en *Raja batis* som fångats i Kosterfjorden på c:a 100 m. djup, ett exemplar af denna igel. Exemplaret stämde till alla delar öfverens med MALMS beskrifning och figur, med undantag af de röda tvärbanden på ryggen, som hos detta exemplar voro rent röda, utan någon dragning åt gult. De små hvita ryggvårtorna hos det lefvande djuret stucko bjert af mot den röda färgen och gaf det hela ett vackert utseende. Igeln satt fastsugen med båda sugskifvorna på ryggsidan af stjertroten hos sin värd.

Enär jag ej varit i tillfälle att taga del af SARS beskrifning öfver hans *Ichthyobdella elegans*, kan jag ej afgöra hurvida de skulle vara identiska och därför har jag bibehållit MALMS

benämning. Exemplaret i fråga insändes 1886 till Prof. LOVÉN, Zool. Riksmuseum, Stockholm.

Gen. *Callobdella* BEN & HESSE.

11. *C. nodulifera* (MALM). Denna igel har jag ofta tagit på åtskilliga fiskarter, företrädesvis på *torskartade* sådana.

MALM l. c. beskriver och afbildar 4 hithörande former eller arter neml. *nodulifera*, *crassicauda*, *subfasciata* och *gracilis*. Dessa fyra sammanslår JOHANSSON till en art, under ofvanstående namn »*nodulifera*».

Bland de af mig tagna individ, har jag lyckats påträffa alla fyra MALMS former och ändå flera färgvariationer. Dock vill jag hålla för sannolikt att MALMS *Pisciola gracilis* är en god art, men att mera bestämdt yttra mig härom nu, dertill är jag i saknad af nödigt material. Jag har anträffat denna form två gånger, i Aug. 1880 på *Trigla hirundo* från Kosterfjorden och i Juli 1887 på *Cottus scorpius* från Strömstads fjärd.

Gen. *Pisciola* BLAINV.

12. *P. piscium* BERGM. 1757 (= *P. geometra* (LIN.) MOQ.-TAND.). Ett exemplar togs på *Coregonus lavaretus* erhållen i laxryssja vid Strömstad 1883 Juni. — Den 15 Nov. 1885 erhöj jag i bottenskrapa på c:a 5 m. djup i Rödösundet (Sundsvallstrakten) 1 ex. tillsammans med *Gammarus loricatus* och yngre individ af *Idotea entomon*. I Sept. 1899 tog jag ett ex. på *Coregonus lavaretus* fångad i Arndalsbukten, Hisingen, nära Göteborg.

Gen. *Abranchus* L. JOHANSSON 1896.

13. *A. sexoculatus* (MALM). Af denna art lär en enligt JOHANSSON endast tre ex. blifvit funna, deraf ett, af mig tillvarataget och till Zool. Rika.-mus. öfverlemnadt. Detta ex., som närmare granskats af JOHANSSON (l. c. pag. 36), tog jag vid Strömstad på *Zoarces viviparus*.

Den $\frac{4}{4}$ 1887 tog jag på *Cottus bubalis* vid Strömstad en igel, hvilken ej kunde skiljas från *A. sexoculata* på annat, än att afståndet mellan de främre ögonen var = halfva afståndet mellan de bakre.

Gen. *Platybdella* MALM.

14 *P. anarrhichæ* (DIESS.) MALM. Denna igel träffas synnerligast vår- och sommartiden, på *Anarrhichas lupus*, om än icke såsom den »allmännaste af våra hafsiglar» (MALM), så likväl ingalunda sällsynt, helst på äldre fiskar, der jag någon gång kunnat räkna ända till 18 à 20 st. på samma fisk. De föredraga gälarne, munhålan och gällockens insidor, som vistelseort hos sin värd, men man får ofta se individer vid och helst under bröstfenrötterna.

Tillägg.

Ordn. Trematoda.

Gen. *Phylline* OKEN.

Ph. hippoglossi (MÜLL.) allmän på *Hippoglossus maximus*.

Gen. *Octobothrium* LEUK.

O. palmatum S. LEUK. Förutom på gälarne hos *Molva vulgaris*, har jag en gång d. $\frac{31}{3}$ 1890 tagit ett exemplar på bakre, venstra gälbågen hos ett c:a 4 cm. långt ex. af *Gadus merlangus* från Kosterfjorden.

Gen. *Distoma* RETZ.

Distoma (*Cladocoelium*) *hepaticum* ABILG. et MEHLIS. »*Leverflundran*» förekommer rätt ofta hos får i Strömstadetrakten; synnerligast under våta höstar.

Gen. *Tristoma* VON BEN.

Tr. mola, BLANCH.: denna egendomliga plathyelmint har jag tagit åtskilliga gånger på yngre individ af *Orthagoriscus mola*, fångade dels i Kosterfjorden och dels å Säckefjorden nära Dynekil.

Gen. *Amphiptykes* WAGENER.

A. Urna, WAGEN., har jag flera gånger ertappat hos *Chimæra monstrosa*.

Sommaren 1883, erhöll jag en del individ i bottenskrapa på lerig botten och ringa (c:a 6 m.) djup på norra sidan af Ynholmen, vid inloppet till Dynekil (c:a $\frac{3}{4}$ mil nv. Strömstad); dessa exempl. öfverlemnades 1886 till Professor LILLJEBORG i Uppsala.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 728.)

Stockholm. *K. Kommerskollegium.*

Yrkesinspektionens verksamhet. 1900. 8:o.

— *K. Landbruks-Akademien.*

Handlingar och tidskrift. Årg. 40 (1901): N:r 4. 8:o.

— *Kongl. Landbruksstyrelsen.*

Meddelanden. 1901: N:r 11. 8:o.

— *Riksdagens Bibliotek.*

Katalog. 1901. 8:o.

Association géodésique internationale.

Comptes-rendus. Conf. 13 (Paris, 1900): Vol. 1. 4:o.

Basel. *Naturforschende Gesellschaft.*

Verhandlungen. Bd 13: H. 2; 14 & Namenverzeichn. u. Sachreg. zu Bd 6—12 (1875—1900). 1901. 8:o.

Belgrad. *Académie Royale de Serbie.*

Glas. 60; 62. 1901. 8:o.

Bergen. *Museum.*

SARS, G. O., An account of the Crustacea of Norway. Vol. 4 (Copepoda, Calanoida): P. 1—2. 1901. 8:o.

Berlin. *Deutsche geologische Gesellschaft.*

Zeitschrift. Bd 53 (1901): H. 3. 8:o.

Breslau. *Schlesische Gesellschaft f. vaterländische Cultur.*

Jahres-Bericht 78 (1900) & Ergänzungsheft. 8:o.

Bruxelles. *Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie.*

Bulletin. T. 15 (1901): Fasc. 5. 8:o.

Budapest. *K. Ung. Reichs-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*

Jahrbücher. Bd 30 (1900): Th. 2. 4:o.

Publicationen. 1901: Kötet 4. 4:o.

Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*

Anales. T. 52 (1901): Entr. 3. 8:o.

Buitenzorg. *Jardin botanique.*

Mededeelingen. 50. 1901. 8:o.

Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoölogy.*

Bulletin. Vol. 39: No 1. 1901. 8:o.

Annual report. 1900/1901. 8:o.

Catania. *R. Osservatorio.*

Småskrifter, 17 st. 1901. 8:o.

Cordoba. *Academia Nacional de ciencias.*

Boletin. T. 16: Entr. 4. 1901. 8:o.

Danzig. *Naturforschende Gesellschaft.*

Schriften. N. F. Bd 10: H. 2—3. 1901. 8:o.

Dorpat. *Naturforscher-Gesellschaft.*

Sitzungsberichte. Bd 12 (1900): H. 3. 8:o.

(Forts. å sid. 758.)

Cirkulation relativ zu der Erde.

VON V. BJERKNES.

[Mitgeteilt am 11 December 1901 durch S. ARRHENIUS.]

1. In einigen früheren Arbeiten¹⁾ habe ich auf die Vorteile hingewiesen, die man gewinnt, wenn man bei der Diskussion von Luft- und Meeresbewegungen den Lord KELVIN'schen Begriff der Cirkulation geschlossener Kurven zu Grund legt. Dabei habe ich mich zur Vereinfachung nur mit der absoluten Bewegung beschäftigt, und zugleich die Reibung vernachlässigt. Dadurch gewinnt man den Vorteil, die *primären* Bewegungsursachen in vollkommener Reinheit studieren zu können. Wenn es sich aber nicht mehr um die Diskussion rein theoretischer Fragen, sondern um konkrete praktische Anwendungen handelt, so ist die Berücksichtigung der Rotation der Erde und der Reibung unentbehrlich. Die erste Lücke ist nun sehr leicht auszufüllen, und dieses wird im folgenden geschehen. Anders verhält es sich dagegen mit der Reibung. Allerdings hat es mathematisch keine Schwierigkeit, das Linienintegral aufzuschreiben, welches den Einfluss der Reibung auf die Cirkulation einer Kurve darstellt. Geht man aber von der rationellen Theo-

¹⁾ V. BJERKNES, »Über einen hydrodynamischen Fundamentalsatz und seine Anwendung besonders auf die Mechanik der Atmosphäre und des Weltmeeres« Kongl. svenska Vetenskapsakademiens Handlingar Band 31, 1898 »Das dynamische Princip der Cirkulationsbewegungen in der Atmosphäre«, meteorologische Zeitschrift 1900.

rie der Reibung aus, so wird dieses Integral von den Geschwindigkeitssdifferenzen im unendlich kleinen abhängen, und das sind Grössen, welche der *Beobachtung* nicht zugänglich sind. Eine direkte Anwendung dieses Integrales in der Praxis ist deshalb nicht möglich, so dass man nothwendig indirekte Wege einschlagen muss, um den Einfluss der Reibung genauer kennen zu lernen. Das Betreten dieser indirekten Wege erfordert aber nothwendig, dass der Einfluss der Reibung in den Gleichungen durch ein Symbol dargestellt wird. Ein solches wird deshalb auch im folgenden eingeführt, und zwar um so mehr, als das explicite Auftreten dieses Symbolen für die rein qualitativen Diskussionen nützlich ist. Denn bei solchen kommt es meistens nur darauf an zu erkennen, in welcher Richtung sich der Einfluss der Reibung geltend macht, und das lässt sich meistens leicht thun.

2. *Die kinematische Beziehung zwischen der absoluten und der relativen Cirkulation.* — Der Lord KELVIN'sche Begriff der Cirkulation ist ein Mass der Bewegung einer geschlossenen Kurve in sich selbst zurück. Wenn U_a die Geschwindigkeit eines beliebigen Partikelchens der Kurve ist, bezogen auf ein ruhendes Koordinatensystem, und U'_a die Projektion dieser Geschwindigkeit auf die Tangente der Kurve, so wird die Cirkulation C_a der Kurve durch das Integral

$$(1) \quad C_a = \int U'_a ds$$

definiert, wo ds ein Linienelement der Kurve ist, und wo die Summation zu der ganzen geschlossenen Kurve auszudehnen ist.

Es bedeute weiter U die Geschwindigkeit eines Punktes der Kurve relativ zu der rotierenden Erde, und U' die Projektion dieser Geschwindigkeit auf die Tangente der Kurve. Nach den Principen der relativen Bewegung ist dann

$$U'_a = U' + U'_e,$$

wo U'_e die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit U_e eines Punktes ist, welcher momentan mit dem betrachteten materieller.

Punkt der Kurve zusammenfällt, der aber mit der Erde starr verbunden ist, und somit die Bewegung der Erde mitmacht. Durch Einsetzen in (1) zerlegt sich die absolute Cirkulation C_0 der Kurve in zwei partielle

$$(2) \quad C_a = C + C_e,$$

wo C die Cirkulation der Kurve relativ zu der rotierenden Erde ist,

$$(3) \quad C = \int U' ds,$$

und wo C_e die Cirkulation einer Kurve darstellt, welche momentan mit der betrachteten Kurve zusammenfällt, deren sämtliche Punkte aber in starrer Verbindung mit der Erde sind,

$$(4) \quad C_e = \int U_e' ds.$$

Diese letztere Cirkulation einer starren, mit der Erde starr verbundenen Kurve lässt sich leicht berechnen.

Wir können erst den speciellen, in der Anwendung auf die grosse atmosphärische Cirkulation aber besonders wichtigen Fall betrachten, dass die Kurve die Form eines Parallelkreises hat. Wenn eine solche Kurve starr, und mit der Erde starr verbunden ist, so haben alle ihre Punkte eine und dieselbe Geschwindigkeit ωr , wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde, und r der Radius des Parallelkreises ist. Durch Einsetzen in (4) geht ωr ausserhalb des Integralzeichens. Innerhalb bleibt nur ds stehen, und das Integral des Linienelementes giebt die Länge $2\pi r$ des Parallelkreises. Der Wert von C_e wird also $2\omega \cdot \pi r^2$, oder

$$(5) \quad C_e = 2\omega S,$$

wo S den Flächeninhalt des Parallelkreises darstellt.

Allgemeiner können wir eine beliebige Kurve betrachten, welche in der Ebene eines Parallelkreises enthalten ist. Die Geschwindigkeit eines Punktes der Kurve, welcher den Abstand r von der Erdachse hat, wird wieder ωr . Stellt Θ den Winkel dieser Geschwindigkeit mit der Tangente der Kurve dar, so fin-

den wir für die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit $U'_c = \omega r \cos \Theta$. Setzen wir dieses in (4) ein, und nehmen den konstanten Faktor 2ω ausserhalb des Integralzeichens, so wird

$$(6) \quad C_c = 2\omega \int \frac{1}{2} r \cdot \cos \Theta ds.$$

Die Grösse $\frac{1}{2} r \cdot \cos \Theta ds$ ist aber, wie man leicht sieht, der Flächeninhalt desjenigen elementaren Dreiecks, dessen Seiten das Linienelement ds und die zwei Vektorradien zu den Endpunkten dieses Linienelementes sind. Das Integral stellt deshalb das Areal S dar, welches die geschlossene Kurve begrenzt, und C_c reducirt sich wieder auf die einfache Form (5).

Schliesslich sieht man leicht ein, dass eine beliebige starre, und mit der Erde starr verbundene Kurve dieselbe Cirkulation hat, wie ihre Projektion auf der Äquatorebene, oder auf der Ebene eines beliebigen Parallelkreises. Denn ein Punkt der gegebenen Kurve hat dieselbe Geschwindigkeit, wie seine Projektion auf der Äquatorebene, nämlich ωr , wenn r der Radius Vektor des projicierten Punktes ist. Stellt ds das Linienelement der projicierten Kurve dar, und Θ den Winkel der Geschwindigkeit ωr mit diesem Elemente, so wird $\omega r \cos \Theta ds$ die längs der projicierten Kurve zu integrierende Grösse. Dem Elemente ds entspricht nun auf der gegebenen Kurve ein Element von der Länge

$\frac{ds}{\cos \psi}$, wo ψ der Winkel ist, welchen das gegebene und das

projicierte Linienelement mit einander bilden. Andererseits hat die Geschwindigkeit ωr auf die Tangente der gegebenen Kurve die Projektion $\omega r \cos \Theta \cos \psi$, und die zu integrierende Grösse also wieder $\omega r \cos \Theta ds$, so dass die zwei Integrale mit einander identisch werden. Wir kommen also auch im allgemeinsten Falle zu der Formel (6), und von dieser zu der Formel (5) zurück, wobei immer die Grösse S als diejenige Fläche definiert werden kann, welche von der Projektion der Kurve auf der Äquatorebene begrenzt wird. Es ergibt sich also das folgende Resultat, auf welchem der Übergang von der Betrachtung der absoluten zu der Betrachtung der relativen Cirkulation beruht:

(I). *Die Cirkulation einer starren, mit der Erde starr verbundenen Kurve ist gleich dem Areal ihrer Projektion auf die Äquatorebene, multipliciert mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit der Erde.*

Hervorzuheben ist, dass sich dieses Areal aus der Integration (6) als eine Grösse mit Vorzeichen ergibt, in Übereinstimmung mit den bekanten Principien für das Vorzeichen von Flächen, nach welchen man dasselbe mit einer gewählten Umlaufsrichtung auf der begrenzenden Kurve in Verbindung setzt.

Nach diesem Resultate geht die Formel (2) über in

$$(7) \quad C_a = C + 2\omega S,$$

welches die gesuchte Beziehung zwischen der absoluten und der relativen Cirkulation einer Kurve ist.

3. *Die Dynamik der relativen Cirkulation.* — Wenn die einzelnen Punkte einer materiellen Kurve der Wirkung bewegender Kräfte ausgesetzt sind, wird sich ihre absolute Cirkulation C_a in der Zeit nach einer Gleichung von der Form

$$(8) \quad \frac{dC_a}{dt} = F$$

verändern. F ist dann das Linienintegral der Tangentialkomponenten der beschleunigenden Kräften, welche die einzelnen Punkte der Kurve angreifen, und kann kurz als die cirkulations-erzeugende Kraft bezeichnet werden. Bei der Berechnung dieser Kraft kann man immer von solchen beschleunigenden Kräften absehen, deren Linienintegral längs der geschlossenen Kurve gleich Null ist. Auf der einfachen Form der Gleichung (8) beruht zuletzt die grosse Brauchbarkeit des Cirkulationsbegriffes. Zu dieser einfachen Form kommt man, weil, wie Lord KELVIN gezeigt hat, das Linienintegral der Beschleunigung der einzelnen Punkte einer geschlossenen Kurve gleich der Ableitung der Cirkulation der Kurve nach der Zeit ist.

Um zu der entsprechenden Gleichung für den Fall der relativen Bewegung zu kommen, substituieren wir nach (7) den Wert von C_a , wodurch sich

$$\frac{d(C + 2\omega S)}{dt} = F$$

oder

$$(9) \quad \frac{dC}{dt} = F - 2\omega \frac{dS}{dt}$$

ergiebt. Das Glied $- 2\omega \frac{dS}{dt}$ tritt in der letzten Gleichung so auf, als wäre es eine cirkulationserzeugende Kraft, genau wie F . Diese scheinbare cirkulationserzeugende Kraft hängt einerseits von der Winkelgeschwindigkeit ω der Erde ab, und andererseits von der Geschwindigkeit $\frac{dS}{dt}$, mit der sich das Areal der Projektion der Kurve auf der Äquatorebene ändert. Diese mit dem negativen Vorzeichen versehene Geschwindigkeit werden wir die *Kontraktionsgeschwindigkeit* des Areales nennen. Der Vergleich der Gleichungen (8) und (9) giebt also das folgende Resultat:

(II). *Die Cirkulation einer materiellen Kurve kann so behandelt werden, als wäre sie eine absolute, vorausgesetzt dass man die wirklich thätigen cirkulationserzeugenden Kräfte durch eine fiktive solche Kraft ergänzt, deren Betrag man findet durch Multiplikation der doppelten Winkelgeschwindigkeit der Erde in die Kontraktionsgeschwindigkeit des Areales, welches die Projektion der Kurve auf die Äquatorebene begrenzt.*

Der Satz entspricht vollkommen CORIOLIS' Theorem für die relative Bewegung eines einzigen materiellen Punktes, und kann selbstverständlich auch von diesem Theoreme abgeleitet werden. Die obige freistehende Ableitung ist aber entschieden die einfachste.

4. *Der allgemeinste hydrodynamische Satz über absolute Cirkulation.* — Die materielle Kurve gehöre nun zunächst einer reibungslosen flüssigen oder gasförmigen Körper an, und es sollen keine andere äussere Kräfte als die Schwere wirken. Die Schwere wirkt nicht cirkulationserzeugend, da ihre Beschleunigung das Linienintegral Null längs jeder geschlossenen Kurve hat. Die cirkulationserzeugende Kraft F reduciert sich dann auf das Linien-

integral derjenigen beschleunigenden Kraft, welche von dem Gradienten herrührt. Die absolute Cirkulation jeder dieser Flüssigkeit angehörenden materiellen Kurve muss deshalb der Gleichung

$$(10) \quad \frac{dC_a}{dt} = A$$

genügen, wo A durch das Integral

$$(11) \quad A = - \int v dp$$

gegeben ist. Hier bedeutet v das spezifische Volumen, und p den Druck der Flüssigkeit, und dass A wirklich das Linienintegral des von den Gradienten herrührenden beschleunigenden Kraft darstellt, erhellt sofort, wenn wir dp in der Form $\frac{\partial p}{\partial s} ds$ schreiben, und uns erinnern, dass $-\frac{\partial p}{\partial s}$ die zur Kurve tangentielle Komponente des Gradienten darstellt.

Für die praktische Berechnung der Werte von A aus den längs der Kurve angestellten Beobachtungen benutzt man am besten den Integraalausdruck (11). Wenn es sich um qualitative Diskussionen handelt, ist aber eine andere Deutung von A sehr zweckmässig. Durch eine Umformung des Integrales (11) erkennt man nämlich, dass man A als eine Zahl definieren kann, zu der man folgendermassen gelangt. Man denkt sich die isobaren Flächen für Druckunterschiede Eins, und die isosteren Flächen (Flächen gleichen spezifischen Volumens) für Differenzen Eins des spezifischen Volumens gezeichnet. Diese zwei Flächensscharen zerlegen den ganzen Raum in ein System von Röhren, die isobar-isosteren Einheitsröhren, und A ist die Anzahl dieser Röhren, welche innerhalb der geschlossenen Kurve fallen. ¹⁾

¹⁾ Dieses gilt selbstverständlich erst dann exakt, wenn man unendlich kleine Einheiten für Druck und spezifisches Volumen wählt. Die entsprechenden unendlich dünnen Einheitsröhren habe ich *Solenoids* genannt. Dieser Name mag befremdend gewirkt, und bei vielen Lesern AMPÈRE'sche elektrodynamische Vorstellungen erweckt haben. Die Bezeichnung ist jedoch in völliger Übereinstim-

Ehe wir zu dem Fall der relativen Bewegung übergehen, werden wir die Gleichung (10) erst verallgemeinern durch Hinzufügung eines Gliedes $- R$, welches den Einfluss des Reibungswiderstandes auf die Cirkulation der Kurve darstellen soll. (10) wird dann

$$(12) \quad \frac{dC_a}{dt} = A - R$$

Es hat keine Schwierigkeit, ein Integral aufzuschreiben, aus dem man, formal gesehen, R berechnen kann, ganz entsprechend dem Integrale (11) für die Berechnung von A .¹⁾ Während sich aber das Integral (11) für sofortige praktische Anwendung eignet, weil die gewöhnlichen meteorologischen Beobachtungen genügenden Daten für die Ausführung der Rechnung geben, kann man einen

mit dem Sprachgebrauch der modernen Vektoranalysis, obgleich der Zusammenhang aus der hier gegebenen Form des Satzes nicht hervorgeht. Lord KELVIN hat, in unmittelbarer Anschluss an der AMPÈRE'schen Bezeichnung, den Ausdruck »solenoidal verteilte Magnetismus« eingeführt, und davon haben sich die allgemeineren Ausdrücke »solenoidal verteilte Vektorgrösse«, oder »solenoidale Vektorgrösse« entwickelt. Dadurch meint man Vektorgrößen, deren räumliche Verteilung mit Hilfe eines Systems von Röhren angegeben werden kann. Die hier in Frage kommenden Solenoide, deren Wände aus isobaren und isosteren Flächen bestehen, sind nun in der That die Vektorröhren einer solenoidalen Vektorgrösse, des »Wirbelgradienten«, auf den man das Studium der Bildung von Cirkulationsbewegungen und Wirbeln zurückführen kann. Man wird zu der Betrachtung dieser Vektorgrösse geführt, wenn man nach HELMHOLTZ die Sätze in Frage als Sätze über Wirbeln, anstatt mit Lord KELVIN als Sätze über Cirkulationen formuliert (Vergleiche meine Abhandlung »Über die Bildung von Cirkulationsbewegungen und Wirbeln«, Videnskabselskabets Skrifter, Christiania 1898).

¹⁾ Wenn man durch κ den Reibungskoeffizient, und im übrigen, wie oben, durch U die Geschwindigkeit, und durch v das spezifische Volumen bezeichnet, so findet man, indem man von den Bewegungsgleichungen der reibenden Flüssigkeiten ausgeht, und einigen bei atmosphärischen Bewegungen erlaubten Vernachlässigungen macht

$$R = \int \kappa v (\text{curl}^2 U)_t ds,$$

wo curl ein bekanntes Operationssymbol der Vektoranalysis ist, und wo der Index t wie gewöhnlich bedeutet, dass nur die zu der Kurve tangentielle Komponente des Vektors $\text{curl}^2 U$ in Frage kommt. Zur Leitung bei dem Aufsuchen der indirekten Wegen, welche zu der Bestimmung von R leiten können, dürfte dieses Integral ihre Bedeutung haben. Diese Aufgabe werden wir aber hier nicht aufnehmen.

entsprechenden Gebrauch des Integrales für R nie machen, weil die in demselben auftretenden Geschwindigkeitsdifferenzen im unendlich kleinen nicht der Beobachtung zugänglich sind. Man muss deshalb vielmehr den umgekehrten Weg einschlagen, dass man R aus der Gleichung (12) oder aus der entsprechenden Gleichung (13) unten für die relative Bewegung zu bestimmen sucht, in solchen Fällen, wo sämtliche übrigen Glieder der Gleichung nach den Beobachtungen bekannt sind. Mit Rücksicht hierauf hat das explicite Auftreten des Gliedes R in der Gleichung ihre Bedeutung. Ebenso ist es mit Rücksicht auf die qualitativen Diskussionen nützlich, wo es weniger auf den Betrag als auf der Richtung des Reibungswiderstandes ankommt. Diese Richtung oder das Vorzeichen, welches R in der Gleichung (12) haben soll, muss in jedem einzelnen Fall durch Diskussion gefunden werden.

5. *Die Cirkulation relativ zu der Erde.* — Mit Hülfe des Satzes (II) kommen wir nun ohne weiteres von der Gleichung (12) zu der folgenden hinüber

$$(13) \quad \frac{dC}{dt} = A - R - 2\omega \frac{dS}{dt}$$

Diese Gleichung gilt dann für jede in sich zurückläufende Kurve, welche aus Partikelchen der Atmosphäre oder des Meeres besteht, und sie beschreibt die Cirkulation dieser Kurve, so wie wir sie von der rotierenden Erde aus sehen. Gehen wir davon aus, dass die einzigen Kräfte, welche in merkbarer Weise die Bewegung der Luft- oder Meeresspartikelchen beeinflussen, die folgenden sind: 1) Die Schwerkraft, darin die Centrifugalkraft wegen der Rotation der Erde einberechnet; 2) der auf dem Druck beruhende Gradient; 3) die Reibung; 4) die »ablenkende Kraft der Erdrotation«; — so können wir behaupten, dass alle Luft- oder Meerescirkulationen nach der Gleichung (13) verlaufen müssen.

Jede Aufgabe der theoretischen Mechanik ist, wenn sie in direkter Form aufgestellt wird, eine prognostische, genau wie die meist bekannte Aufgabe der praktischen Meteorologie. Das Ziel ist den dynamischen und physikalischen Zustand der Atmo-

sphäre zu einer späteren Zeit vorauszusagen, wenn zu einer gegebenen Zeit dieser Zustand hinlänglich genau bekannt ist. Andererseits kann die Aufgabe auch in der umgekehrten Fassung auftreten: wenn die Änderungen des atmosphärischen Zustandes während einer gewissen Zeit bekannt sind, auf die physikalischen und dynamischen Umständen zurückzuschliessen, welche die Ursachen der eingetretenen Änderungen gewesen sind. Es ist ein Teil dieser prognostischen Aufgabe oder ihrer Umkehrung, welche die Gleichung (13) löst. Bei ihrer Anwendung hat man vor allem auf das folgende zu achten.

1) Die Gleichung gilt für jede beliebige geschlossene, aus Luft- oder Meerespartikelchen bestehende Kurve. Welche Form und Lage die Kurve zu der Anfangszeit haben soll, ist man also vollkommen frei zu *wählen*. Hierin liegt einer der wichtigsten Vorzüge der Methode. Die Wahl trifft man ausschliesslich mit Rücksicht auf die Zweckmässigkeit, mit der man das Beobachtungsmaterial verwerten, oder die Rechnung vereinfachen kann. Die Lage, welche die Kurve zu der Anfangszeit relativ zu den Solenoiden hat, spielt dabei selbstverständlich die wichtigste Rolle. Nun verlaufen die Solenoide immer sehr angenähert parallel zu der Erdoberfläche. Kurven, welche in konstanter Seehöhe verlaufen, werden deshalb, praktisch gesprochen, keine Solenoide umschliessen. Kurven andererseits, welche zu der Anfangszeit in Vertikalebene enthalten sind, und welche also aus zwei über einander liegenden horizontalen Kurventeile bestehen, die durch zwei vertikale Kurvenstücke mit einander verbunden sind, werden dagegen die grösste Anzahl von Solenoiden umschliessen, welche unter sonst gleichen Umständen eine Kurve umschliessen kann. Auf Kurven dieser zwei Gattungen werden sich die Betrachtungen meistens beschränken können. Wir bezeichnen sie kurz als die *horizontalen* und die *vertikalen*, ohne Rücksicht darauf, dass sie im späteren Verlauf der Bewegung meistens nicht horizontal bez. vertikal bleiben werden. — Es verdient auch in dieser Verbindung hervorgehoben zu werden, dass wegen der überwiegend horizontalen Richtung des Windes, die Par-

tikechen einer Kurve immer verhältnissmässig lange auf dem Niveau bleiben, das sie einmal einnehmen. Hieraus folgt, dass eine horizontale Kurve immer verhältnissmässig lange horizontal bleibt, und dass eine vertikale, wenn sie auch nicht vertikal bleibt, so doch verhältnissmässig lange einen und denselben Solenoidenbündel umschliesst.

2) Ist die Form der Kurve gewählt, so ist das erste, was man zu kennen verlangen muss, *die Bewegung der Kurve zu der Anfangszeit*. Diese ergibt sich aus den Beobachtungen des Windes, und, wenn es sich um Kurven oder Kurventeilen in den höheren Luftschichten handelt, aus Messungen der Wolkenbewegungen. Kennt man nach diesen Beobachtungen die Geschwindigkeit einer genügenden Anzahl von Punkten der Kurve, so berechnet man aus den tangentiellen Komponenten die Cirkulation C , und aus den normalen die Kontraktionsgeschwindigkeit $-\frac{dS}{dt}$ des auf der Äquatorebene projicierten Areales. Dadurch ist das letzte Glied rechts in der Gleichung (13) bekannt, und ebenso der Anfangswert von C , welcher nach der Integration einzusetzen ist.

3) Wenn in einer genügenden Anzahl von Punkten, welche längs der Kurve verteilt sind, Beobachtungen von *Druck, Temperatur und Feuchtigkeit* vorliegen, so kann man daraus das spezifische Volumen v berechnen, und dann, mit Hülfe des Integrales (11), die Anzahl A von Solenoiden innerhalb der Kurve ermitteln.

4) Das dritte auf der rechten Seite der Gleichung vorkommende Glied, R , kann, wie schon hervorgehoben, nie durch direkten Beobachtungen gefunden werden. Man muss vielmehr R aus der Gleichung selbst zu berechnen suchen, in solchen Fällen, wo sämtliche übrigen Glieder hinlänglich genau bekannt sind. Dazu eignet sich natürlich vor allem der Fall der stationären Cirkulation, wo C von der Zeit unabhängig ist, so dass sich die Gleichung auf

$$(14) \quad A - R - 2\omega \frac{dS}{dt} = 0$$

reduciert. Hat man in dieser Weise den Wert von R in gewissen Fällen kennen gelernt, so kann man diesen Wert in analogen Fällen in der allgemeinen Gleichung (13) benutzen.

Auf Anwendungen des Satzes in den Einzelheiten soll hier nicht eingegangen werden. Ich teile nur einige der meist nahe liegenden Folgerungen mit, welche ich schon in meinen Vorlesungen an der Hochschule Stockholm im Frühjahrsemester 1901 zugleich mit dem Satze selbst mitgeteilt habe, und knüpfe daran einigen allgemeinen Bemerkungen. Mein damaliger Zuhörer, Hr SANDSTRÖM, hat es übernommen, weitere Konsequenzen auszuarbeiten, und ich gestatte mir auf seine diesbezüglichen Publikationen hinzuweisen.

6. *Anfang der Bewegung von einem Zustande der relativen Ruhe aus.* — Herrscht relativ zu der Erde Ruhe, so ändert sich das Areal S von der Projektion einer Kurve auf der Äquatorebene nicht, und das letzte Glied in der Gleichung (13) verschwindet. Ebenso wird das von Geschwindigkeitsdifferenzen abhängige Glied R gleich Null, und die Gleichung reduciert sich auf

$$(15) \quad \frac{dC}{dt} = A$$

Nach dieser Gleichung wird also die relative Cirkulation von einem Zustande der relativen Ruhe aus anfangen. Die Gleichung hat genau dieselbe Form, wie die für die absolute Cirkulation in einer reibungslosen Flüssigkeit gültige Gleichung (10). Wenn es sich um den ersten Anfang der Bewegung handelt, so können wir also sowohl von der Reibung, wie von der ablenkenden Kraft der Erdrotation absehen, und wir haben nichts zu dem in den früheren Abhandlungen mitgeteiltem hinzuzufügen, solange es sich um die *primären* Ursachen der atmosphärischen Bewegungen handelt.

Die erste Ursache der Cirkulation bleibt also das Auftreten von Solenoiden, das heisst von Temperaturunterschieden. Und die erste Wirkung dieser Solenoide wird eine *Cirkulation der in den Vertikalebene enthaltenen Kurven sein*, während die hori-

zontalen Kurven, welche keine Solenoide umschliessen, nicht in Cirkulation kommen.

Wäre nun die Erde ruhend, und die Luft reibungslos, so würde die Bewegung als eine Cirkulation nur in den Vertikal-ebenen fortsetzen. Sobald die einzelnen Punkte der vertikalen Kurven in Bewegung gekommen sind, werden aber auch die Glieder — R , und — $2\omega \frac{dS}{dt}$ anfangen sich geltend zu machen.

Dabei ist zu bemerken, dass die Geschwindigkeitsdifferenzen im unendlich kleinen, von welchen die Reibung abhängt, erst relativ spät grössere Werte erreichen, so dass man eine Zeit nur mit dem Gliede — $2\omega \frac{dS}{dt}$ zu rechnen braucht. Auf die Cirkulation der vertikalen Kurven, hat dieses Glied vorläufig keinen Einfluss. Denn die Bewegung dieser Kurven in sich selbst zurück hat keine Änderungen ihrer Projektionen auf der Äquatorebene zu Folge. Anders dagegen mit den *horizontalen Kurven*. Eine solche, welche eine erwärmte oder eine erkältete Stelle ringförmig umgiebt, wird als Folge der angefangenen Cirkulation in den Vertikalebenen eine Expansions- oder Kontraktionsbewegung ausführen. Das Areal ihrer Projektion auf der Äquatorebene wird dadurch zu- oder abnehmen, und die Kurve kommt, obgleich sie keine Solenoide umschliesst, in Cirkulation. Dieses wird, solange wir noch von der Reibung absehen können, nach der Gleichung

$$\frac{dC}{dt} = -2\omega \frac{dS}{dt}$$

vor sich gehen. Diese kann für die Zeit von t_0 zu t , während welche die Kurve weder Solenoide umschliesst, noch von der Reibung merkbar verzögert wird, integriert werden

$$(16) \quad C = -2\omega(S - S_0).$$

S_0 bedeutet dabei das Areal der Projektion zu der Zeit t_0 . Solange die Kurve eine horizontale bleibt, und die Reibung in Vergleich zu dem trägen Widerstand vernachlässigt werden darf,

nimmt also die Cirkulation der Kurve zu, proportional der Abnahme des Flächeninhaltes ihrer Projektion auf der Äquatorebene. Wenn sich später die Reibung geltend macht, während doch die Kurve horizontal bleibt, hat man die allgemeinere Gleichung

$$(17) \quad \frac{dC}{dt} = -R - 2\omega \frac{dS}{dt}$$

anzuwenden, und wenn die Cirkulation der Kurve stationär geworden ist,

$$(18) \quad R = -2\omega \frac{dS}{dt}$$

eine Gleichung, welche sich vorzüglich für die Bestimmung der Werte von R eignet.

In welcher Richtung diese Cirkulationen der horizontalen Kurven einsetzen werden, ist leicht zu erkennen. Auf einer solchen Kurve können wir die Umlaufsrichtung *mit* der Rotation der Erde oder die *cyklonische* (auf der nördlichen Halbkugel also S-E-N-W) als die positive, und die entgegengesetzte, oder die *anticyklonische*, als die negative wählen. Diese Definition ist vollkommen eindeutig, wenn wir die unnöthige Komplikation vermeiden, dass eine Kurve sich selbst schneidet, und ebenso von dem Fall absehen, dass eine Kurve theils auf der nördlichen, und theils auf der südlichen Halbkugel liegt. Bei dieser Wahl der positiven Umlaufsrichtung findet man durch die Integration (4) das Areal S immer als eine positive Grösse, und es ergibt sich die einfache Regel:

(III) *Eine horizontale Kurve, welche kontrahiert, erhält cyklonische, eine welche expandiert, anticyklonische Cirkulation.*

Durch diese Sätze über die Cirkulation der horizontalen Kurven finden wir also die bekannten Resultate, welche man sonst durch die Betrachtung der horizontalen Komponente der ablenkenden Kraft der Erdrotation ableitet. Also um die wichtigsten Fällen zu erwähnen: Eine Kurve, welche die ganze Erde wie ein Parallelkreis umgiebt, und den oberen, polwärts

strömenden Luftmassen angehört, wird kontrahieren, und deshalb eine Cirkulation *mit* der Rotation der Erde, von West nach Ost, erhalten. Eine ähnliche Kurve dagegen, welche den unteren, äquatorwärts strömenden Luftmassen angehört, wird expandieren, und dadurch Cirkulation gegen die Rotation der Erde, von Ost nach West annehmen. Und ferner, eine Kurve, welche unten an der Erde ringförmig das Centrum einer Cyklone umgiebt, wird cyklonische, eine Kurve, welche in gleicher Weise das Centrum eine Anticyklone umgiebt, wird eine anticyklonische Cirkulation annehmen.

7. *Die Rückwirkung der horizontalen Cirkulationen auf den vertikalen.* — Bis zu diesem Punkte hat die Cirkulationstheorie zu keinen qualitativ neuen Resultaten geführt, sondern nur die Hilfsmittel gegeben, schon längst bekannte und verstandene Bewegungen genauer quantitativ zu studieren. Anders dagegen, wenn wir den nächsten Schritt machen.

Nachdem die Cirkulation der horizontalen Kurven angefangen ist, können die ursprünglich vertikalen Kurven, welche primär durch die Solenoide in Cirkulation gebracht wurden, nicht mehr vertikal bleiben. Denn einerseits setzen die Cirkulationen der horizontalen Kurven im Anfangsstadium unten an der Erde und in den oberen Luftschichten meistens in entgegengesetzten Richtungen ein; und andererseits, selbst wenn die ober einander liegenden horizontalen Kurven in gleichgerichteten Cirkulationen kommen, so werden die unteren in ihren Bewegungen viel mehr durch die Reibung verzögert. Die oberen und unteren Teile der vertikalen Kurven werden deshalb im allgemeinen entweder in verschiedenen Richtungen fortgeführt, oder auch in gleichen Richtungen, aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Hieraus folgt, dass die ursprünglich vertikalen Kurven, wie gesagt, nicht mehr vertikal bleiben können, und dass sich die Areale S ihrer Projektionen auf der Äquatorebene zu verändern anfangen. Die vertikalen Cirkulationen werden also nicht mehr ausschliesslich von den Solenoiden, sondern auch von den horizontalen Bewegungen abhängen. Sobald hinlänglich intensive horizontale Bewegungen

enstanden sind, muss man deshalb die vollständige Gleichung (13) auch für die Diskussion der vertikalen Cirkulationen in Anwendung bringen. Nichts hindert dann, dass das letzte, von der Rotation der Erde abhängige Glied sogar die Oberhand nehmen kann, so dass Cirkulationen gegen die Solenoide entstehen.

Um die Richtung dieser von den Solenoiden unabhängigen vertikalen Cirkulationen zu bestimmen, kann man die allgemeine, selbst in den meist komplizierten Fällen brauchbare Regel anwenden: Man wählt eine gewisse Umlaufrichtung auf der gegebenen Kurve als die positive; daraus ergibt sich eine bestimmte Umlaufrichtung für die auf der Äquatorebene projizierten Kurve als die positive, durch welche wieder das Vorzeichen der begrenzten Fläche bestimmt wird; nimmt diese Fläche algebraisch gerechnet ab, so erhält die gegebene Kurve Cirkulation in der positiven Richtung. Diese Reihe von Schlussfolgerungen lässt sich aber abkürzen, wenn man die Beschränkungen einführt, dass die Kurve nur auf der einen Halbkugel liegen, und in Projektion auf der Erde oder auf der Äquatorebene nie sich selbst schneiden darf. In der Anfangslage, wo die Kurve vertikal ist, wird sie sich auf der Erdoberfläche wie eine Doppellinie projizieren; ein Zeitmoment später aber, wenn sie ihre schiefe Lage angenommen hat, wird diese Doppellinie in eine geschlossene Kurve verwandelt sein. Macht man nun mit einer beliebigen solchen Kurve die angegebenen Schlussfolgerungen durch, und vergleicht dabei die Projektionen auf der Äquatorebene mit denjenigen auf der Erdoberfläche, so gelangt man zu der folgenden Regel:

(IV) *Eine Kurve, welche ursprünglich vertikal ist, und nachher in geneigte Lage kommt, wird der Wirkung einer cirkulationserzeugenden Kraft ausgesetzt, deren Richtung man dadurch findet, dass sie eine anticyklonische auf derjenigen geschlossenen Kontur ist, welche die Projektion der geneigten Kurve auf der Oberfläche der Erde bildet.*

Das Studium dieser vertikalen Cirkulationen, welche unabhängig von den Solenoiden, oder selbst gegen dieselben einsetzen

können, dürfte eine der wichtigsten Anwendungen der Cirkulationstheorie sein. Denn dieses Gebiet ist sehr wenig bearbeitet. Dass man aber hier die Lösung bekannter Räthsel findet, wird die unmittelbar folgende Abhandlung des Herrn SANDSTRÖM zeigen. Ich gebe nur zum Schluss eine erste Anwendung, nämlich auf einen Fall, wo die Verhältnisse so einfach sind, dass man schon längst die elementare qualitative Erklärung gefunden hat.

8. *James Thomson's Theorie der grossen atmosphärischen Cirkulation.* — Auf einer ruhenden Erde würde der Passat ein rein nord-südlicher Wind sein, der von dem Pol bis zum Äquator wehen würde. In der Wirklichkeit weht er aber als ein Nordostwind, welcher zu einer Zone zwischen den Äquator und die Rossbreiten begrenzt ist. Zwischen den Rossbreiten und dem Pol hat man dagegen überwiegend südwestliche Winde. Für den Zusammenhang dieser Südwestwinde mit der grossen atmosphärischen Cirkulation haben MAURY (1855), FERREL (1856), JAMES THOMSON (1857) und wieder zwei Mal FERREL (1860 und 1889) Schemata aufgestellt.¹⁾ Das einzige, welches nicht kinematische oder dynamische Unmöglichkeiten enthält, ist dasjenige von JAMES THOMSON und das letzte FERREL'sche, welches mit dem THOMSEN'schen vollkommen übereinstimmt. Nach diesem Schema geht die grosse Cirkulation in grösseren Höhen ungestört zwischen Pol und Äquator vor sich. Zwischen den Rossbreiten und dem Äquator haben aber die untersten Luftschichten eine entgegengesetzte Cirkulation, gegen diejenige, welche die Temperaturverteilung für sich hervorgebracht haben würde. Die qualitative Erklärung dieses, bei dem ersten Anblicke paradoxalen, Verhältnisses giebt aber THOMSON schon in seiner ersten Arbeit vollkommen zutreffend: Wegen der schnellen Cirkulation von West nach Ost auf den höheren Breiten, haben die Luftmassen grössere Centrifugalkraft, als die unterliegenden Teile der rotierenden Erde. Hierdurch entsteht über den Polargebiet ein baro-

¹⁾ Man findet alle Schemata neben einander in J. THOMSON's Abhandlung »On the grand Currents of atmospheric Circulation«, Transactions of the Royal Society of London, 1892.

metrisches Minimum. Die untersten Luftschichten aber, welche durch die Reibung gegen die Erde verzögert werden, haben nicht hinlängliche Centrifugalkraft, um dem Gradienten dieses Minimums zu widerstehen. Diese unterste Luftschicht muss deshalb polwärts strömen.

Zu genau demselben Resultate führt nun die Cirkulationstheorie, und zwar in solcher Form, dass man die qualitative Erklärung einer quantitativen Prüfung unterwerfen kann. Wir nehmen (nach HANN's Klimatologie) an, dass für die Parallelen 35° und 80° ein Temperaturunterschied zwischen den Jahresmitteln von 34 Grad C. besteht, und da wir nichts genaueres über die Abnahme der Temperatur mit der Höhe wissen, setzen wir sie der Einfachheit halber auf beiden Parallelen gleich gross voraus. Diese Daten genügen, um mit Hülfe des Integrales (11) die Anzahl A der Solenoide zwischen diesen zwei Breiten zu schätzen. In den über einander lagernden Schichten von je 1000 Metern Höhe findet man durchschnittlich etwa $13 \cdot 10^6 \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}^2}$ Solenoide, und wenn diese allein die Cirkulation erzeugten, so würden sie eine Bewegung hervorbringen, welche unten an der Erde äquatorwärts, in den höheren Luftschichten polwärts führen würde. Jetzt bewegen sich aber die Luftmassen im allgemeinen gegen West, und zwar in den oberen Schichten schneller als in den unteren. Eine aus Luftpartikelchen bestehende Kurve, welche zu der Anfangszeit in einer Meridianebene enthalten ist, wird deshalb ein Zeitmoment später eine schiefe Lage einnehmen, da der obere Teil weiter gegen West geführt worden ist als der untere. Sie projiziert sich also auf der Erde wie eine geschlossene Kurve, und die anticyklonische Umlaufsrichtung auf dieser projicierten Kurve bestimmt auf der ursprünglichen vertikalen Kurve eine Cirkulationsrichtung, welche unten an der Erde polwärts, und in der Höhe äquatorwärts führt, wie es THOMSON durch Berücksichtigung der Centrifugalkraft fand. Man kann nun leicht denjenigen Wert von $\frac{dS}{dt}$ berechnen, bei dem sich die zwei Ursachen der Cirkulation das Gleichgewicht halten. Für eine

Kurve, die sich von 35 zu 80° ausdehnt, und deren oberer Ast 1000 Meter höher als der untere liegt muss dann $2\omega \frac{dS}{dt} = 13.10^6$ sein. Man findet, dass diese Bedingung erfüllt ist, wenn der Westwind pro 1000 Metern Höhe um durchschnittlich $2, 2 \frac{m}{sek}$ zunimmt. Nun nimmt die Stärke des Windes mit der Höhe bekanntlich erst rasch, und dann langsamer zu. So lange der Westwind mit mehr als $2, 2 \frac{m}{sek}$ pro 1000 Metern Höhe zunimmt, muss also die Cirkulation unten polwärts, und oben äquatorwärts gehen. Sobald man aber eine Höhe erreicht, wo die Zunahme des Westwindes kleiner ist, wird die Cirkulation diejenige Richtung haben, welche man nach der Temperaturverteilung zu erwarten hat.

Diese Zahlen sind hier nur als Beispiele angeführt, wie man die Cirkulationstheorie für quantitativen Untersuchungen verwenden kann. Sie dürften aber schon ziemlich richtig sein, und der Weg, den man zu verfolgen hat, wenn ein genügendes Beobachtungsmaterial eingesammelt worden ist, ist vollkommen klar. Für die praktische Ausführung solcher Rechnungen verweise ich auf die folgenden Abhandlungen des Herrn SANDSTRÖM.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts från sid. 738.)

Dublin. *Royal Irish Academy.*

Proceedings. (3) Vol. 6: No 3. 1901. 8:o.

Edinburgh. *Royal Society.*

Transactions. Vol. 40: P. 1: N:o 8. 1901. 4:o.

Glasgow. *Philosophical society.*

Proceedings. Vol. 32 (1900—1901). 8:o.

Greifswald. *Universität.*

Dissertationen. 1900/1901: 10 st. 8:o.

Halle a. S. *K. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.*

Nova Acta. T. 77—78. 1901. 4:o.

Leopoldina. H. 36 (1900). 4:o.

Helsingfors. *Statistiska centralbyrån.*

Bidrag till Finlands officiella statistik. I: 20; VII: A: 10; XXI: A: 5. 1901. 8:o.

Jena. *Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Denkschriften. Bd 6: Lief. 4: Text & Atlas; 7: 3: Text & Atlas. 1901. 4:o.

Harlem. *Société Hollandaise des sciences.*

Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. (2) T. 6. 1901. 8:o.

Kew. *Royal botanic gardens.*

Bulletin of miscellaneous information. 1902: Append. 1. 8:o.

Kharkow. *Société des naturalistes à l'Université Imp.*

Travaux. T. 35 (1900). 8:o.

London. *Geologists' Association.*

Proceedings. Vol. 17 (1901): P. 4. 8:o.

--- *Chemical society.*

Journal. Vols. 79—80 (1901): 12. 8:o.

--- *Geological society.*

Quarterly journal. Vol. 57 (1901): P. 4. 8:o.

List. 1900/1901. 8:o.

--- *Linnean society.*

Journal. Zoology. Vol. 28: No. 183. 1901. 8:o.

List. 1901/1902. 8:o.

Proceedings. Sess. 113 (1900/1901). 8:o.

--- *Royal society.*

Proceedings. Vol. 69 (1901/02): No 451—452. 8:o.

List. 1900/1901. 4:o.

Philosophical Transactions. Vol. 193: B; 195: A; 196: A. 1900—1901. 4:o.

London, Ontario. *Entomological society.*

The Canadian entomologist. Vol. 33 (1901): No 11. 8:o.

(Forts. & sid. 778.)

Ueber die Beziehung zwischen Temperatur und Luftbewegung in der Atmosphäre unter stationären Verhältnissen.

Von J. W. SANDSTRÖM.

(Mitgeteilt am 11 Dezember 1901 durch S. ARRHENIUS.)

1. Stationäre Cirkulation.

Bei den stationären Bewegungen in der Atmosphäre lässt sich die durchschnittliche Temperaturvertheilung mit Hilfe einer von Prof. V. BJERKNES gegebenen hydrodynamischen Formel sehr leicht aus dem dynamischen Zustand ableiten. Diese Formel, welche sich auf eine beliebige geschlossene, aus Luftpartikeln zusammengesetzte Kurve in der Atmosphäre bezieht, lautet¹⁾

$$\frac{dC}{dt} = - \int v dp - 2\omega \frac{dS}{dt} - R \quad (1)$$

C ist die Cirkulation der Kurve nach Lord KELVINS Definition, v das spezifische Volumen und p der Druck. Das Integral muss längs der ganzen Kurve ausgeführt werden. ω ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde und S der Flächeninhalt der Projektion der geschlossenen Kurve auf der Aeqvatorebene. R endlich stellt den Einfluss der Reibung bei der Cirkulation der Kurve dar.

¹⁾ V. BJERKNES: Cirkulation relativ zu der Erde. Öfversigt af Kongl. Vet.-Akad. Förhandl. 1901. N:o 10. Stockholm.

Im stationären Zustand ist die Cirkulation C aller geschlossenen Kurven konstant und somit $\frac{dC}{dt} = 0$. Man hat also für diesen Fall

$$-\int v dp = 2\omega \frac{dS}{dt} + R$$

Bei den folgenden Auseinandersetzungen sehen wir vorläufig von der Reibung ab. Wir haben also

$$-\int v dp = 2\omega \frac{dS}{dt}. \quad (2)$$

2. Die Ableitung der Beziehung zwischen Temperatur und Luftbewegung.

Das Integral links in der Gleichung (2) wird leicht für solche Kurven in der Atmosphäre berechnet, welche den folgenden Verlauf haben. Von einem Ausgangspunkte, wo der Druck p_0 ist, geht die Kurve als vertikale Gerade zu einem Punkte, wo der Druck p_1 ist, von dort an läuft sie in der isobaren Fläche $p = p_0$ bis zu einem beliebigen Punkt von welchem sie wieder als vertikale Gerade zu der isobaren Fläche $p = p_0$ herabsteigt, um dann in dieser Isobarfläche zu dem Ausgangspunkte zurückzukehren. Die Kurve ist also aus zwei vertikalen und zwei isobaren Linien zusammengesetzt. Nun ist auf isobaren Kurven $dp = 0$, so dass die isobaren Kurventheile keinen Beitrag zu dem Integrale liefern. Wir brauchen also die Integration nur längs den Vertikalen auszuführen, und zwar längs der einen, die wir mit a bezeichnen, in aufsteigender, längs der anderen, die wir mit b bezeichnen, in absteigender Richtung. Das Integral für die ganze geschlossene Kurve wird dann

$$-\int v dp = \left(\int_{p_1}^{p_0} v dp \right)_a - \left(\int_{p_1}^{p_0} v dp \right)_b. \quad (3)$$

Nun ist infolge des Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetzes

$$v = \frac{cT}{p}.$$

Wird dieser Werth des specifischen Volumens in den Integralausdrücken rechts eingeführt, so ergibt sich

$$-\int v dp = c \left(\int_{p_1}^{p_0} T \frac{dp}{p} \right)_a - c \left(\int_{p_0}^{p_1} T \frac{dp}{p} \right)_b.$$

Hier setzen wir die mittleren Werthe T_a und T_b der absoluten Temperaturen längs der Vertikale a bzw. b ein und führen die Integrationen aus. Dabei erhalten wir

$$-\int v dp = c(T_a - T_b) \log \text{nat} \frac{p_0}{p_1}$$

oder wenn wir $\log \text{nat}$ mit dem Briggschen \log vertauschen

$$-\int v dp = 2.30259c(T_a - T_b) \log \frac{p_0}{p_1}.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes in (3) ergibt sich

$$2.30259c(T_a - T_b) \log \frac{p_0}{p_1} = 2\omega \frac{dS}{dt}$$

also

$$T_a - T_b = \frac{2\omega \frac{dS}{dt}}{2.30259c \log \frac{p_0}{p_1}}.$$

Wenn wir mit t_a und t_b die mittleren Temperaturen in Celsiusgraden bezeichnen, so ist

$$T_a - T_b = t_a - t_b$$

und also

$$t_a - t_b = \frac{2\omega \frac{dS}{dt}}{2.30259c \log \frac{p_0}{p_1}} \quad (4)$$

welche die gesuchte Beziehung ist. Hier sind ω und c bekannte Konstanten und die Grösse $\log \frac{p_0}{p_1}$ ist gegeben, sobald die Kurve gewählt ist. Um den Ausdruck rechts in (4) zu berechnen braucht man also nur die Grösse $\frac{dS}{dt}$ zu kennen, und diese wird leicht bei Kenntniss der Luftbewegung ermittelt.

Zu der Formel (4) ist noch zuletzt zu bemerken, dass sie deshalb nicht ganz exakt ist, weil wir die Reibung vernachlässigt haben. Unter stationären Verhältnissen werden die von der Temperaturvertheilung und die von der Bewegung abhängigen Ursachen der Cirkulation, einander nicht genau gleich sein, sondern eine Differenz zeigen, die dem Reibungswiderstand R gleich ist. Die Reibung wird deshalb der stärkeren der zwei Ursachen der Cirkulation entgegenwirken, woraus man ihre Richtung und dadurch ihren Einfluss auf die Temperaturdifferenz (4) ableiten kann. Durch die kleinen Abweichungen von der Formel (4), welche die Beobachtungen im stationären Falle zeigen werden, wird man den Werth des Reibungswiderstandes ermitteln können.

3. Qualitative Gesetze für die Beurtheilung der Temperaturvertheilung nach Wind- und Volkenbeobachtungen.

Aus der Formel (4) schliesst man nun sofort, dass Temperaturdifferenzen zwischen den zwei Vertikalen a und b vorhanden sein müssen, wenn die Kurve den Flächeninhalt S ihrer Projektion auf der Aeqvatorebene verändert, und zwar müssen diese Differenzen um so grösser sein, je schneller sich S ändert. Das Vorzeichen des Temperaturunterschiedes ergibt sich immer aus der Richtung, in der man auf der gegebenen Kurve die Integration ausführt; und diese gewählte Richtung ist einerseits entscheidend dafür, welche Vertikale wir mit a und welche wir mit b zu bezeichnen haben, indem wir übereingekommen waren, dass a diejenige ist, wo in aufsteigender Richtung integriert wurde; andererseits ist diese Richtung für das Vorzeichen von S entscheidend. (Vergleiche BJERKNES, l. c.).

Es ist aber wichtig, diese Frage von dem Vorzeichen an konkrete physikalische Vorstellungen anknüpfen zu können. Dies erreicht man leicht in der folgenden Weise. Der durch die Gleichung (2) definierte stationäre Bewegungszustand tritt ein, wenn zwei Ursachen der Cirkulation, nämlich die physi-

kalische, welche von den Temperaturdifferenzen, und die dynamische, welche von der Bewegung der Kurve in Verbindung mit der Rotation der Erde abhängt, sich das Gleichgewicht halten. Dass sich diese zwei Ursachen der Cirkulation das Gleichgewicht, halten, will sagen, dass die Temperatur dort hoch sein muss, wo die Luft aus dynamischen Gründen zur Bewegung abwärts gezwungen wird, und andererseits dort niedrig, wo die Luft in die Höhe getrieben wird. Und zwar ist dies eine Temperaturvertheilung, welche sich zuletzt immer als Folge der adiabatischen Erwärmung und Abkühlung einstellen muss, wenn die Luft aus dynamischen Gründen zum Auf- oder Absteigen gezwungen wird. Wir werden also bei derjenigen Vertikale die höhere Temperatur haben, wo die Luft abwärts getrieben wird.

Welche diese Vertikale ist, finden wir nun leicht auf Grund der von BJERKNES gegebenen Regel über den Sinn der Cirkulation, welche das Glied $2\omega \frac{dS}{dt}$ zu erzeugen sucht. Die Kurve, welche wir betrachten, ist immer in der Anfangslage vertikal und kommt nachher, in Folge ihrer Bewegung, in eine schiefe Lage. In der schiefen Lage projiciert sie sich auf der Erde als eine geschlossene Kurve. Und der Sinn der von dem Gliede $-2\omega \frac{dS}{dt}$ herrührenden Cirkulation wird dann ein solcher, welcher auf dieser projicierten Kurve anticyklonisch ist. (I. c. Satz IV).

Um ein Beispiel von der Anwendung dieser Vorzeichenregel zu geben, nehmen wir an, dass die Luft in der Höhe eine schnellere Bewegung als in der Nähe der Erdoberfläche hat. Wir stellen uns in die Richtung der Bewegung der oberen Luftströme ein, d. h. so, dass die Wolken nach vorn vorüberziehen, und betrachten eine geschlossene Kurve in der Atmosphäre, welche aus einer Vertikale links, einer Vertikale rechts und zwei isobaren Kurven, die eine in der Nähe der Erdoberfläche und die andere in der höheren Luftschichten, zusammengesetzt ist. Die obere isobare Kurve zieht mit der Luftbewegung in der Höhe rascher vorwärts, als die untere Isobare, so dass die Kurve vor-

wärts fällt. In dieser Lage projiziert sie sich auf der Erde als eine geschlossene Kurve, deren Flächeninhalt zunimmt. Die anticyklonische Cirkulationsrichtung auf dieser projicierten Kurve giebt dann auf der Kurve selbst eine Cirkulationsrichtung, welche bei der Vertikale rechts abwärts und bei der Vertikale links aufwärts führt. Die Luft wird somit in der Vertikale rechts adiabatisch erwärmt und in der Vertikale links adiabatisch abgekühlt, d. h.

I. Wenn sich die Wolken schneller als der Wind an der Erdoberfläche bewegen und man sich in der Richtung der Wolkenbewegung einstellt, so hat man die höhere Temperatur rechts und die niedrigere links.

In genau derselben Weise bekommt man den folgenden Satz:

II. Wenn sich die Wolken langsamer als der Wind an der Erdoberfläche bewegen und man sich gegen die Richtung des Windes einstellt, so hat man ebenfalls die höhere Temperatur rechts und die niedrigere links.

Bewegen sich die Wolken in derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit wie der Wind an der Erdoberfläche, so ist $\frac{dS}{dt}$ gleich Null und somit infolge (4) $t_a - t_b = 0$, d. h. es treten keine Temperaturdifferenzen ein.

Wir haben in unsere Breiten eine starke westliche Trift in den höheren Luftschichten. Wenn wir uns in der Richtung dieser Trift einstellen, d. h. ostwärts blicken, so haben wir den Aeqvator rechts und den Pol links, d. h. eine höhere Temperatur rechts und eine niedrigere links. Dies stimmt mit dem ersten der eben angeführten Gesetze.

Als zweites Beispiel für die Anwendung dieses Gesetzes betrachten wir eine Cyklone, in der die Wolken sich schneller als der Wind bewegen. Wenn man sich nun irgendwo im cyklonischen Gebiete in der Bewegungsrichtung der Wolken einstellt, so hat man immer das Centrum der Cyklone links und die Aussenrande der Cyklone rechts, also nach der Regel I eine niedrigere Temperatur im Centrum als in der Aussenrande der Cyklone.

Schliesslich betrachten wir eine Anticyklone, in der die Wolken sich schneller als der Wind bewegen. Stellt man sich nun irgendwo im anticyklonischen Gebiete in der Bewegungsrichtung der Wolken ein, so hat man immer das Centrum der Anticyklone rechts, d. h. es ist nach der Regel I wärmer im Centrum der Anticyklone als in der Aussenrande derselben.

Um ein Beispiel von der Anwendung der Regel II zu geben, betrachten wir eine Cyklone, in welcher die Wolken sich langsamer als der Wind bewegen. Wenn man sich nun im cyclonischen Gebiete gegen den Wind einstellt, so hat man das Centrum rechts, d. h. solche Cyklonen haben warme Centra.

Solche Anticyklonen, in welchen die Wolken sich langsamer als der Wind bewegen, haben dagegen infolge desselben Gesetzes kalte Centra.

Wenn wir alles in Bezug der Cyklonen und Anticyklonen gesagte zusammenfassen, bekommen wir das folgende Gesetz:

III. Wenn die Wolken sich schneller als der Wind an der Erdoberfläche bewegen, so haben die Cyklonen kalten Centra und die Anticyklonen warmen Centra; bewegen sich dagegen die Wolken langsamer als der Wind, so haben die Cyklonen warmen Centra und die Anticyklonen kalten Centra.

Wir haben diese Resultate aus der zwischen der Temperatur und der Luftbewegung bestehenden Relation (4) abgeleitet. Wie schon hervorgehoben worden ist, hängen aber diese Temperaturvertheilungen von der aufsteigenden und absteigenden Bewegung der Luft ab. Wenn wir die erwähnte Bjerknes'sche Regel über die Cirkulation von Kurven, welche von vertikaler in schiefe Lage kommen, auf unsere Kurven anwenden, so erhalten wir unmittelbar den folgenden dynamischen Satz, welche für die obigen Sätze über die Temperaturen der Cyklonen und Anticyklonen den Grund bildet:

IV. Bewegen sich die Wolken schneller als der Wind an der Erdoberfläche, so findet in den Cyklonen ein dynamisches Emporsaugen, in den Anticyklonen ein dynamisches Herunterpressen der Luft statt; bewegen sich dagegen die Wolken läng-

samer als der Wind, so findet in den Cyklonen ein dynamisches Herunterpressen und in den Anticyklonen ein dynamisches Emporsaugen der Luft statt.

4. Berechnung der durchschnittlichen Temperaturvertheilung in einer Cyklone und einer Anticyklone auf Grundlage der bei den wissenschaftlichen Ballonfahrten in Berlin erhaltenen durchschnittlichen Luftgeschwindigkeiten.

Bei den wissenschaftlichen Ballonfahrten in Berlin hat man in cyklonischer Wetterlage in 5000 Meter Höhe eine durchschnittlich 4,3 mal grössere Luftgeschwindigkeit als in der Nähe der Erdoberfläche gefunden. Die Cyklonen haben also in Mitteleuropa infolge des eben angeführten Gesetzes III in der Regel kalte Centra. Die mittlere Windgeschwindigkeit in der Nähe der Erdoberfläche für alle Fahrten, welche bei cyklonischer Wetterlage bewerkstelligt wurden, betrug $4,6 \frac{m}{sec}$. In 5,000 Meter Höhe kann danach die durchschnittliche Luftgeschwindigkeit zu $19,8 \frac{m}{sec}$ gesetzt werden.

Wenn man nun die Vertikale a in das Centrum der Cyklone und die Vertikale b in 1000 km Entfernung davon legt, und die beiden Vertikalen mit Linien auf den isobaren Flächen $p=740$ mm und $p=400$ mm verbindet, so erhält man eine geschlossene Kurve, welche aus zwei vertikalen und zwei isobaren Linien zusammengesetzt ist, und es liegt dabei die isobare Linie $p=400$ mm in etwa 5000 Meter Höhe über der Erdoberfläche. Nun wird die isobare Kurve $p=740$ mm vom Winde in jeder Sekunde um 4,6 Meter, und die isobare Linie $p=400$ mm von der Luftgeschwindigkeit in 5000 Meter Höhe in jeder Sekunde um 19,8 Meter zur Seite verschoben. Die Änderung des Flächeninhaltes der Projektion der geschlossenen Kurve auf der Aeqvatorebene ist dann durch ein Rechteck gegeben, deren Länge 1000 km. sin λ

und dessen Breite $19,8 - 4,6 = 15,2$ Meter beträgt. Wenn wir die geographische Breite $\lambda = 53^\circ$ setzen, so ist $\sin \lambda = 0,8$ und den Flächeninhalt des Rechtecks wird somit $800000 \cdot 15,2 = 12160000$ Meter² d. h. $\frac{dS}{dt}$ hat den Werth $12160000 \frac{m^2}{sec}$. Nun ist $\omega = 0,0000729$, $c = 287$, $\log \frac{740}{400} = 0,26717$ und also infolge der Formel (4).

$$t_a - t_b = \frac{2 \cdot 0,0000729 \cdot 12160000}{2,30259 \cdot 287 \cdot 0,26717} = 10,0^\circ C$$

Es ist also $10,0^\circ C$ kälter im Centrum, als in 1000 km Entfernung davon und zwar unter der obigen Annahme, dass die Luftgeschwindigkeit in 5000 Meter Höhe $15,2 \frac{m}{sec}$ grösser als die in der Nähe der Erdoberfläche ist. Die Temperaturdifferenz ist übrigens dieser Luftgeschwindigkeitsdifferenz und dem Abstand vom Cyklonencentrum proportional.

In den Anticyklonen hat man ebenfalls grössere Geschwindigkeiten in der Höhe, als in der Nähe der Erdoberfläche gefunden; es muss also infolge des qualitativen Gesetzes III im Centrum einer Anticyklone wärmer als an ihrer Aussenrande sein. In 5000 Meter Höhe ist die Luftgeschwindigkeit durchschnittlich 3,6 mal grösser als in der Nähe der Erdoberfläche, und das Mittel der Windgeschwindigkeit in der Nähe der Erdoberfläche für alle Fahrten, welche bei anticyklonischer Wetterlage ausgeführt wurden, betrug $4,4 \frac{m}{sec}$. Die durchschnittliche Luftgeschwindigkeit in 5000 Meter Höhe in einer Anticyklone ist danach $15,8 \frac{m}{sec}$. Wenn man aus diesen Daten $t_a - t_b$ in derselben Weise wie für die Cyklone berechnet, so ergibt sich daraus, dass es in der Luftschicht zwischen der 760 mm und der 400 mm isobaren Fläche im Centrum durchschnittlich $7,2^\circ C$ wärmer als in 1000 km Entfernung davon ist.

Die hier erhaltenen Resultate, dass es in Mittel-Europa im Centrum einer Cyklone durchschnittlich kälter und im Centrum einer Anticyklone durchschnittlich wärmer als in der Umgebung ist, sind durch direkte Temperaturbeobachtungen mehrmals bestätigt worden. Prof. J. HANN in Wien hat zuerst diese Thatsache auf Grundlage der Temperaturbeobachtungen in den Alpen nachgewiesen¹⁾. Er hat auch die richtige Vermuthung ausgesprochen, dass der Temperaturunterschied seinen Grund in den dynamischen Verhältnissen habe. Bei den wissenschaftlichen Ballonfahrten in Berlin hat man folgende durchschnittliche Temperaturen gefunden: ²⁾

Höhe. m.	Winter.		Sommer.	
	Cyklone.	Anticyklone.	Cyklone.	Anticyklone.
Erde	3.0	1.5	15.7	20.6
1000	—2.2	1.3	9.1	13.6
2000	—8.0	—2.0	3.0	7.7
3000	—15.1	—6.7	—0.8	2.1
4000	—20.8	—10.9	—7.0	—3.3
5000	—27.5	—16.0	—15.3	—9.1
6000	—34.0	—25.8	—	—17.2
7000	(—44.4)	(—30.2)	—	(—22.0)
8000	(—48.5)	(—37.9)	—	(—30.7)

Die Zahlen, welche nur bei je einer Fahrt gewonnen wurde, sind in Klammern eingeschlossen.

Wie man sieht, ist die Temperatur in den Anticyklonen während des Winters durchschnittlich 10° und während des Sommers durchschnittlich 5° höher als in den Cyklonen. Ein quantitativer Vergleich dieser Temperaturdifferenzen mit der oben aus der Luftgeschwindigkeiten berechneten ist jedoch nicht möglich. Denn diese Berechnung bezieht sich nicht auf den Vergleich

¹⁾ J. HANN. Das Barometer-Maximum von Nov. 1889. Met. Zeitschrift 1890 P. 226.

²⁾ R. ASSMAN und A. BERSON. Wissenschaftliche Ballonfahrten, Braunschweig 1900. Bd. III P. 311.

von Cyklonen und Anticyklonen in verschiedenen Zeiten, sondern auf den Vergleich von Beobachtungen, welche man nur durch simultane Fahrten finden kann. Die qualitative Uebereinstimmung ist aber gut, nicht nur wenn es sich um den Sinn, sondern auch wenn es sich um die Grössenordnung der Temperaturdifferenzen handelt.

5. Ueber die Ursache der aussergewöhnlichen Hitze in Schweden im Sommer 1901.

Es herrschte in Schweden im Sommer 1901 eine sehr beständige anticyklonische Wetterlage, welche andauernde Trockenheit und hohe Temperatur hervorrief. Manchmal kamen solche hohe Temperaturen vor, wie man sie anderswo in Europa nördlich von den Alpen gleichzeitig nicht beobachtete. Es lag offenbar eine Anticyklone mit warmen Centrum über Schweden.

Um nun die hohe Temperatur über Schweden zu erklären, braucht man nur anzunehmen, dass die Luftgeschwindigkeit in der Höhe grösser als in der Nähe der Erdoberfläche gewesen ist. Wenn z. B. die mittlere Luftgeschwindigkeit zwischen Stockholm und Berlin unten an der Erde $4,4 \frac{m}{sec}$, und in 5000 Meter Höhe $15,8 \frac{m}{sec}$ betragen hat, so müsste die durchschnittliche Temperatur der Vertikale in Stockholm von 0 bis 5000 Meter Höhe $5,8^{\circ} C$. höher als die durchschnittliche Temperatur der entsprechenden Vertikale in Berlin sein.

Die Luftgeschwindigkeiten in 5000 Meter Höhe zwischen Stockholm und Berlin hatten durch Wolkenmessungen in südlichen Schweden ermittelt werden können. Solche Messungen liegen aber leider nicht vor. Prof. H. H. HILDEBRANDSSON hat mir aber gütigst alle Wolkenbeobachtungen, welche im Sommer 1901 in Upsala ausgeführt worden sind, mitgetheilt. Da Upsala in Allgemeinen beinahe mitten im anticyklonischen Centrum lag, war der Himmel dort meistens klar. In den Fällen aber, wo

das Centrum der Anticyklone etwas entfernt von Upsala lag, wurden grosse Wolkengeschwindigkeiten beobachtet.

Auf eine starke anticyklonische Cirkulation in den oberen Luftschichten scheint auch der auffällige Umstand hinzudeuten, dass mehrere kleine Cyklonen, welche über die Ostsee einzudringen versuchten, eine retrograde Bewegung erhielten und eine derselben sich in den Tagen 27—30 Juli in einem grossen Bogen von dem südlichen Schweden, nordwestwärts durch Norwegen und erst nördlich von dem Anticykloncentrum ostwärts über das nördliche Schweden und Finland hin sich bewegte.

Unter solchen Verhältnissen würden tägliche synoptische Wolkenbeobachtungen von mehreren Stationen nicht nur die Erklärung der grossen Hitze gegeben haben, sondern auch von unschätzbarer Bedeutung für die Stellung der Prognosen gewesen sein in den kritischen Lagen, wo sich Cyklonen zu nähern versuchten.

6. Ueber die Anwendung von Wolkenbeobachtungen bei der Ermittlung der Temperaturvertheilung in der Atmosphäre.

Die Ermittlung der Temperaturvertheilung in der Atmosphäre muss sowohl in klimatischer, als in meteorologisch-dynamischer Hinsicht als eine der wichtigsten Aufgaben der ausübenden Meteorologie bezeichnet werden. Nun giebt es, wie wir gesehen haben, eine Beziehung zwischen der Luftgeschwindigkeit in den höheren Luftschichten, der Windgeschwindigkeit in der Nähe des Erdbodens und der Temperaturvertheilung in der Atmosphäre. Streng gültig ist diese Beziehung nur unter stationären Verhältnissen. Diese Beschränkung hat jedoch nur wenig zu bedeuten, da der Zustand der Atmosphäre in der Regel als annähernd sehr stationär angesehen werden kann.

Hat man deshalb durch eine Ballon- oder Drachenfahrt die Temperatur längs einer Vertikale gemessen, so braucht man nur Beobachtungen über die Luftbewegung, um mit Hilfe dieser Re-

lation die Temperatur längs beliebig vielen Vertikalen zu berechnen. Die Windgeschwindigkeit in der Nähe des Erdbodens wird allgemein direkt gemessen, und man braucht also nur die Luftgeschwindigkeit in den höheren Luftschichten zu ermitteln. Diese Luftgeschwindigkeit bekommt man am einfachsten durch Wolkenmessungen. Dabei muss man sowohl die Höhe als die Geschwindigkeit und Bewegungsazimuth ermitteln, d. h. man muss die Höhe und Winkelbewegung messen.

Legt man deshalb eine kleine Anzahl von Ballon- oder Drachenstationen in grossen Abständen von einander an und ergänzt sie durch eine genügende Anzahl von Wolkenmessungsstationen, so wird man die Temperaturvertheilung in der Atmosphäre in grosser Ausdehnung ermitteln können.

7. Ueber die Entstehung und Entwicklung der Cyklonen.

Die Cyklonen, welche über Mittel-Europa fahren, kommen grösstentheils von dem Atlantischen Ocean, wo sie ausgebildet zu sein scheinen. Ihr Anfang beruht nach aller Wahrscheinlichkeit auf der Anhäufung von warmen feuchten Luftmassen über dem Golfstrom. Diese Luftmassen fangen an in die Höhe zu steigen, und es strömt dabei längs der Meeresoberfläche warme feuchte Luft von allen Seiten herzu um die aufsteigende Luft zu ersetzen, wobei die cyklonische Drehung um das Centrum in bekannter Weise entsteht. Die Cyklone hat noch keine grosse Höhe in der Atmosphäre erreicht und die stärkste cyklonische Drehung um das Centrum findet in der Nähe der Meeresoberfläche statt. Wir haben somit, infolge des Gesetzes III, eine Cyklone mit warmem Centrum. Nach dem Carnot-schen Principe wird in diesem Anfangszustande immer Wärme in Bewegungsenergie umgesetzt.

Je mehr Bewegungsenergie der Wirbel bekommt, je unabhängiger wird er vom Golfstromgebiet, und bald macht er sich los, um in bekannter Weise ostwärts zu wandern. Wegen der

Reibung gegen die Meerersoberfläche und später gegen die Erdoberfläche wird die unterste Luftschicht verzögert, und die Luftschicht, wo die kräftigste cyklonische Drehung stattfindet, steigt in die Höhe. Nach der Regel III ist nun das Cyklonencentrum unterhalb dieser Schicht kalt und oberhalb derselben warm. Die Reibung bewirkt also, dass eine Cyklone mit kaltem Centrum unterhalb der ursprünglichen mit warmen Centrum entsteht. Diese zwei Cyklonen werden durch die Schicht der stärksten Drehung von einander getrennt.

Bei den wissenschaftlichen Ballonfahrten in Berlin, hat man bis in die erreichten Höhen von etwa 6000 Meter eine immer mit der Höhe zunehmende Luftgeschwindigkeit gefunden. Die Schicht der stärksten cyklonischen Drehung scheint also noch nicht erreicht gewesen zu sein. Bei diesen Ballonfahrten hat man sich also immer in der unteren Cyklone mit kaltem Centrum befunden. Es ist indessen klar, dass die cyklonische Drehung nicht bis an die Grenze der Atmosphäre zunehmen kann, sondern einmal mit der Höhe abnehmen muss. Dasselbst wird man dann nothwendig eine Cyklone mit warmem Centrum finden.

Die amerikanischen Cyklonen befinden sich offenbar in einer viel früheren Entwicklungszustand als die europäischen. In den Cyklonen, welche auf der Drachenstation Blue Hill untersucht worden sind, ist die cyklonische Drehung meistens in 3000 bis 4000 Meter Höhe verschwunden¹⁾. Die kräftigste cyklonische Drehung muss sich demnach nicht weit oberhalb der Erdoberfläche befinden. Man hat auch in Amerika in der Regel Cyklonen mit warmen Centra. Das wärmste Gebiet befindet sich aber nicht in unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche, sondern in etwa 1000 Meter Höhe über derselben. Es hat mithin schon eine Abkühlung in den untersten Schichten begonnen, welche wahrscheinlich der Bildung des kalten Kerns daselbst vorausläuft.

¹⁾ H. HELM CLAYTON. Studien cyklonaler und anticyklonaler Erscheinungen mittelst Drachen. Illustr. Aëron. Mitth. 1900. No 3.

Es wird aus dem hier Angeführten klar, wie wichtig es ist, die Cyklonen in allen Phasen ihrer Entwicklung zu studieren. Von besonderem Interesse dürfte es dabei sein, die Höhe der Schicht der stärksten cyklonischen Drehung, sowie die Temperaturvertheilung relativ zu dieser Schicht, zu beobachten.

Um zuletzt beiläufig die Frage von den Energieumsetzungen in den Cyklonen zu berühren, so sei bemerkt, dass die Luft, wie man leicht findet, im Anfangsstadium der Cyklone einen direkten, im Endstadium derselben einen umgekehrten Carnot'schen Kreisprocess durchläuft. Während der ersten Periode wird Wärme in Bewegungsenergie umgesetzt, während der zweiten erhält sich die Cyklone aus diesem Vorrath von Bewegungsenergie, bis alles wieder in Wärme verwandelt worden ist.

Man kann sich auch die erste Entstehung der Cyklonen in anderer Weise denken, als durch Erwärmung an der Oberfläche der Erde. Es finde sich z. B. in der Höhe ein kräftiger Luftstrom und auf der linken Seite desselben ein anderer, welcher sich in entgegengesetzter Richtung bewegt. Nach der Regel IV wird dann im Gebiete zwischen der zwei Ströme die unterliegende Luft emporgesaugt und die überliegende herabgesaugt, und wenn sich dieses auf einer Stelle stärker lokalisiert, so sind die Bedingungen für das Zustandekommen einer regulären Cyklone gegeben. Auch eine solche Cyklone hat kaltes Centrum unterhalb, und warmes oberhalb der Schicht der kräftigsten cyklonischen Drehung. In einer solchen Cyklone durchläuft die Luft immer einen umgekehrten Carnot'schen Kreisprocess, d. h. es wird immer Bewegungsenergie in Wärme umgesetzt. Wenn also die Luftströme, welche die Cyklone erzeugt hat, nicht fortwähren, so wird die Intensität der Cyklone nach und nach abnehmen. Die Schwächung kann indessen durch die bei der Kondensation des Wasserdampfes freigewordene Wärme beträchtlich verzögert werden.

Wenn dagegen in der Höhe auf der rechten Seite eines Luftstromes ein anderer in entgegengesetzter Richtung zieht, so wird nach der Regel IV in der Schicht zwischen den zwei Strömen

die unterliegende Luft heruntergepresst und die oberliegende in die Höhe getrieben, und wo sich dieses am stärksten lokalisiert, bildet sich eine Anticyklone. Dieser hat nach der Regel III warmes Centrum unterhalb und kaltes Centrum oberhalb der Schicht der stärksten anticyklonischen Drehung. Die Luft durchläuft in einer solchen Anticyklone immer umgekehrte Carnot-schen Kreisprocesse, d. h. es wird immer Bewegungsenergie in Wärme umgesetzt. Die Sommeranticyklonen auf unseren Breiten dürften in dieser Weise entstehen.

Bemerkung zu der vorhergehenden Abhandlung.

Von V. BJERKNES.

[Mitgetheilt am 11. December 1901 durch S. ARRHENIUS.]

Nachdem Herr SANDSTRÖM in der obigen Abhandlung gezeigt hat, wie man mit Hülfe der Cirkulationstheorie die Mechanik der Cyklonen mit kalten, und der Anticyklonen mit warmen Centren erklären kann, hat es auch keine Schwierigkeit die Erklärung in elementare Form zu kleiden, natürlich unter der Voraussetzung, dass man sie nur in qualitativer, und nicht in quantitativer Hinsicht sucht. Herr SANDSTRÖM's Entwicklungen zeigen, dass die Erscheinung in beiden Fällen auf den schon vorhandenen horizontalen Bewegungen beruht, und zwar auf Unterschieden in der Intensität der horizontalen Bewegungen unten an der Erde und in den höheren Luftschichten. Durch diese Bemerkung wird man leicht auf die folgende Überlegung geführt.

Ein materieller Punkt, welcher sich in horizontaler Richtung bewegt, wird von der »ablenkenden Kraft der Erdrotation« nach rechts getrieben. Die Bahn des Punktes sei nun kreisförmig. Durchläuft der Punkt diese Bahn in *cyklonischer* Richtung, so wird die Ablenkung nach rechts den Radius des Kreises zu vergrössern suchen. Die ablenkende Kraft tritt als eine »centrifugale« Kraft auf. Wenn dagegen der Punkt die kreisförmige Bahn in *anticyklonischer* Richtung durchläuft, so wird die nach rechts gerichtete Ablenkung den Radius des Kreises zu

verkleinern suchen. Die ablenkende Kraft tritt als eine *centripetale* Kraft auf.

In einer cyklonisch rotierenden Luftmasse wird die centrifugale Kraft unten an der Erde dem Zuströmen zu dem Cyklonencentrum entgegenwirken, in der Höhe dagegen das Abströmen von diesem Centrum befördern. Ist nun die Bewegung unten an der Erde intensiver als in der Höhe, so wird die centrifugale Kraft unten dem Zuströmen stärker entgegenwirken als sie in der Höhe das Abströmen befördern kann. Unter solchen Umständen kann ein Aufsteigen im Centrum nur zustande kommen unter der Bedingung, dass die dort befindliche Luft hinlänglichen Auftrieb hat, um den dynamischen Widerstand zu überwinden. Das heisst, die Luft im Cyklonencentrum muss wärmer als in den Umgebungen sein. Wenn dagegen die Rotation in der Höhe stärker ist, als unten an der Erde, so wird die centrifugale Kraft das Abströmen in der Höhe stärker befördern, als sie dem Zuströmen unten an der Erde entgegenwirken kann. Die Luftmassen im Cyklonencentrum werden dann in die Höhe getrieben, selbst wenn sie schwerer als die umgebenden sind. Und wenn sie nicht schon vom Anfang an schwerer sind, so müssen sie es zuletzt in Folge adiabatischer Abkühlung werden. Denn wenn man nicht ganz unmögliche Werte des Reibungswiderstandes annehmen will, so folgt, dass sich der stationäre Zustand erst einstellen kann, nachdem die Cyklone ein kaltes Centrum erhalten hat.

Wenn die Luftmassen anticyklonisch rotieren, so hat man die genau entsprechende Überlegung mit der centripetalen Kraft anzustellen. Ist die anticyklonische Rotation der unteren Schichten die stärkere, so wird die centripetale Kraft unten an der Erde dem Abströmen der Luft stärker entgegenwirken, als sie in der Höhe das Zuströmen befördern kann. Wenn doch die Luftmassen im Centrum heruntersinken, so kann es nur darauf beruhen, dass sie hinlänglich schwer sind, um den dynamischen Widerstand zu überwinden. Die Anticyklone hat dann kaltes Centrum. Wenn dagegen die höheren Luftschichten stärker rotie-

ren, so kehrt sich das Verhältniss um. Die centripetale Kraft befördert das Zuströmen der Luft in der Höhe stärker, als sie unten dem Abströmen entgegenarbeiten kann, und zwar kann wieder der stationäre Bewegungszustand erst eintreten, nachdem die abwärts getriebene Luft durch adiabatische Kompression hinlänglich erwärmt worden ist, um höhere Temperatur als die Umgebungen zu haben. Die Anticyklone muss also schliesslich ein warmes Centrum erhalten.

Man kann natürlich auch die Erklärung der kalten Centra der Cyklonen, und der warmen der Anticyklonen, auf die absolute anstatt auf die relative Bewegung der Luftmassen beziehen. Man löst dann die Rotation der Erde in zwei Komponenten auf, eine längs, und eine senkrecht zu der Cyklon- oder Anticyklonachse, und dem wichtigsten Punkt zu beachten ist es, dass in der absoluten Bewegung alle Rotationen um die Cyklon- oder Anticyklonachse in *derselben* Richtung stattfinden. Der Unterschied zwischen der Cyklone und der Anticyklone ist nur, dass die Rotation der Cyklone schneller, die der Anticyklone langsamer als die der Erde ist. Hieraus folgt auch, dass die absolute Rotation in den Anticyklonen dort am stärksten ist, wo sie von der rotierenden Erde aus gesehen am langsamsten erscheint. Hält man dieses fest, so findet man die oben entwickelten Resultate als einfache Wirkungen der Centrifugalkraft wieder. Es hat auch Interesse hervorzuheben, dass, wenn man der Erklärung der Cyklonen mit kalten, und der Anticyklonen mit warmen Centren diese Form gibt, man der Hauptsache nach auf die Erklärung zurückkommt, welche JAMES THOMSON schon in 1857 von den über den Polargebieten lagernden Cyklonen mit kalten Centren gab.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 758.)

- Madison.** *Wisconsin geological and natural history survey.*
Bulletin. N:o 1—2. 1898. 8:o.
- Marburg.** *Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften.*
Sitzungsberichte. Jahrg. 1899. 8:o.
- Mauritius.** *Royal Alfred observatory.*
Annual report of the director. Year 1900. Fol.
- Montevideo.** *Observatorio meteorológico del colegio Pío de Villa Colón.*
Boletín mensual. Año 12 (1900): Núms. 10—12. 8:o.
- München.** *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Philos.-philol. u. hist. Classe. 1901: H. 4. 8:o.
- Offenbach.** *Verein für Naturkunde.*
Bericht. 37—42 (1895/96—1900/1901). 8:o.
- Paris.** *Société de géographie.*
La Géographie. Année 1901: N:o 11. 8:o.
— *Société géologique de France.*
Bulletin. (4) T. 1 (1901): N:o 3. 8:o.
- Pola.** *Hydrographisches Amt der k. u. k. Kriegs-Marine.*
Veröffentlichungen. Nr 12. 1901. 4:o.
- Roma.** *Reale accademia dei Lincei.*
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Rendiconti. (5) Vol. 10 (1901): Sem. 2: Fasc. 9. 8:o.
Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Rendiconti. (5) Vol. 10: Fasc. 7—8. 1901. 8:o.
— *R. Istituto botanico.*
Annuario. Anno 10: Fasc. 2. 1901. 4:o.
- St. Petersburg.** *Section géologique du cabinet de Sa Majesté.*
Travaux. Vol. 4. 1901. 8:o.
- San Francisco.** *Astronomical society of the Pacific.*
Publications. Vol. 13 (1901): N. 80. 8:o.
- San José.** *Instituto físico-geográfico de Costa Rica.*
Boletín. Año 1 (1901): Núm. 9. 8:o.
- Sarajevo.** *Bosnisch-Hercegovinische Landesregierung.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an den Landesstationen in Bosnien-Hercegovina. Jahr 1898. 8:o.
- Stettin.** *Entomologischer Verein.*
Stettiner entomologische Zeitung. Jahrg. 62 (1901): N:o 7—12. 8:o.
- Strassburg.** *Kaiser-Wilhelms-Universität.*
Das Stiftungsfest. 1900 ¹/₅. 8:o.
Dissertationen. 1899/1900: 13 st. 4:o & 8:o.
- Sydney.** *Royal Society of New South Wales.*
Journal and Proceedings. Vol. 34 (1900). 8:o.

(Forts. & sid. 784.)

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1c_1 + b_2c_2) - (a_1b_1 + a_2b_2)a_1c_1 + a_2c_2 = \\ = (a_1b_2 - a_2b_1)(a_1c_2 - a_2c_1)$$

Tout de même on aura

$$\left. \begin{aligned} & (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \\ & - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) = \\ & \quad = (a_1b_2 - a_2b_1)(a_1c_2 - a_2c_1) \\ & \quad + (a_2b_3 - a_3b_2)(a_2c_3 - a_3c_2) \\ & \quad + (a_3b_1 - a_1b_3)(a_3c_1 - a_1c_3) \\ & \quad = \Sigma(ab' - a'b)(ac' - ac'), \end{aligned} \right\} (5)$$

où nous avons désigné par a et a' l'une quelconque des quantités a_i et par b et b' , c et c' l'une quelconque des quantités correspondantes b_i et c_i , la somme devant s'étendre à toutes les combinaisons possibles, ce qui donne dans notre cas trois termes, comme nous venons de voir. La formule (5) se réduit pour

$$b_i = c_i$$

à la formule bien connue d'EULER

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = \\ (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2.$$

Tout de même que cette formule peut être généralisée à un nombre quelconque de termes entre les parenthèses (voir une note insérée dans les Comptes Rendus de l'académie suédoise du 13 Novembre 1901), on peut sans difficulté généraliser la formule (5) elle même. On aura en effet pour une valeur quelconque de s

$$\left. \begin{aligned} & [a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_s^2][b_1c_1 + b_2c_2 + \dots + b_sc_s] \\ & - [a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_sb_s][a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_sc_s] \end{aligned} \right\} (6) \\ = \Sigma(ab' - a'b)(ac' - a'c),$$

où les quantités a , b , c , a' , b' , c' désignent comme plus haut les quantités a_i et b_i , la somme devant s'étendre à toutes les combinaisons possibles.

Ainsi les quantités (4) sont données par les formules

$$\left. \begin{aligned} [bb1] &= \frac{\Sigma(ab' - a'b)^2}{\Sigma aa} \\ [bc1] &= \frac{\Sigma(ab' - a'b)(ac' - a'c)}{\Sigma aa} \\ &\dots\dots\dots \\ [bn1] &= \frac{\Sigma(ab' - a'b)(an' - a'n)}{\Sigma aa} \\ [cc1] &= \frac{\Sigma(ac' - a'c)^2}{\Sigma aa} \\ &\dots\dots\dots \\ [cn1] &= \frac{\Sigma(ac' - a'c)(an' - a'n)}{\Sigma aa} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

et ainsi de suite.

Donc, si dans les équations (1), on élimine l'inconnue x de toutes les manières possibles, on aura un nouveau système d'équations, qui conduisent en les traitant d'après les règles de la méthode des moindres carrés aux équations normales (3), les coefficients se déterminant d'après les relations (7).

Cette remarque peut souvent être utile. Supposons, pour simplifier la question, qu'on a

$$a_1 = a_1 = \dots = a_3 = 1.$$

Alors d'après (1) le nouveau système d'équations se compose d'égalités de la forme

$$(b - b')y + (c - c')z + \dots + (g - g')n = n - n', \quad (8)$$

qui conduisent immédiatement aux équations normales suivantes:

$$\left. \begin{aligned} &[(b - b')(b - b')]y + [(b - b')(c - c')]z + \dots \\ &\quad + [(b - b')(g - g')]n = [(b - b')(n - n')] \\ &\dots\dots\dots \\ &[(b - b')(g - g')]y + [(c - c')(g - g')]z + \dots \\ &\quad + [(g - g')(g - g')]n = [(g - g')(n - n')]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Il y a parfois un avantage de procéder comme nous venons d'exposer, notamment quand les quantités n , sont à peu près égales entre elles et s'il y a seulement deux inconnues. Mais c'est surtout dans quelques cas particuliers que l'observation que

nous avons indiquée peut rendre des services. Ce sont par exemple des cas où les quantités n , contiennent toutes une correction constante qu'on fera disparaître dans les équations (8) pour avoir les inconnues $y, z \dots w$ indépendamment de cette correction. Un tel cas se présente par exemple, si l'on veut déterminer la parallaxe d'une étoile d'après un nombre de plaques photographiques. La correction du lieu de l'étoile à la sphère n'ayant pas alors un intérêt spécial on peut éliminer cette inconnue de la manière exposée ci-haut, en déterminant la parallaxe indépendamment de certaines corrections qui ont une influence sensible seulement sur la quantité éliminée. J'ai l'intention de revenir plus tard sur cette question qui paraît être d'une grande importance.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 778.)

Tokyo. *Imperial university. College of science.*

Journal. Vol. 15: P. 3; 13: 4. 1901. 8:o.

Trieste. *I. R. Osservatorio astronomico-meteorologico.*

Rapporto annuale. Anno 1898. 4:o.

Washington. *Academy of sciences.*

Proceedings. Vol. 3: pp. 371—568. 1901. 8:o.

— *U. S. Weather Bureau.*

Monthly weather review. 1901: 8. 4:o.

— *U. S. Department of agriculture.*

Report. No. 70. 1901. 8:o.

Bureau of animal industry. Bulletin. No. 31. 1901. 8:o.

Division of biological survey. Bulletin. No. 15. 1901. 8:o.

Division of botany. Bulletin. No 27—28. 1901. 8:o.

Division of entomology. Bulletin. N. S. No. 28, 30. 1901. 8:o.

Office of experiment stations. Experiment station record. Vol. 12: No. 12. 1901. 8:o.

Bureau of plant industry. Bulletin. No. 1. 1901. 8:o.

Division of pomology. Bulletin. No 10. 1901. 8:o.

Wien. *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.*

Abhandlungen. Bd 1: H. 2. 1901. 8:o.

— *K. k. Gradmessungs-Bureau.*

Astronomische Arbeiten. Bd 12. 1900. 4:o.

Af prins Albert I af Monaco.

Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son yacht. Fasc. 19—20 & 3 kartor. 1901. Fol.

Af Herrar Wahlström & Widstrand.

Bilder ur Nordens flora. Efter Palmstruch m. fl. Svensk Botanik af
C. A. M. LINDMAN. H. 3. 1901. 8:o.

Af Madame Veuve Godin, Guise.

Le Devoir. T. 25 (1901): 11. 8:o.

Af utgifvaren:

La feuille des jeunes naturalistes, publ. par A. DOLLFUS. (4) Année
32 (1901/02): N:o 374. 8:o.

(Forts. & sid. 811.)

Sur le terme complémentaire de mon développement de la
branche uniforme d'une fonction monogène dans le cas
où ce développement possède une étoile de convergence.

Par G. MITTAG-LEFFLER.

(Communiqué le 11 Décembre 1901.)

J'ai montré dans des publications antérieures qu'on peut
toujours et cela d'une infinité de manières circonscrire au cercle de
convergence C , valable pour le développement de TAYLOR.

$$F(x) = F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{\underline{\mu}} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu$$

une étoile $A^{(\alpha)}$ de façon à obtenir:

$$FA^{(\alpha)}(x) = F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_{\mu n}(\alpha)}{\underline{\mu}} F^{(\mu)}(a) \cdot (x-a)^\mu$$

où $A^{(\alpha)}$ est une étoile de convergence pour l'expression limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_{\mu n}(\alpha)}{\underline{\mu}} F^{(\mu)}(a) (x-a)^{\mu-1}$$

J'entends alors par α une
quantité positive remplissant la condition $0 < \alpha \leq 1$. Les $\alpha_{\mu n}(\alpha)$
sont des constantes qu'on peut choisir positives et qui remplissent
toutes la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{\mu n}(\alpha) = 1.$$

¹⁾ Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction
monogène. Troisième note. Acta Math. Tome 24.

On a encore $\lim_{\alpha=0} A^{(\alpha)} = A$, où A est l'étoile principale des constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a) \dots F^{(\mu)}(a) \dots$. Cette étoile A est de même une étoile de convergence pour l'expression

$$\lim_{\alpha=0} \lim_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_{\mu n}(\alpha)}{|\mu|} F^{(\mu)}(a) \cdot (x-a)^\mu$$

et l'égalité

$$FA(x) = F(a) + \lim_{\alpha=0} \lim_{n=\infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_{\mu n}(\alpha)}{|\mu|} F^{(\mu)}(a) \cdot (x-a)^\mu$$

a lieu partout à l'intérieur de A .

Ecrivons

$$(1) \quad FC(x) = F(a) + \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{|\mu|} F^{(\mu)}(a) \cdot (x-a)^\mu + R^{(n)}C(x).$$

On connaît des expressions différentes du terme complémentaire $R^{(n)}C(x)$ qui permettent dans des cas étendus d'évaluer l'approximation obtenue en s'arrêtant au $n^{\text{ième}}$ terme du développement. Est-il possible de généraliser ces expressions de manière à embrasser encore mon développement? Je montrerai que c'est en effet ce qui a lieu au moins pour le terme complémentaire de CAUCHY.

Soit $v = f(u|\alpha)$ une transformation biuniforme qui transforme le cercle $|u| < R$, $R > 1$ en une surface finie et simplement connexe, et supposons que les points $u = 0$, $v = 0$ ainsi que $u = 1$, $v = 1$ se correspondent. Soit encore

$$f(u|1) = u.$$

J'emploie la fonction génératrice $f(u|\alpha)$; $|u| = 1$ pour former une étoile $A^{(\alpha)}$ inscrite dans l'étoile principale A des constantes $F(a)F^{(1)}(a) \dots F^{(\mu)}(a) \dots$ ¹⁾ Soit X un domaine fini quelconque situé à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$. Il existe toujours une étoile E de centre a qui embrasse X et qui est située elle-

¹⁾ Sur la représentation etc. Seconde note. Acta Math. Tome 24, page 200.

même à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$.¹⁾ Si l'on fait parcourir à x l'étoile E l'ensemble \bar{E} de tous les points différents z qu'on obtient en mettant

$$z - a = (x - a)f(u | \alpha); |u| \leq r; 1 < r < R$$

embrassera l'étoile E et restera en même temps, r étant choisi suffisamment rapproché de un, situé à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$.

Considérons maintenant l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(a + (x - a)f(y | \alpha))}{y - u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy$$

où C représente la circonférence $|y| = r$, l'intégration étant effectuée dans la direction directe et où $|u| \leq 1$. On a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(a + (x - a)f(y | \alpha))}{y - u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy = \\ & = F(a + (x - a)f(u | \alpha)) + \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a + (x - a)f(y | \alpha))}{y - u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy \end{aligned}$$

l'intégrale $\int^{(0)}$ étant prise dans la direction directe autour du point $y = 0$.

Posons maintenant:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a + (x - a)f(y | \alpha))}{y - u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x - a)f(y | \alpha) + \frac{1}{2} F^{(2)}(a)(x - a)^2 f(y | \alpha)^2 + \dots}{y - u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy. \end{aligned}$$

J'ai supposé $\frac{f(y | \alpha)}{y}$ fini pour $y = 0$.

Par suite:

$$\frac{1}{2\pi i} \int^{(0)} \frac{F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x - a)f(y | \alpha) + \frac{1}{2} F^{(2)}(a)(x - a)^2 f(y | \alpha)^2 + \dots}{y - u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy =$$

¹⁾ Sur la représentation etc. Acta Math. Tome 23, page 50.

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a) + \frac{1}{1} F^{(1)}(a)(x-a)f(y|\alpha) + \frac{1}{2} F^{(2)}(a)(x-a)^2 f(y|\alpha)^2 + \dots + \frac{1}{n} F^{(n)}(a)(x-a)^n f(y|\alpha)^n}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy$$

On obtiendra alors ¹⁾ en se rappelant l'égalité $f(0|\alpha) = 0$:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(a + (x-a)f(y|\alpha))}{y-u} \left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy = F(a) + \\ & \frac{1}{1} \left\{ \frac{1}{1} (D_y f(y|\alpha))_{y=0} \cdot u + \frac{1}{2} (D_y^2 f(y|\alpha))_{y=0} \cdot u^2 + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{n} (D_y^n f(y|\alpha))_{y=0} \cdot u^n \right\} F^{(1)}(a)(x-a) + \\ & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [D_y^2 (f(y|\alpha)^2)]_{y=0} \cdot u^2 + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{n} [D_y^n (f(y|\alpha)^2)]_{y=0} \cdot u^n \right\} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \\ & + \dots \\ & \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{r} [D_y^r (f(y|\alpha)^r)]_{y=0} \cdot u^r + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{n} [D_y^n (f(y|\alpha)^r)]_{y=0} \cdot u^n \right\} F^{(r)}(a) \cdot (x-a)^r + \\ & + \dots \\ & \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{n} [D_y^n (f(y|\alpha)^n)]_{y=0} \cdot u^n \right\} F^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n. \end{aligned}$$

On obtient donc en faisant $u = 1$ et

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu n} = & \frac{1}{\mu} [D_y^{(\mu)} (f(y|\alpha)^\mu)]_{y=0} + \frac{1}{\mu+1} [D_y^{(\mu+1)} (f(y|\alpha)^\mu)]_{y=0} + \dots \\ & + \frac{1}{n} (D_y^n (f(y|\alpha)^\mu))_{y=0} \end{aligned}$$

la formule suivante qui est valable pour chaque point x du domaine X qui se trouve lui-même à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$, c'est à dire:

¹⁾ c. f. ce même recueil 8 Fevr. 1882, page 17.

$$(2) \quad F A^{(\alpha)}(x) = F(a) + \frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{1} F^{(1)}(a) \cdot (x-a) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{2} F^{(2)}(a) (x-a)^2 + \dots \\ + \frac{\alpha_{nn}(\alpha)}{n} F^{(n)}(a) (x-a)^n + R^{(n)} A^{(\alpha)}(x).$$

Le terme complémentaire $R^{(n)} A^{(\alpha)}(x)$ est exprimé sous la forme:

$$(3) \quad R^{(n)} A^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(a + (x-a)f(y|\alpha))}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy.$$

En faisant $\alpha = 1$, on obtient le développement de TAYLOR. On a en effet

$$f(y|1) = y; \quad \alpha_{nn}(1) = 1.$$

Le terme complémentaire devient:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(a + (x-a)f(y|\alpha))}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy = \\ \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(a + (x-a)y)}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{C}} \frac{F(z)}{z-x} \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1} dz$$

où \bar{C} est un cercle de centre a qui embrasse le point x et se trouve en même temps à l'intérieur de l'étoile $A^{(1)}$ qui de son côté n'est pas autre chose que le cercle C . C'est la forme connue de CAUCHY du terme complémentaire dans le cas où x représente une variable complexe.

Revenons à l'expression (3). Nous avons vu que le rayon r de C étant pris suffisamment rapproché de l'unité

$$F(a + (x-a)f(y|\alpha))$$

appartient toujours au domaine E . La valeur absolue de $F(a + (x-a)f(y|\alpha))$ possède par conséquent une limite supérieure finie. En faisant croître n suffisamment on pourra donc faire tomber la valeur absolue du terme complémentaire

$$R^{(n)} A^{(\alpha)}(x) = \int_C \frac{F(a + (x-a)f(y|\alpha))}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy$$

au dessous d'une quantité positive quelconque si petite qu'elle soit. Par conséquent l'égalité

$$(4) \quad FA^{(\alpha)}(x) = F(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_{\mu n}(\alpha)}{|\mu|} F^{(\mu)}(a) \cdot (x-a)^\mu$$

a lieu pour chaque point à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$. La valeur limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_{\mu n}(\alpha)}{|\mu|} F^{(\mu)}(a) (x-a)^\mu$$

est encore uniformément convergente pour chaque domaine X à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$.

La démonstration que je donne ici ne diffère guère quant au principe de celle que j'ai publiée auparavant ¹⁾ mais elle a l'avantage de fournir une expression exacte du terme complémentaire tandis que l'autre démonstration ne donne qu'une limite supérieure de ce terme.

¹⁾ Sur la représentation etc. Troisième note.

Sur l'équation différentielle du calcul des variations.

Par S. WIGERT.

(Communiqué le 11 Décembre 1901 par E. PHRAGMÉN.)

On sait par les travaux de JACOBI ¹⁾ qu'un système d'équations différentielles:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}$$

peut être regardé comme résolu complètement dans le cas où l'on a réussi à déterminer, outre les $n - 2$ intégrales premières:

$$f_\nu(x_1 \dots x_n) = \alpha_\nu \quad (\nu = 1 \dots n - 2)$$

une fonction M , dite le *multiplieur* du système, laquelle doit satisfaire à l'équation

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial(MX_\nu)}{\partial x_\nu} = 0$$

ou bien

$$\frac{d}{dx_1} \log M = - \frac{1}{X_1} \cdot \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial X_\nu}{\partial x_\nu}.$$

En supposant que les équations $f_\nu = \alpha_\nu$ soient telles qu'on sache les résoudre par rapport aux variables $x_3 \dots x_n$, on démontre en effet que la seule équation restante:

$$X_2 dx_1 - X_1 dx_2 = 0$$

¹⁾ Gesammelte Werke, Supplementband.

possède le facteur

$$\frac{M}{\frac{\partial(f_1 \dots f_{n-2})}{\partial(x_2 \dots x_n)}}.$$

Soit maintenant une équation différentielle d'ordre supérieur:

$$y^{(m)} = \varphi(x, y, y' \dots y^{(m-1)}).$$

En la remplaçant par le système équivalent:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{y''} = \dots = \frac{dy^{(m-1)}}{\varphi}$$

on aura donc pour le multiplicateur l'équation suivante

$$\frac{d}{dx} \log M = - \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(m-1)}}.$$

Parmi les équations différentielles dont le multiplicateur peut être déterminé, il y a une qui présente un grand intérêt, à savoir l'équation du calcul des variations:

$$H \equiv \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \dots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0,$$

F désignant une fonction de $x, y, y' \dots y^{(n)}$. En effet, pour $n = 1$ JACOBI a choisi l'équation correspondante:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0; \quad F = F(x, y, y')$$

comme application de sa théorie générale, et il en a déduit ce résultat simple et élégant:

$$M = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}.$$

Dans ce qui suit je veux montrer comment on peut arriver, dans le cas général, à une formule aussi simple que celle de JACOBI.

Partons de l'équation $H = 0$ en y supposant $n > 1$. On en tire

$$y^{(2n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{V}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}}} = U$$

où nous avons posé

$$V = H - (-1)^n \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \cdot y^{(2n)}$$

et l'équation du multiplicateur sera

$$\frac{d}{dx} \log M = - \frac{\partial U}{\partial y^{(2n-1)}} = (-1)^n \frac{\frac{\partial V}{\partial y^{(2n-1)}}}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}}}.$$

puisque la fonction $\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}}$ ne contient pas la dérivée $y^{(2n-1)}$, $2n-1$ étant $> n$. Maintenant les seuls termes dans H qui donnent naissance à la dérivée $y^{(2n-1)}$, sont les deux derniers, donc:

$$(-1)^n \frac{\partial V}{\partial y^{(2n-1)}} = \frac{\partial}{\partial y^{(2n-1)}} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} \right) \right\}.$$

Le second terme de l'expression entre crochets peut s'écrire:

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n-1)} \partial y^{(n)}} \cdot y^{(2n-1)} + \text{etc.}$$

en désignant par le mot *etc.* des termes ne contenant pas la dérivée $y^{(2n-1)}$. On a de plus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)} \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)} \partial y} \cdot y' + \dots \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n-1)}} \cdot y^{(n)} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \cdot y^{(n+1)} = P + \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \cdot y^{(n+1)} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) &= \frac{d^{n-1} P}{dx^{n-1}} + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \cdot y^{(n+1)} \right) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial y^{(n)}} \cdot y^{(2n-1)} + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \cdot y^{(n+1)} \right) + \text{etc.} \end{aligned}$$

Or, d'après la formule de LEIBNITZ on aura

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \cdot y^{(n+1)} \right) &= (n-1) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \right) \cdot y^{(2n-1)} + \\ &+ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \right) \cdot y^{(n+1)} + \text{etc.} \end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \cdot y^{(n+1)} \right) = (n-1) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \right) \cdot y^{(2n-1)} + \\ + \frac{\partial^3 F}{\partial y^{(n)3}} \cdot y^{(n+1)} y^{(2n-1)} + \text{etc.}$$

Il vient donc

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = y^{(2n-1)} \cdot \left\{ \frac{\partial P}{\partial y^{(n)}} + (n-1) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \right) + \frac{\partial^3 F}{\partial y^{(n)3}} \cdot y^{(n+1)} \right\} + \text{etc.}$$

et en vertu de l'identité évidente:

$$\frac{\partial P}{\partial y^{(n)}} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^{(n)3}} \cdot y^{(n+1)} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n-1)}}$$

il en résulte

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} \right) = y^{(2n-1)} \cdot n \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \right) + \text{etc.}$$

On a donc enfin

$$(-1)^n \frac{\partial V}{\partial y^{(2n-1)}} = n \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx} \log M = n \frac{d}{dx} \log \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \right)$$

d'où

$$M = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} \right)^n$$

C'est le résultat que nous voulions établir.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1901. N:o 10.
Stockholm.

Über eine direkte Methode, eine gegebene ganze rationale Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen in irreduktible Faktoren zu zerlegen.

Von E. PHRAGMÉN.

[Mitgetheilt am 11. December 1901.]

Die Aufgabe ein gegebenes Polynom von zwei unabhängigen Veränderlichen in seine irreduktiblen Faktoren zu zerlegen, wird gewöhnlich durch sogenannte Versuchsmethoden gelöst; ebenso wie dies mit den verwandten Aufgaben über ganze Zahlen oder über ganze ganzzahlige Funktionen einer Veränderlichen der Fall ist. Die nahe Verwandtschaft mit den genannten Aufgaben ist es wohl auch zuzuschreiben, dass, soviel ich weiss, Niemand bisher den Versuch gemacht hat, die bezeichnete Aufgabe durch eine direkte Methode zu behandeln.

Auf diejenige Methode, welche hier angegeben werden soll, bin ich gekommen, indem ich in meinen Vorlesungen an der hiesigen Hochschule die WEIERSTRASS'sche Behandlungsmethode der algebraischen Gebilde darstellte. Sie schliesst sich daher auch eng an den WEIERSTRASS'schen Gedankengang, so wie an die WEIERSTRASS'schen Bezeichnungen an. Die fraglichen WEIERSTRASS'schen Vorlesungen sind leider noch nicht vollständig publicirt; in einer ausführlicheren Arbeit, welche demnächst in

den Acta mathematica erscheinen soll, werde ich daher auch genöthigt sein, auf die WEIERSTRASS'sche Methode zurückzukommen, insbesondere auch darum, weil ich in mehreren Punkten Modifikationen und Verallgemeinerungen anbringen musste, da die WEIERSTRASS'sche Darstellung principiell nur *irreduktible* Gebilde behandelt. Im allgemeinen waren diese Modifikationen sehr leicht anzubringen.

Es sei also $f(xy)$ ein gegebenes Polynom von zwei unabhängigen Veränderlichen x und y . Wir werden voraussetzen, dass die drei Gleichungen

$$f(xy) = 0, \quad f(xy)_1 = 0, \quad f(xy)_2 = 0,$$

wo $f(xy)_1, f(xy)_2$ die Derivirten von $f(xy)$ in Beziehung auf x und y bedeuten, nur eine endliche Anzahl von gemeinsamen Lösungen besitzen. Im entgegengesetzten Falle hat bekanntlich $f(xy)$ Divisoren, welche als ganze Potenzen von einfacheren geschrieben werden können, und welche mit Hülfe der Methode für die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Divisors entdeckt und entfernt werden können. Die gemachte Voraussetzung bedeutet also keine principielle Beschränkung.

Ist jetzt (a, b) ein Werthepaar welches der Gleichung

$$(1) \quad f(xy) = 0$$

genügt, also nach der WEIERSTRASS'schen Terminologie eine Stelle des durch die Gleichung (1) definirten algebraischen Gebildes, so kann man immer die Grössen x, y durch zwei Potenzreihen in einer Hilfsgrösse t ausdrücken:

$$(2) \quad \begin{cases} x - a = t^p(a_0 + a_1 t + \dots) & (a_0 \neq 0) \\ y - b = t^q(b_0 + b_1 t + \dots) & (b_0 \neq 0) \end{cases}$$

in der Weise, dass bei Einsetzen dieser Ausdrücke für x und y die Gleichung (1) *identisch* befriedigt wird. Die Grösse t kann dabei so gewählt werden, dass sie sich als eine rationale Funktion von x und y darstellen lässt. Nähert sich diese Funktion dem Werthe Null, sobald die Stelle x, y des algebraischen Gebildes sich der Stelle (a, b) nähert, so wird die *ganze Umgebung* der Stelle (a, b) durch die Formeln (2) dargestellt.

Es kann aber auch der Fall eintreten, dass die fragliche rationale Funktion der Stelle (xy) nicht für *alle* Stellen des algebraischen Gebildes, welche sich der Stelle (a, b) nähern, beliebig klein wird. In diesem Fall muss man *mehrere* solche Darstellungen wie (2) einführen, um die ganze Umgebung der Stelle (a, b) darzustellen. Nach der gewöhnlichen Terminologie, welche jedoch von WEIERSTRASS *nicht* benutzt wird, sagt man in diesem Falle, es gehen mehrere *Curvenzweige* durch den Punkt (a, b) .

Diese Darstellung der Curvenzweige ist übrigens nicht völlig bestimmt, sondern man kann andere *äquivalente* Darstellungen erhalten, indem man statt der Grösse t eine andere Grösse τ einführt, durch eine Formel

$$\tau = c_1 t + c_2 t^2 + \dots, \quad c_1 \neq 0$$

(τ wird dabei eine in der Umgebung der Stelle $x = a, y = b$ *eindeutige*, aber natürlich nicht nothwendig eine *rationale* Funktion der Stelle x, y).

In derselben Weise kann man auch die Umgebung der unendlich entfernten Stellen darstellen. Wird z. B. x sehr gross, so bleibt $\xi = \frac{1}{x}$ endlich, und es befriedigen die Werthe ξ, y die Gleichung

$$(3) \quad \varphi(\xi, y) = 0$$

indem man, unter der Voraussetzung dass $f(xy)$ in Bezug auf x vom m -ten Grade ist,

$$\varphi(\xi, y) = \xi^m f\left(\frac{1}{\xi}, y\right)$$

setzt.

Befriedigt jetzt das Werthepar $\xi = 0, y = b$ die Gleichung (3), so können sämtliche Stellen des algebraischen Gebildes in einer gewissen Umgebung der Stelle $\xi = 0, y = b$ durch eine endliche Anzahl von Potenzreihen-Paaren

$$\begin{aligned} \xi &= t^p(a_0 + a_1 t + \dots) \\ y - b &= t^q(b_0 + b_1 t + \dots) \end{aligned}$$

dargestellt werden. Man erhält also genau dieselbe Art von Darstellung wie früher, indem nur statt $x - a \frac{1}{x}$ getreten ist.

Die Beschreibung des einfachen Algorithmus, welchen WEIERSTRASS anwendet, um solche Entwicklungen wirklich aufzustellen, muss hier des Raumersparnisses halber wegbleiben.

Ebenso kann ich den, übrigens sehr einfachen, Beweis des folgenden fundamentalen Hilfssatzes übergehen:

Bildet man, wenn $F(xy)$ eine beliebige rationale Funktion einer Stelle (xy) des algebraischen Gebildes (1) ist, alle Potenzreihenpaare xy_i von der oben beschriebenen Art (2) für welche $F(xy_i)$, wenn man dies wieder nach Potenzen von t entwickelt, negative Potenzen von t enthält — und es giebt immer nur eine endliche Anzahl solcher Entwicklungen — so ist die Summe aller bei solchen Entwicklungen auftretenden Koeffizienten von t^{-1} gleich Null.

Wir schreiben kurz

$$\Sigma[F(xy_i)]_{t^{-1}} = 0.$$

Jeder der genannten Koeffizienten bleibt übrigens ungeändert, wenn man statt $x_i y_i$ ein äquivalentes Paar $x_\tau y_\tau$ einsetzt.

Mit diesen Hilfsmitteln wollen wir jetzt, in der nächsten Übereinstimmung mit WEIERSTRASS, einige Sätze entwickeln, welche wir für die Behandlung unserer Aufgabe nöthig haben. Wir bemerken hier beiläufig, dass wir eine Abweichung von der WEIERSTRASS'schen Darstellung in solchen Fällen, wo dadurch eine Vereinfachung zu erreichen war, nicht ängstlich aus dem Wege gegangen sind.

Wir brauchen übrigens eigentlich nur einige Kenntniss einer gewissen speciellen Funktion von zwei Stellen des algebraischen Gebildes (xy) und $(x'y')$, welche, wenn man sie als Funktion der ersteren Stelle betrachtet, die Eigenschaft hat, für

$$x = x', y = y'$$

unendlich zu werden, und ausserdem nur noch für gewisse bestimmte, also von der Stelle $(x'y')$ nicht abhängigen Stellen.

Eine solche Funktion kann man am einfachsten auf die folgende Weise bilden.

Es sei

$$f(xy) \equiv f_0(x)y^n + f_1(x)y^{n-1} + \dots + f_{n-1}(x)y + f_n(x),$$

dann setze man

$$\begin{aligned} f(xy y') &\equiv \frac{f(xy) - f(xy')}{y - y'} \\ &\equiv f_0(x)(y^{n-1} + y^{n-2}y' + y^{n-3}y'^2 + \dots + y'^{n-1}) \\ &\quad + f_1(x)(y^{n-2} + y^{n-3}y' + \dots + y'^{n-2}) \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + f_{n-1}(x) \\ &\equiv f_0(x)y'^{n-1} + (f_0(x)y + f_1(x))y'^{n-2} + \\ &\quad + (f_0(x)y^2 + f_1(x)y + f_2(x))y'^{n-3} + \dots \\ &\quad + (f_0(x)y^{n-1} + f_1(x)y^{n-2} + \dots + f_{n-1}(x)), \end{aligned}$$

und endlich

$$F(xy, x'y') = \frac{f(xy y')}{(x - x')f(x'y')_2}.$$

Dies ist also eine rationale Funktion von $xy, x'y'$.

Jetzt werden wir annehmen, dass sowohl (xy) , wie $(x'y')$ Stellen des algebraischen Gebildes (1) darstellen. Von der letzteren Stelle nehmen wir übrigens bis auf Weiteres an, dass sowohl x' wie y' endlich sind, und dass $f(x'y')_2$ von Null verschieden ist, und ebenso $f_0(x')$. (Es sind hierdurch nur eine endliche Anzahl von Stellen ausgeschlossen, falls nicht etwa sämtliche Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von y in $f(xy)$ einen gemeinsamen Teiler haben sollten, welchen Fall wir hier bei Seite lassen können.)

Dann lässt sich die Umgebung jeder Stelle $x = x', y = y'$ oder $x = x', y = y''$ darstellen durch ein einziges Paar von Potenzreihen

$$x - x' = t$$

$$y - y' = t\mathfrak{Y}'(t) \text{ oder } y - y'' = t\mathfrak{Y}''(t).$$

Man erhält offenbar, indem man die ersteren Potenzreihen einsetzt,

$$f(xyy') = f(x'y')_2 + t\mathfrak{P}(t)$$

also

$$F(xy, x'y') = \frac{1}{t} + \mathfrak{P}(t).$$

Setzt man dagegen das Paar $x - x' = t$, $y - y' = t\mathfrak{P}''(t)$ ($y'' \neq y'$) ein, so erhält man, da ja $f(xy) = 0$ ist,

$$f(xyy') = -\frac{f(xy')}{y - y'} = -\frac{f(x'y') + t\mathfrak{P}_1(t)}{y'' - y' + t\mathfrak{P}_2(t)},$$

also, da $f(x'y')$ auch gleich Null ist, aber $y'' - y'$ von Null verschieden,

$$f(xyy') = t\mathfrak{P}(t),$$

und endlich

$$F(xy, x'y') = \mathfrak{P}(t).$$

Die übrigen Unendlichkeitsstellen der Funktion $F(xy, x'y')$ sind leicht zu finden. Diese Funktion kann ja erstens nicht unendlich sein, wenn (x, y) beide endliche Werthe haben, und x von x' verschieden ist. Diejenigen Stellen des algebraischen Gebildes für welche $x = x'$ sind haben wir schon berücksichtigt. Also kann unsere Funktion nur noch für *unendlich entfernte* Stellen des Gebildes unendlich werden, also nur für gewisse bestimmte, von $(x'y')$ unabhängige Stellen. Noch ein wenig näher können wir diese Stellen bestimmen. Denn es ist offenbar, dass, wenn zwar y unendlich wird, aber nicht x , die Funktion $f(xyy') = -\frac{f(xy')}{y - y'}$ einen endlichen Wert behält, und also auch die Funktion $F(xy, x'y')$. Die Stellen, für welche $x = \infty$ ist, sind also, ausser der Stelle $(x'y')$, die einzigen Stellen, wo unsere Funktion unendlich werden kann.

Bei dieser Funktion können jetzt die folgenden beiden fundamentalen Eigenschaften ohne grosse Schwierigkeit nachgewiesen werden. Setzt man in das Differential

$$F(xy, x'y')dx'$$

für xy , $x'y'$ beliebige Paare von Potenzreihen $x_t y_t$, $x'_t y'_t$ ein, welche in der oben angegebenen Weise Umgebungen von gewissen Stellen des algebraischen Gebildes (1) darstellen, so gelten die beiden folgenden Formeln:

1) Wenn $(x_t y_t)$ nicht mit $(x'_t y'_t)$ äquivalent ist, so gilt eine Formel

$$I \quad F(x_t y_t, x'_t y'_t) dx'_t = P(t, \tau) d\tau$$

wo $P(t, \tau)$ eine Potenzreihe ist, welche nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen von t und τ enthalten kann.

2) Sind $(x_t y_t)$ und $(x_\tau y_\tau)$ dasselbe Paar von Potenzreihen, nur mit verschiedener Bezeichnung der unabhängigen Veränderlichen, so ist

$$II \quad F(x_t y_t, x_\tau y_\tau) dx_\tau = \frac{d\tau}{t - \tau} + P(t, \tau) d\tau$$

wo $P(t, \tau)$ eine ebensolche Potenzreihe bezeichnet, wie oben. Diese Formeln werden leicht erhalten, in dem man die linken Seiten erstens als Quotienten von Potenzreihen schreibt, und dann einen fundamentalen WEIERSTRASS'schen Satz über Potenzreihen von mehreren Veränderlichen benutzt.¹⁾ Es ist übrigens unmittelbar klar, dass die Potenzreihen $P(t, \tau)$ in beiden diesen Formeln nur dann negative Potenzen von t enthalten können, wenn $(x_t y_t)$ die Umgebung einer Stelle darstellt für welche $x = \infty$ ist; und nur dann negative Potenzen von τ , wenn $(x'_t y'_t)$ — resp. $(x_\tau y_\tau)$ — die Umgebung einer Stelle (a, b) darstellt, für welche

$$f(ab)_1 = 0, f(ab)_2 = 0,$$

oder auch einer unendlich entfernten Stelle.

Dies sind nämlich die einzigen Stellen, für welche die Entwicklung nach Potenzen von t von

$$F(x_t y_t, x' y')$$

für eine unbestimmte Stelle $x' y'$, resp. die Entwicklung nach Potenzen von τ von

¹⁾ Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze, Math. Werke, 2. Band.

$$(4) \quad F(xy, x'_i y'_i) \frac{dx'_i}{d\tau}$$

für eine unbestimmte Stelle xy , negative Potenzen enthalten kann.

Die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von t und τ in den zuletzt angegebenen Entwicklungen definieren eine Reihe von Funktionen, welche in der WEIERSTRASS'schen Theorie eine fundamentale Rolle spielen, und für welche die Entwicklungen I und II wichtige Identitäten ergeben.

Wir brauchen für unseren nächsten Zweck nur die Koeffizienten von τ^{-1} in den Entwicklungen (4) zu berücksichtigen. Wir setzen, wenn $(x^\lambda_i y^\lambda_i)$ ein Paar von Potenzreihen bezeichnet für welches negative Potenzen in dieser Entwicklung überhaupt auftreten können:

$$F_\lambda(xy) = \left[F(xy, x^\lambda_i y^\lambda_i) \frac{dx^\lambda_i}{d\tau} \right]_{\tau^{-1}}.$$

$F_\lambda(xy)$ hat die Form eines Polynoms in y , vom Grade $n-1$, deren Koeffizienten in x rational sind.

Die einzige Eigenschaft dieser Funktionen, welche wir eigentlich zu kennen brauchen, besteht darin, dass sie *nur* für unendlich entfernte Stellen unendlich werden können (und zwar näher bestimmt nur für Stellen für welche $x = \infty$).

Wir wenden daher die WEIERSTRASS'sche Beweismethode nur für den Beweis dieser speciellen Behauptung an.

Man hat nach Formel I, wenn $(x_i y_i)$ ein mit $(x^\lambda_i y^\lambda_i)$ nicht äquivalentes Potenzreihenpaar ist,

$$F_\lambda(x_i y_i) = [P(t, \tau)]_{\tau^{-1}}$$

also gleich einer Potenzreihe in t , welche nur dann negative Potenzen von t enthält, wenn $x_i y_i$ die Umgebung einer Stelle darstellt für welche $x = \infty$ ist. Und zwar kommen in diesem Falle höchstens gewisse bestimmte negative Potenzen von t vor, nämlich diejenigen welche in der entsprechenden Entwicklung von

$$F(x_i y_i, x' y')$$

für unbestimmtes $(x' y')$ vorkommen.

Zweitens hat man nach Formel II, wenn $(x_t^\lambda y_t^\lambda)$ dasselbe Paar ist wie $(x_\tau^\lambda y_\tau^\lambda)$, nur mit geänderter Bezeichnung der unabhängigen Veränderlichen:

$$F_\lambda(x_t^\lambda y_t^\lambda) = \left[\frac{1}{t - \tau} + P(t, \tau) \right]_{t-\tau}$$

oder, da $\frac{1}{t - \tau}$, nach Potenzen von τ entwickelt, keine negativen Potenzen enthält,

$$F_\lambda(x_t^\lambda y_t^\lambda) = [P(t, \tau)]_{t-1}.$$

Also enthält $F_\lambda(x_t^\lambda y_t^\lambda)$ nur dann negative Potenzen von t , wenn $(x_t^\lambda y_t^\lambda)$ die Umgebung einer solchen Stelle darstellt für welche $x = \infty$ ist.

Damit ist aber unsere Behauptung vollständig erwiesen.

Jetzt sind wir im Stande, die anfangs näher angegebene Aufgabe zu lösen.

Dieselbe ist nämlich im Grunde identisch mit der folgenden Aufgabe, welche wir zuerst behandeln wollen.

Alle rationalen Funktionen einer Stelle (xy) des algebraischen Gebildes $f(xy) = 0$ zu finden, welche an keiner Stelle unendlich werden.

Kannten wir die Auflösung von $f(xy)$ in irreduktible Faktoren, so konnte die Lösung dieser Aufgabe folgendermassen formulirt werden.

Es sei

$$f(xy) = f_1(xy)f_2(xy) \dots f_o(xy),$$

wo $f_1(xy) \dots f_o(xy)$ irreduktibel angenommen sind, und zwar verschieden, nach der Annahme die wir über $f(xy)$ gemacht haben.

Eine rationale Funktion von (xy) welche nie unendlich wird, muss offenbar einen *konstanten* Werth haben; nur kann dieser Werth für die verschiedenen irreduktiblen Gebilde, in welche das gegebene Gebilde zerfällt, verschieden ausfallen.

Es haben $f_s(xy)$ und $\varphi_s(xy) = \frac{f(xy)}{f_s(xy)}$ keinen gemeinschaftlichen Divisor; also können neue Polynome in y $g_s(xy)$ und $\psi_s(xy)$, bzw. von niederem Grade als $f_s(xy)$ und $\psi_s(xy)$ und deren Koeffizienten rational in x sind, so bestimmt werden, dass

$$f_s(xy)\psi_s(xy) + \varphi_s(xy)g_s(xy) = 1.$$

Dann hat der Ausdruck

$$\varphi_s(xy)g_s(xy) = 1 - f_s(xy)\psi_s(xy)$$

die Eigenschaft, gleich Eins zu werden, wenn (xy) die Gleichung

$$f_s(xy) = 0$$

befriedigt, aber gleich 0, wenn (xy) einer der Gleichungen

$$f_{s'}(xy) = 0 \quad (s' \geq s)$$

genügt.

Der Ausdruck

$$\sum_i C_i \varphi_i(xy) g_i(xy)$$

wo die C_i beliebige Konstanten bedeuten, nimmt also auf $f_s(xy) = 0$ den beliebig gegebenen Werth C_i an, und jede rationale Funktion der Stelle (xy) , welche nie unendlich wird, kann also einem solchen Ausdruck gleich gesetzt werden.

Dieselbe Aufgabe kann aber gelöst werden, auch wenn man die Auflösung von $f(xy)$ in irreduktible Faktoren *nicht kennt*.

Es sei nämlich $\Phi(xy_i)$ eine solche Funktion. Ist (x, y_i) ein Paar von Potenzreihen, welches die Umgebung einer Stelle des algebraischen Gebildes $f(xy) = 0$ darstellt, so muss man haben

$$\Phi(xy_i) = [\Phi(xy_i)]^e,$$

da die Funktion einen konstanten Werth hat.

Jetzt wende man den Hilfsatz S. 798 auf die Funktion

$$\Phi(xy) F(\bar{xy}, xy)$$

an, indem (\bar{xy}) eine endliche Stelle ist, für welche $f(\bar{xy})_2 \neq 0$ ist. Ausserdem sei \bar{y} der Bedingung unterworfen, dass der Koeffizient der höchsten Potenz von x in $f(x, \bar{y})$ nicht verschwinden soll.

Da die Entwicklung von $\Phi(x_\tau y_\tau)$ keine negativen Potenzen von τ enthält, so können die negativen Potenzen in der Entwicklung von

$$\Phi(x_\tau y_\tau) F(\bar{x}y, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau}$$

nur von

$$F(\bar{x}y, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau}$$

stammen. Die Entwicklung dieses Ausdruckes enthält negative Potenzen von τ , wenn $\bar{x}y$ unbestimmt gelassen wird, nur für die Potenzreihenpaare $x_\tau^\lambda y_\tau^\lambda$, und dann ist

$$\left[F(\bar{x}y, x_\tau^\lambda y_\tau^\lambda) \frac{dx_\tau^\lambda}{d\tau} \right]_{\tau=1} = F_\lambda(\bar{x}y),$$

also auch

$$\left[\Phi(x_\tau^\lambda y_\tau^\lambda) F(\bar{x}y, x_\tau^\lambda y_\tau^\lambda) \frac{dx_\tau^\lambda}{d\tau} \right]_{\tau=1} = [\Phi(x_\tau^\lambda y_\tau^\lambda)]_{\tau=0} \cdot F_\lambda(\bar{x}y).$$

Ausser diesen Stellen kann man nur in der Umgebung der Stelle $(\bar{x}y)$ negative Potenzen erhalten.

In der That, schreiben wir einen Augenblick

$$\Phi(xy, x'y') = \frac{f(xy y')}{x - x'} = \frac{f(xy')}{(x - x')(y' - y)}$$

und ferner

$$g(y, x) = f(x, y)$$

$$\Psi(y'x', yx) = \frac{g(y'x'x)}{y' - y} = \frac{g(y'x)}{(x' - x)(y' - y)}$$

so ist

$$\Phi(xy, x'y') = \Psi(y'x', yx).$$

und aus dieser, auch sonst bemerkenswerthen Identität folgt unsere Behauptung unmittelbar.

Stellt $\bar{x}_\tau \bar{y}_\tau$ die Umgebung der Stelle $\bar{x}y$ dar, so hat man

$$F(\bar{x}_\tau y_\tau, \bar{x}_\tau \bar{y}_\tau) \frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau} = \frac{1}{t - \tau} + \mathfrak{P}(t, \tau).$$

wo die Potenzreihe $\mathfrak{Y}(t, \tau)$ weder von t noch von τ negative Potenzen enthält. Also haben wir für $t = 0$

$$F(\bar{x}\bar{y}, \bar{x}_\tau\bar{y}_\tau) \frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau} = -\tau^{-1} + \mathfrak{Y}(\tau)$$

und also

$$\left[\Phi(\bar{x}_\tau\bar{y}_\tau) F(\bar{x}\bar{y}, \bar{x}_\tau\bar{y}_\tau) \frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau} \right]_{\tau^{-1}} = -\Phi(\bar{x}\bar{y}).$$

Also haben wir, wenn wir alle Koeffizienten von τ^{-1} summieren

$$\Phi(\bar{x}\bar{y}) = \Sigma_\lambda [\Phi(x_\tau^\lambda y_\tau^\lambda)]_{\tau^0} \cdot F_\lambda(\bar{x}\bar{y});$$

also überhaupt für alle Stellen xy

$$\Phi(xy) = \Sigma_\lambda [\Phi(x_\tau^\lambda y_\tau^\lambda)]_{\tau^0} \cdot F_\lambda(xy),$$

oder

$$(5) \quad \Phi(xy) = \Sigma_\lambda C_\lambda F_\lambda(xy),$$

wo die Koeffizienten C_λ gewisse Konstanten bedeuten.

Nun stellt dieser Ausdruck zwar nicht immer Funktionen der gesuchten Art dar, da die Funktionen $F_\lambda(xy)$ für gewisse Stellen, nämlich für diejenigen wo $x = \infty$ ist, unendlich werden können.

Aber wir wissen, dass wenn $(x_t^\alpha y_t^\alpha)$ ein Potenzreihenpaar ist, welches die Umgebung einer solchen Stelle — ganz oder teilweise — darstellt, so enthält die Entwicklung von

$$F_\lambda(x_t^\alpha y_t^\alpha)$$

nur gewisse bestimmte negative Potenzen von t . Es sei

$$F_\lambda(x_t^\alpha y_t^\alpha) = \Sigma_\beta c_{\alpha\beta}^{(\lambda)} t^{-\beta} + \mathfrak{Y}(t)$$

so stellt der Ausdruck (5) immer dann und nur dann eine Funktion von der gewünschten Beschaffenheit dar, wenn, für jede in Frage kommende Kombination α, β

$$\Sigma_\lambda c_{\alpha\beta}^{(\lambda)} C_\lambda = 0$$

ist.

Es können folglich die Grössen C_λ mit Hilfe einer gewissen Anzahl unbestimmt bleibender Grössen D_μ linear ausgedrückt werden:

$$C_\lambda = \sum_\mu d_{\lambda\mu} D_\mu.$$

Der Ausdruck

$$\sum_{\lambda\mu} d_{\lambda\mu} D_\mu F_\lambda(xy) = \sum_\mu D_\mu \Phi_\mu(xy)$$

worin

$$\Phi_\mu(xy) = \sum_\lambda d_{\lambda\mu} F_\lambda(xy)$$

gesetzt wird, liefert dann für beliebige Werthe von D_μ eine Funktion der gewünschten Art, während umgekehrt jede Funktion jener Art durch diese Formel dargestellt werden kann.

Es sei jetzt (x, y_i) ein beliebiges Paar von Potenzreihen, welches die Gleichung $f(xy) = 0$ identisch befriedigt.

Dann ist

$$\sum_\mu D_\mu \Phi_\mu(x, y_i) = \text{Konst.}$$

also

$$\sum_\mu D_\mu \{ \Phi_\mu(x, y_i) - [\Phi_\mu(x, y_i)]_{r^0} \} = 0.$$

Also haben die ganzen Funktionen von y

$$f(xy) \text{ und } \Phi_\mu(xy) - [\Phi_\mu(x, y_i)]_{r^0} \quad (\mu = 1, 2, \dots)$$

einen gemeinschaftlichen Divisor.

Derselbe ist aber irreduktibel, und zwar gleich demjenigen irreduktiblen Faktor $f_s(xy)$ von $f(xy)$, welcher bei Substitution des Paares (x, y_i) identisch verschwindet.

Die oben gebildete Funktion

$$f_s(xy) \psi_s(xy)$$

welche für $f_s(xy) = 0$ den Werth Null, für $f_{s'}(xy) = 0$ ($s' \geq s$) aber den Werth Eins hat, ist ja nämlich eine Funktion, welche nie unendlich wird, und lässt sich also darstellen in der Form

$$f_s(xy) \psi_s(xy) = \sum_\mu \bar{D}_\mu \Phi_\mu(xy);$$

also hat man auch

$$f_s(xy) \psi_s(xy) = \sum_\mu \bar{D}_\mu (\Phi_\mu(xy) - [\Phi_\mu(x, y_i)]_{r^0})$$

da ja

$$\sum_{\mu} \bar{D}_{\mu} [\Phi_{\mu}(x_i y_i)]_{x^0} = 0$$

ist.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von

$$f(xy) \text{ und } \Phi_{\mu}(xy) - [\Phi_{\mu}(x_i y_i)]_{x^0} \quad (\mu = 1, 2, \dots)$$

ist also auch gemeinschaftlicher Divisor von

$$f(xy) \text{ und } f_{\lambda}(xy) \psi_{\lambda}(xy)$$

und ist also mit $f_{\lambda}(xy)$ identisch, wenn man von einem Faktor absieht, welcher nur von x abhängt.

Um alle irreduktible Divisoren von $f(xy)$ zu erhalten, hat man also nur nöthig, statt $(x_i y_i)$ nach einander alle verschiedenen Paare zu substituiren, welche die Umgebung aller solchen Stellen entsprechen, für welche x einen gegebenen Werth hat. Man wird z. B. die schon benutzten Paare $(x_i^{\alpha} y_i^{\alpha})$ verwenden können, welche die Umgebung derjenigen Stellen darstellen für welche $x = \infty$ ist.

Ich bemerke hier nur ganz beiläufig, dass die obige Methode auch dann verwendet werden kann, wenn das algebraische Gebilde auf andere Weise als oben gegeben ist, z. B. durch zwei Gleichungen zwischen drei Veränderlichen

$$\begin{aligned} f(xyz) &= 0 \\ g(xyz) &= 0, \end{aligned}$$

und dass man die Rechnung *direkt* ausführen kann, ohne die Gleichungen erst in andere Form zu transformiren. Die irreduktiblen Curven werden hierbei dadurch definirt, dass zu den obigen Gleichungen eine gewisse Anzahl von anderen Gleichungen

$$\varphi_{\mu}(xyz) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots)$$

hinzukommen.

Ich gedenke in einer mehr ausführlichen Publikation auf diese Frage zurückzukommen.

Zum Schluss will ich noch eine andere Berechnungsmethode berühren, welche die *Anzahl* der irreduktiblen Faktoren durch eine leichte Rechnung zu bestimmen erlaubt.

Einerseits nämlich ergeben die gewöhnlichen Methoden zur Berechnung des Ranges (oder, was dasselbe ist, des Geschlechts) des algebraischen Gebildes, nur dann die Anzahl der linear unabhängigen unter den nie unendlichen Differentialausdrücken

$$H(xy)dx$$

wenn die gegebene Gleichung $f(xy) = 0$ irreduktibel ist. Diese Methoden lassen sich nämlich sämtlich in der Formel

$$2\varrho - 2 = \Sigma \left[\frac{d}{dt} \log \frac{dx}{dt} \right]_{t=-1}$$

zusammenfassen, welche unter der obigen Voraussetzung richtig ist.

Ist dagegen

$$f(xy) = f_1(xy)f_2(xy) \dots f_\sigma(xy)$$

und ist ϱ , die Anzahl der linear unabhängigen unter den nie unendlichen rationalen Differentialausdrücken für das Gebilde $f(xy) = 0$, so erhält man unmittelbar

$$2 \cdot \Sigma \varrho_i - 2\sigma = \Sigma \left[\frac{d}{dt} \log \frac{dx}{dt} \right]_{t=-1}.$$

Ferner lässt sich aber auch leicht nachweisen, dass $\Sigma \varrho_i$, die Anzahl der linear unabhängigen unter den nie unendlichen rationalen Differentialen für das Gebilde $f(xy) = 0$ angiebt. Wird diese Zahl auch für den allgemeinen Fall als *Rang* des Gebildes genommen und mit ϱ bezeichnet, so hat man also

$$2\varrho - 2\sigma = \Sigma \left[\frac{d}{dt} \log \frac{dx}{dt} \right]_{t=-1}.$$

Die nie unendlichen rationalen Differentialen können aber, auch für den allgemeinen Fall, durch die gewöhnlichen Mittel dargestellt werden, z. B. kann man setzen

$$H(xy)dx = G(xy) \cdot \frac{dx}{f(xy)_2}$$

wo $G(xy)$ ein Polynom von x und y bezeichnet, dessen Dimension in Bezug auf x und y höchstens $r - 3$ ist, wenn r die

Dimension von $f(xy)$ bezeichnet. Die Koeffizienten dieses Polynoms unterliegen ausserdem gewissen linearen Bedingungen, welche leicht aufgestellt werden können.

Hierdurch wird also ρ bestimmt, also mit Hilfe der soeben aufgestellten Gleichung auch σ .

In den meisten Fällen wird man $\sigma = 1$ finden, und hat also nicht nöthig, die schwerfälligere allgemeine Methode für Auflösung in irreduktible Faktoren zuzugreifen.

In vielen Fällen wird es nicht einmal nöthig sein, die Anzahl der linear unabhängigen Differentiale »erster Art« zu ermitteln, um sicher zu sein, dass die gegebene Gleichung irreduktibel ist. Definirt man nämlich eine Zahl d , »die Anzahl der Doppelpunkte des Gebildes«, durch die Formel

$$d = \frac{1}{2} r(r-3) - \frac{1}{2} \sum \left[\frac{d}{dt} \log \frac{dx}{dt} \right]_{-1},$$

so sieht man leicht, dass die Gleichung nothwendig irreduktibel ist, sobald $d < r - 1$.

Man beweist ebenso leicht, dass, wenn diese Anzahl kleiner als

$$a(r-a) \quad (2a < r)$$

ist, $f(xy)$ nothwendig einen irreduktiblen Divisor von höherer Dimension als der $(r-a)^{\text{ten}}$ besitzen muss, so dass also die übrigen irreduktiblen Divisoren Dimensionen haben, deren Summe kleiner als a ist.

Man erhält nämlich unmittelbar den folgenden Satz:

Sind die beiden Polynome in x und y , $f_1(xy)$ von der Dimension r_1 und $f_2(xy)$ von der Dimension r_2 , teilerfremd, und haben die Gleichungen

$$f_1(xy) = 0 \text{ resp. } f_2(xy) = 0$$

bei der gewählten Zählungsweise d_1 , resp. d_2 Doppelpunkte, so hat die Gleichung

$$f_1(xy) \cdot f_2(xy) = 0$$

genau

$$d_1 + d_2 + r_1 r_2$$

Doppelpunkte.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 784.)

Af författarne:

- ANDERSSON, G., A. E. Nordenskiöld. Sthlm 1901. 4:o.
- LILLJEBORG, W., Synopsis specierum huc usque in Suecia observarum generis Cyclopis. Sthlm 1901. 4:o.
- BERTRAND, C., Le livre de Dieu. Saint Malo 1899. 8:o.
— Dieu. Saint Malo 1901. 8:o.
- FRIDERICIA, J. A., & PECHÜLE, C. F., Tyge Brahe, paa 300 aars dagen efter hans död, 24 okt. 1901. Khvn 1901. 8:o.
- GROOM, TH. T., The early development of Cirripedia. London 1894. 4:o.
- DE MAGRIŇÁ, A., Ego sum. Tarragona 1901. 8:o.
- PEPRNÝ, L., K dějinám matematiky v Čechách. Prag 1901. 8:o.
- RUSSELL, H. C., Current papers. N:o 5. Sydney 1900. 8:o.
- UMOW, N., Ein Versuch die magnetischen Typen des Erdmagnetismus zu ermitteln. Moskwa 1901. 8:o.
- UNGER, J., Offenes Schreiben an die K. Akademie d. Wiss. in Wien, womit dieselbe aufgefordert wird, den Schulunterricht über den Jahresumlauf der Erde . . . zu korrigiren, da solcher nicht nur unverständlich, sondern ganz falsch ist . . . Wien 1901. 8:o.
- WONASZEK, A. A., 1. A Jupiter felületi képződményeinek periodicitása. 2. A Saturnus gyűrűrendszerén mutatkozó concav árnyék periodicitása. Budapest 1901. 8:o.

Stockholm 1902. Kungl. Boktryckeriet.

Skandinavien's Fiskar

målade af

W. von Wright

beskrifna af

B. Fries, C. U. Ekström och C. Sundevall.

Andra upplagan, bearbetning och fortsättning af *F. A. Smitt*.

Detta planschverk afser icke blott att lemna vetenskapsmännen trogna och tillförlitliga figurer öfver fäderneslandets fiskarter och mera åskådligt framställa denna del af dess fauna; det har derjemte ett icke mindre viktigt ändamål, att för en hvar underlätta fiskarnes igenkännande och göra deras studium tillgängligt för alla, som med nöjet och nyttan af fiskets praktiska utöfning önska förena en zoologisk kännedom om dem och deras naturförhållanden.

Skandinavien's fiskfauna har att uppvisa 224 arter. I den förra upplagan af detta verk afbildades 64 arter; i föreliggande nya upplaga däremot 223 arter. Af en art har nämligen icke någon figur kunnat anskaffas, enär intet exemplar af denna art numera finnes förvaradt i något museum. Härutöver meddelar den nya upplagan afbildningar af 5 bastarder af karpfiskar och 9 arktiska arter. De kolorerade figurerna äro tillhoppa 190, zinkotypierna i texten 380.

Verket, som omfattar 1,239 textsidor och 55 planscher, utom, såsom nyss nämnts, 380 figurer i texten, tillhandahålles dels häftadt, dels bundet. Bokhandelspriset är för häftadt ex. 200 kr.; för ex. i tre band (texten i två och taflorna i ett band) 222 kr.

Lösa delar eller häften säljas icke.

I hvarje välordnad bokhandel kan närmare kännedom tagas om verket och i mån af tillgång erhållas ett prospekt om detsamma, hvari meddelas prof å så väl texten som taflorna.

P. A. Norstedt & Söner.



ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS

FÖRHANDLINGAR.

FEMTIONIONDE ÅRGÅNGEN.

1902.

STOCKHOLM,

KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1902, 1903.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

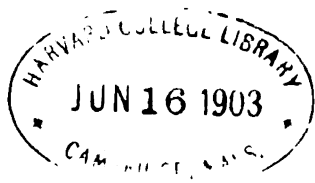
FEMTIONIONDE ÅRGÅNGEN.

1902.



STOCKHOLM,
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER.
1902, 1903.

- Soc 4321.40



The Academy.

INNEHÅLL.

Afhandlingar och föredrag.

	Sid.
ADLERZ, <i>Ceropales maculata</i> FABR., en parasitisk Pompilid	262.
* —, Myrmecologiska studier. IV. <i>Formica suecica</i> n. sp.	263.
ARRHENIUS, Om FABIAN WREDE	261.
AURIVILLIUS, ref. ADLERZ afhandling om <i>Ceropales</i>	261.
* BENEDICKS, Elektriska ledningsmotståndet hos stål och rent järn	67.
* BERGENDAL, Einige Bemerkungen über <i>Carinoma Armandi</i> OUD	13.
BOHLIN, Vereinfachte Formeln für Astrogramme	206.
—, Fotografi af Perrines komet	261.
—, Eine Untersuchung über die Darstellung mehrwertiger Functionen ...	262.
—, Ueber Elementar-Wurzel-Functionen	267.
—, Om ett normalur i Observatoriet	287.
—, ref. af H. VON ZEIPPEL Angenäherte Jupiterstörungen	287.
—, Détermination des corrections du réseau employé depuis 1897 pour les mesures astrophotographiques à l'observatoire de Stockholm	287.
* BOTHÉN, Nytt fynd af svarthalsade buskqvätan i Sverige	65.
—, Iakttagelser rörande fågelfaunan i Göteborgs och Bohus län	84.
* BRODÉN, Ueber lineare homogene Differentialgleichungen	5.
CARLSON, Om vegetationen i några småländska sjöar	85.
CLEVE, The Plankton of the North Sea and the Skagerrak in 1900	50.
EKMÄN, Beiträge zur Kenntnis der Phyllopodenfamilie Polyartemiidae	262.
EKSTRÖM, Einige Theoreme über elektrische Ladungen	287.
ENGHOLM, Om fågellifvet i och omkring sjön Tåkern	109.
ERIKSSON, Om timotejrosten	167.
* —, Ist der Timothéengrasrost eine selbständige Rostart oder nicht?	189.
* EULER, Zur Theorie der chemischen Reaktionsgeschwindigkeit	57.
* —, Ueber die Reaktion zwischen Aminen und salpetriger Säure	111.
* —, Ueber die Zersetzung von Diazoniumsalzen	227.
GILLJAM, ref. af S. WIDE's reseberättelse	109.
HASSELBERG, Om ett fall af personlig equation	85.
—, Om molybdens spektrum	167.
—, Untersuchungen über die Spektren der Metalle, 6. Spectrum des Molybdens	168.
HOLMGREN, Om primtalens fördelning	221.
JOHANSSON, Archieracium-floran inom Dalarnes siluområde	168.
JOHNSON, La capacité d'un conducteur pour l'unité de longueur	53.
JÄDERHOLM, Die Hydroiden der schwedischen zoologischen Polarexpedition 1900	262.
—, Neue oder wenig bekannte ostasiatische Hydroiden	262.
JÖNSSON, Färgbestämningar för klorofyllet hos skilda växtformer	220.
KLASON, Om platina-ammoniakföreningars kemiska konstitution	340.
—, & KÖHLER, Kvantitativ bestämning af små mängder arsenik	287.
KOCH, H. VON, Applications nouvelles de la fonction exponentielle	50.

*KULLGREN, Studien über die Inversion 2.....	317.
LILLJEBORG, Bidrag till en öfversigt af de i Sveriges färskvatten iakttagna arterna af familjen Harpacticidae.....	50.
—, Tres species novi generis Canthocampti.....	206.
LINDMARK, Bidrag till kännedom om de svenska <i>Saxifraga</i> -arternas yttre byggnad och individbildning.....	50.
—, Om adventiv lökbildning på stjälken hos <i>Lilium candidum</i> L.....	50.
LÖNNBERG, On the female genital organs of <i>Cryptoprocta</i>	50.
*—, Några smärre iakttagelser rörande faunan i Bohuslän i mars 1902.....	169.
—, On some points of relations between the morphological structure of the intestine and the diet of reptiles.....	206.
*—, List of Pycnogonids collected by the Swedish zoological expedition to Spitzbergen and East Greenland in 1900.....	325.
MALME, Die Gattung <i>Rinodina</i>	2.
MALMQUIST, Bana för planet (429).....	309.
MITTAG-LEFFLER, Om frändet af 100-årsdagen af Abels födelse.....	85.
—, ref. af Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène.....	341.
MURBECK, Ueber die Embryologie von <i>Ruppia rostellata</i> KOCH.....	220.
MÖLLER, Bidrag till Bornholms fossila flora. Gymnospermer.....	341.
NATHORST, Zur oberdevonischen Flora der Bären-Insel.....	206.
—, Beiträge zur Kenntniss einiger mesozoischen Cycadophyten.....	220.
—, Växtfossil från polarstrakterna.....	340.
—, Tyg af myskoxens vinterull.....	341.
—, Svenska växtnamn 1.....	341.
NEANDER, Om korrektionerna för refraction vid uppmätning af stellarfotografiska plåtar.....	109.
*NILSSON, Einige Beobachtungen über die tägliche Variation im Leitungsvermögen der atmosphärischen Luft in Upsala.....	243.
NORDENSKIÖLD, Præcolumbische Wohn- und Begräbnisplätze an der Südwestgrenze von Chaco.....	341.
*ODHNER, Trematoden aus Reptilien.....	19.
*OHAUS, Verzeichnisse der von Herrn Dr YNGVE SJÖSTEDT in Kamerun gesammelten Ruteliden.....	343.
*OSÉEN, Om ett fall af hvirvelrörelse i en vätska.....	289.
*PALMER, Versuche zur Darstellung des Tetramethylammoniums.....	237.
PETTERSSON, Resultaten af den internationella undersökningen af norra Europas djupa sjöar och innanhaf år 1900.....	50.
RETZIUS, Om kanaler inuti körtel- och nervceller.....	85.
—, Om den internationella akademiska associationen.....	168.
—, Om nervceller i ryggmärgens ytlager.....	287.
ROSEN, Precisionsnivellement öfver Öresund 1896.....	50.
—, Höjdbestämming af Sveriges högsta fjäll.....	340.
ROSENBERG, Ueber die Befruchtung von <i>Plasmodium alpina</i>	341.
SANDSTRÖM, Ueber die Beziehung zwischen Luftbewegung und Druck in der Atmosphäre unter stationären Verhältnissen.....	87.
SCHÖTT, Etudes sur les Collembolus du Nord.....	2.
SMITT, Subfossila ben af puckelhvalen.....	167.
SVEDELIUS, Zur Kenntniss der saprophytischen Gentianaceen.....	84.
THALÉN, Magnetiska mätningar å jernmalmfälten.....	175.
THÉEL, Egendomligheter hos Echinodermägget.....	85.
—, Preliminary account on the development of <i>Echinus miliaris</i> L.....	168.
TRÄGÅRDH, Beiträge zur Kenntniss der schwedischen Acaridenfauna.....	84.
TULLBERG, Das Labyrinth der Fische.....	287.
TULLOREN, Spiders collected in Aysen Valley in South Chile.....	2.
WAHLGREN, Sur les points singuliers des équations différentielle du premier ordre et du second degré.....	109.
WENNERSTEN, Teratologiska iakttagelser å gottländska exemplar af <i>Juglans regia</i>	109.
WESTMAN, Comparaison entre les baromètres normaux d'Upsal et d'Helsingfors.....	287.

WESTMAN, Einige Messungen über die Ablationsgeschwindigkeit der Schneedecke in Stockholm und bei Kärrgrufvan im Frühling 1902	325.
WIDMAN, Bidrag till kännedomen om usnissyrar	220.
WIGERT, Quelques théorèmes sur les fonctions entières	207.
WITTRÖCK, Om Dr MALME's forskningar i Sydamerika	220.

Öfriga ärenden.

Afsked: RUBENSON	220.
BERZELIANSKA stipendiet: STRÖMHOLM	2.
BESKOWSKA stipendiet: CARLGREN	340.
Donation till Scheelefonden	83.
EDLUNDSKA belöningen: FORSLING, PETRINI	1.
FERNERSKA belöningen: HOLMGREN	88.
FLORMANSKA belöningen: JÄGERSKIÖLD	84.
HAHNSKA rättemedlen: VIMAN, GABR. ANDERSSON, BERGMAN	1.
Honorar: MÖLLER	340.
Inspektionsberättelser	109.
Ledamöter, afidne: THORELL, KEY, 1; HAMBERG, LANG, BRUZELIUS, 88; CORNÜ, 167; NORDENSTRÖM, FUCHS, VIRCHOW, 219; WILD, 261; RUBENSON, 285; > invalde: LANGLEY, MECHLIN, 50; DE GEER, WIRÉN, WIDMARK, 84; LOVÉN, HEDIN, WELANDER, 168; KOHLRAUSCH, 262; BRINELL, WEBER, CORNIL, CHRISTIANSEN, 340; storfursten KONSTANTIN, 341.	
LETTERSTEDTSKA anslaget för undersökningar: Kristinebergs station	50.
—, författarepriset: HOLM	49.
—, resestipendiet: WEIBULL	49.
—, översättningspriset: TÖRNEBLADH, SNOILSKY	49, 50.
LINDBOMSKA belöningen: CLEYE	83.
Ombud vid Amerikanistkongressen: STOLPE	167.
> Abelfesten: THÉEL, PHRAGMÉN	168.
Porträtt, förteckning öfver Akademiens	286.
Præses: THÉEL	110.
RÖNNELLS zoologiska gåfvomedel: BENGTSSON, JÄGERSKIÖLD, ÖSTERGREN, NORDENSKIÖLD, TULLGREN	286.
Reseberättelser: HOLMGREN, 1; SERNANDER, HESSELMAN, 49; WIDE, WAHL- GREN, 83; ÖHLIN, 168;	
Reseunderstöd: HÄGG, MÖLLER, BIRGER, BÜLOW, WESTERGREN, LÖNNBERG, BRUNANDER	84.
Revisorer: KLASON, MONTELIUS, ZANDER	109.
Skänker till Akademiens bibliotek: 3, 12, 46, 51, 64, 75, 85, 104, 110, 124, 163, 168, 199, 206, 215, 226, 236, 242, 249, 262, 266, 281, 287, 316, 324, 335, 342.	
> Berzelius-museet: 168, 220.	
> Riksmuseum: 2, 51, 85, 110, 262.	
Uppmuntran för instrumentmakare: P. M. SÖRENSEN, G. SÖRENSEN	84.
Utlåtanden: LINDHAGEN och SKOGMAN, 83; byggnadskommittén, 205; HASSEL- BERG och ARRHENIUS, biblioteksinspektionen och bibliotekarien, 219; LINDHAGEN, DUNÉR, ROSÉN och HASSELBERG; NATHORST, SJÖGREN och DAHLGREN; LINDHAGEN och HASSELBERG, 285; LOVÉN och HENSCHEN, 340.	
Utnämningar: SJÖSTEDT, 2; HAMBERG, STOLPE, 286; EKHOLM, WESTMAN 339.	
WALLMARKSKA belöningen: PALMÉR	286.
Årsberättelse, Sekreterarens	125.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 59.

1902.

N:o 1.

Onsdagen den 8 januari.

INNEHÅLL.

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 1.
BRODÉN, T., Ueber lineare homogene Differentialgleichungen mit gegebenen Verzweigungsstellen und gegebener Monodromiegruppe	» 5.
BERGENDAL, D., Einige Bemerkungen über <i>Carinoma Armandi OUDEMANS</i>	» 13.
ODHNER, TH., Trematoden aus Reptilien	» 19.
Skänker	sidd. 2—4, 12, 46.

Tillkännagafs, att Akademiens inländske ledamöter TORD TEODOR TAMERLAN THORELL och f. d. professorn vid Karolinska institutet AXEL KEY med döden afgått.

Anmäldes, att reseberättelse blifvit afgifven af Fil. kandidaten NILS HOLMGREN.

Den Edlundska belöningen fördelades mellan lektorn SVEN FORSLING i Nyköping och lektorn HENRIK PETRINI i Vexjö på så sätt, att den förre erhöll 929 kronor 68 öre dels för inköp af en fotografisk atlas öfver solspektrum och en mättningsapparat för fotografiska spektralbilder, dels för fortsatta studier vid Akademiens fysiska institut samt den senare 500 kronor såsom belöning för hans i Öfversigten af Akademiens förhandlingar införda uppsatser i potentialteorien.

Understöd från den Hahnska donationen anvisades med 300 kronor till docenten C. VIMAN i Upsala för studier öfver Bottenhafvets silurområde, med 500 kr. till fl. licentiaten GABRIEL ANDERSSON för undersökning af de yttre könsorganens embryonala utveckling hos däggdjuren samt med 150 kronor till medic. kandidaten P. BERGMAN för anställande af undersökningar öfver

toxinbildningar i och toxinutsöndringar ur däggdjursorganismen.

Till Berzeliansk stipendiat för åren 1902—1904 utsågs docenten i kemi vid Upsala universitet DANIEL STRÖMHOLM samt till inspektor för detta stipendium Herr CLEVE.

Till professor och intendent för det Naturhistoriska Riksmuseets entomologiska afdelning kallade och antog Akademien assistenten vid Statens Entomologiska Anstalt, t. f. intendenten fil. doktor BROR YNGVE SJÖSTEDT.

På tillstyrkan af kommitterade antogos följande inlämnade afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter:

i Bihanget till Handlingarne: 1:o »Die Flechten der ersten Regnellischen Expedition. 2. Die Gattung *Rinodina* (ACHAR.) af amanuensen dr. G. O. MALME; 2:o »Spiders collected in Aysen valley in South Chile by Mr P. DUSÉN» af fil. kandidat ALBERT TULLGREN; 3:o »Etudes sur les Collemboles du Nord» af adjunkten H. SCHÖTT;

i Öfversigten: de i innehållsförteckningen uppräknade tre uppsatserna.

Följande skänker anmälades:

Till Riksmuseum.

1:o Af docenten vid Upsala universitet fil. doktor L. A. JÄGER-SKIÖLD en större samling af lägre evertebrerade djur, hufvudsakligen från Röda hafvet och Hvita Nilen, som hopbragts af gifvaren samt af fil. kandidaterna TH. ODHNER och I. TRÄGÅRDH uuder deras resa till dessa trakter förlidet år.

2:o Af professorn och intendenten för Riksmuseets mineralogiska afdelning HJ. SJÖGREN hela hans stora och dyrbara, till omkring 120,000 kronor värderade samling af mineralier enligt följande gåfvobref:

»Till Naturhistoriska Riksmuseum öfverlämnar jag härmed såsom gåfva hela min mineralsamling, bestående af cirka 6,500 stuffer, jämte dertill hörande skåp, kataloger m. m. enligt följande bestämmelser:

Samlingen införlifvas med Riksmusei geologiska och mineralogiska afdelning, dock så, att de till densamma hörande stofferna icke må inrangeras i Museets allmänna systematiska samling, utan skall den i stället allt framgent bibehållas såsom särskild samling, ordnad efter den princip, enligt hvilken den nu är uppställd, nämligen mineralfyndorternas geologiska karaktär. I samlingens ordnande och upp-

ställning må dock gifvaren, så länge han är intendent vid Museum, vidtaga smärre ändringar.

Stockholm den 1 januari 1902.

HJ. SJÖGREN.

Till Akademien

En af fröken IDA NILSON modellerad byst i gips af hennes fader professor SVEN NILSON, skänkt af henne och hennes broder godsegaren LORENTZ NILSON.

Till K. Akademiens Bibliotek.

Adelaide. *Observatory.*

Meteorological observations. Year 1898. Fol.

Athènes. *Observatoire National.*

Annales. T. 3. 1901. 4:o.

Baltimore. *Johns Hopkins University.*

American chemical journal. Vol. 25 (1901): N:o 6; 26 (1901): 1-3. 8:o.

American journal of mathematics. Vol. 23 (1901): N. 3-4. 4:o.

The American journal of philology. Vol. 22 (1901): 1. 8:o

Studies in historical and political science. Ser. 19: N:o 6-9. 1901. 8:o.

Bern. *Bibliothek der Schweizerische Naturforschende Gesellschaft.*

Verhandlungen. Jahresversamml. 82 (Neuchatel, 1899); 83 (Thusis, 1900). 8:o.

Compte rendu des travaux de la soc. Sess. 82 (Neuchatel, 1899); 83 (Thusis, 1900). 8:o.

— *Naturforschende Gesellschaft.*

Mitteilungen. Jahr 1900. 8:o.

Boston. *American academy of arts and sciences.*

Proceedings. Vol. 37 (1901/1902): N:o 1-3. 8:o.

Bremen. *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Abhandlungen. Bd 27: H. 1. 1901. 8:o.

Bruxelles. *Académie Royale de Belgique.*

Classe des lettres . . . Bulletin. 1901: N:o 9-10. 8:o.

» des sciences. Bulletin. 1901: N:o 9-10. 8:o.

— *Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie.*

Bulletin. T. 15 (1898): Fasc. 3. 8:o.

Budapest. *Ungarische Ornithologische Centrale.*

Aquila. Zeitschrift f. Ornithologie. Jahrg. 8 (1901): 3-4. 8:o.

Buitenzorg. *Jardin Botanique.*

Verslag. Jaar 1900. 8:o.

Calcutta. *Royal Botanic Garden.*

Annals. Vol. 9: P. 1. 1901. 4:o.

— *Geological survey of India.*

Memoirs. Vol. 32: P. 2; 33: 2. 1901. 8:o.

Cambridge, Mass. *Astronomical Observatory of Harvard College.*

Annals. Vol. 28: P. 2. 1901. 4:o.

Chambésy. *Herbier Boissier.*

Bulletin. (2) T. 1 (1901): N:o 12; 2 (1902): 1. 8:o.

Chapel Hill. *Elisha Mitchell scientific society.*

Journal. Year 17 (1901): P. 1. 8:o.

Durban. *Natal Observatory.*

Report of the government astronomer. Year 1900. Fol.

Edinburgh. *Scottish meteorological society.*

Journal. N.S. Vol. 6: Nos 70—79. 1901. 8:o.

Firenze. *Società entomologica Italiana.*

Bullettino. Anno 33 (1901): Trim. 2. 8:o.

Hamburg. *Verein für naturwissenschaftliche Unterhaltung.*

Verhandlungen. Bd 11 (1898—1900). 8:o.

Harlem. *Koloniaal Museum.*

Bulletin. N:o 25 (1901). 8:o.

— *Société Hollandaise des sciences.*

Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. (2) T. 4:

Livr. 4—5. 1901. 8:o.

Helsingfors. *Statistiska centralbyrån.*

Bidrag till Finlands officiella statistik. VI: 32. 1901. 8:o.

Kharkow. *Université Impériale.*

Anuales. 1901: Kn. 4. 8:o.

Kjöbenhavn. *K. danske Videnskabernes Selskab.*

Oversigt over Forhandlingar. 1901: No. 4—5. 8:o.

Skrifter. Naturvid.-math. Afd. (6) T. 9: 7; 11: 1. 1901. 4:o.

Krakau. *Académie des sciences.*

Bulletin international. Cl. des sc. math. et nat. 1901: N:r 7. 8:o.

Krakau. *Académie des sciences.*

Katalog literatury naukowej Polskiej. T. 1 (1901): zeszyt. 3. 8:o.

Kristiania. *Universitets-Bibliotheket.*

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd 39: H. 4. 1901. 8:o.

— *Videnskabs-Selskabet.*

Forhandlingar. Aar 1900. 8:o.

Skrifter. Math.-naturvid. Klasse. 1900: N:o 5—7. 8:o.

Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*

Bulletin. (4) Vol. 37: No. 141. 1901. 8:o.

Lawrence. *Kansas University.*

Kansas university quarterly. Vol. 10 (1901): N:o 2. 8:o.

Leeds. *Philosophical and literary society.*

Annual report. 81 (1900/01). 8:o.

Leipzig. *Naturforschende Gesellschaft.*

Sitzungsberichte. Jahrg. 26—27 (1899/1900). 8:o.

Lille. *Université.*

Travaux & mémoires. T. 10: Mém. 28. 1901. 8:o.

Lima. *Sociedad geográfica.*

Boletín. Año 10: Trim. 2—4. 1900—1901. 8:o.

(Forts. & sid. 12.)

Über lineare homogene Differentialgleichungen mit gegebenen Verzweigungsstellen und gegebener Monodromiegruppe.

Von T. BRODÉN.

(Mitgetheilt am 8 Januar durch C. F. E. BJÖRLING.)

1. Die folgenden Seiten enthalten eine vorläufige Mittheilung über eine vom Verf. angestellte Untersuchung, deren ausführliche Darstellung an anderer Stelle erfolgen wird. Hier werden nur die Resultate nebst kurzen Andeutungen über den Beweisgang mitgetheilt.

Es handelt sich um eine Aufgabe, welche als eine Verallgemeinerung des bekannten RIEMANN'schen Problems in der Theorie der linearen Differentialgleichungen bezeichnet werden kann. Es seien σ im Endlichen liegende x -Stellen

$$e_1, e_2 \dots e_\sigma$$

gegeben, und andererseits σ lineare homogene Substitutionen in n Veränderlichen:

$$A_1, A_2 \dots A_\sigma.$$

Dann sollen n monogene Functionen von x ,

$$y_1, y_2 \dots y_n$$

bestimmt werden, welche beim Überschreiten, in positiver Richtung, von σ die x -Ebene zerschneidenden Schnitten $(e_1 \infty)$, $(e_2 \infty) \dots (e_\sigma \infty)$ bez. die Substitutionen $A_1, A_2 \dots A_\sigma$ er-

leiden, sonst aber im Endlichen sich überall wie rationale Functionen verhalten (meromorph sind).

Dies Problem geht in das RIEMANN'sche über, wenn man die Forderungen hinzufügt, dass die n Functionen an den Stellen $e_1 \dots e_\sigma$ sowie auch für $e_{\sigma+1} = \infty$ den »Charakter der Bestimmtheit« haben sollen, und überdies an allen von den e_i verschiedenen Stellen sich wie ganze rationale Functionen verhalten (holomorph sind).

Wenn Functionen überhaupt existiren, welche den Forderungen der erstgenannten Aufgabe genügen, so bilden sie ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung n ter Ordnung mit eindeutigen Coefficienten. Im RIEMANN'schen Falle sind diese Coefficienten rational, und überdies gehört die Differentialgleichung »zur FUCHS'schen Klasse«.

Die Lösbarkeit des RIEMANN'schen Problems ist bisher nur unter sehr wesentlichen Beschränkungen dargethan worden, indem Herr L. SCHLESINGER zeigte, dass die Aufgabe immer Lösungen besitzt, wenn die Wurzeln der zu den Substitutionen $A_1 \dots A_\sigma$ und der Umlaufssubstitution $A_{\sigma+1}$ gehörenden Fundamentalgleichungen durchgehends den absoluten Betrag Eins haben ¹⁾ (welche Bedingungen Herr SCHLESINGER kurz als die »Convergenzbedingungen« bezeichnet, da sein Beweis darauf beruht, dass im genannten Falle gewisse POINCARÉ'sche ξ -Reihen convergiren). Die jetzt fragliche Untersuchung bezieht sich, jedenfalls in erster Hand, nicht auf das ursprüngliche RIEMANN'sche Problem, sondern auf die erwähnte, weniger verlangende Aufgabe, und resultirt in der That darin, dass die Frage nach der Lösbarkeit (bez. der Lösung) dieser Aufgabe (bei beliebigem n) sich auf eine gewisse, unten näher angegebene Frage für den Fall $n = 2$ reduciren lässt.

2. Für σ loxodromische oder hyperbolische lineare Substitutionen

$$\frac{z' - h_i}{z' - k_i} = p_i^2 \frac{z - h_i}{z - k_i} \quad (i = 1, 2 \dots \sigma),$$

¹⁾ Man sehe Handbuch d. Theorie d. lin. Diff.-Gl. II, 2, p. 382 ff., oder auch CRELLE's Journal Bd. 123, p. 138 ff.

welche wir auch kurz mit

$$B_1, B_2 \dots B_\sigma$$

bezeichnen, seien die 2σ Fixpunkte h_i, k_i vorgeschrieben, endlich und von einander getrennt, dagegen die (reellen oder imaginären) Multiplicatoren p_i^2 vorläufig unbestimmt, nur alle $|p_i| > 1$. Diese Substitutionen bestimmen als Fundamentalsubstitutionen eine gewisse Gruppe Γ . Wenn die Grössen $|p_i|$ sämtlich oberhalb einer gewissen Grenze liegen, so ist die Gruppe Γ in der z -Ebene eigentlich discontinuierlich, und es gilt dann überdies, dass zwischen den B_i keine Relationen bestehen, so dass also jede von der Identität verschiedene Γ -Substitution V_ν , von »identischen Umformungen« abgesehen, nur in einer Weise in der Form

$$V_\nu \equiv B_{i_n}^{\lambda_n} B_{i_{n-1}}^{\lambda_{n-1}} \dots B_{i_1}^{\lambda_1}$$

darstellbar ist, wo i_1, \dots, i_n ganze positive Zahlen $\leq \sigma$, $\lambda_1 \dots \lambda_n$ ganze Zahlen ≥ 0 . Die also für jede bestimmte Substitution V_ν ,

unzweideutig bestimmte Summe $\sum_1^n |\lambda_k|$ sei als »Index« derselben

bezeichnet: $\sum |\lambda_k| = \text{Ind } V_\nu$.¹⁾ Über die 2σ Fixpunkte h_i, k_i sei nun auch angenommen, dass keiner mit dem Nullpunkte der z -Ebene zusammenfällt (niemals $h_i = 0$ oder $k_i = 0$). Wenn dann q eine beliebig grosse positive Zahl bedeutet, so lässt sich immer eine andere positive Grösse P so bestimmen, dass sobald für alle i ($= 1, 2 \dots \sigma$) $|p_i| > P$ ist, die vier Coefficienten einer jeden von der Identität verschiedenen Γ -Substitution

$$V_\nu = \left\{ z', \frac{a_\nu z + b_\nu}{c_\nu z + d_\nu} \right\}$$

dem absoluten Betrage nach je grösser als

$$q^{\text{Ind } V_\nu}$$

¹⁾ Vgl. SCHLESINGER, Handbuch etc. II, 2, p. 270, 350.

sind, wenn die Substitution in unimodularer Form geschrieben wird ($a, d, -b, c, = 1$).

Dieser, wie es scheint, aus mehreren Gründen bemerkenswerthe Satz ¹⁾ (dessen Darlegung wir in dieser Mittheilung übergehen) wird in unserer fraglichen Untersuchung als Hilfssatz benutzt, wobei jedoch eine etwas modificirte Form desselben vorausgesetzt wird. Die nicht-homogene Gruppe Γ ist, jedenfalls für hinreichend grosse $|p_i|$ isomorph spaltbar. Diese Spaltbarkeit vorausgesetzt, denken wir uns dieselbe wirklich ausgeführt, indem die unimodular geschriebenen Substitutionen B_i ,

$$B_i = \left\{ z', \frac{L_i z + M_i}{N_i z + P_i} \right\}, \quad L_i P_i - M_i N_i = 1,$$

durch die homogenen Substitutionen

$$C_i \equiv \left\{ t', \frac{L_i t + M_i v}{N_i t + P_i v} \right\}$$

ersetzt werden. Die entsprechende homogene, mit Γ holodrisch isomorphe Gruppe heisse \mathcal{A} . Der genannte Satz lässt sich so modificiren, dass man statt die nicht-homogene Gruppe Γ zu betrachten und dabei unimodulare Form der Substitutionen voraussetzen, die homogene unimodulare Gruppe \mathcal{A} einführt, sonst aber den Wortlaut des Satzes unverändert lässt.

3. Jetzt kehren wir zur Hauptfrage zurück und bezeichnen mit Θ die gegebene »Monodromiegruppe« der gesuchten Differentialgleichung, d. h. die Gruppe, deren Fundamentalsubstitutionen die A_i sind. Man betrachte eine »normale FUCHS'sche Differentialgleichung« zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = q(x)y$$

¹⁾ Ich habe übrigens denselben, wenn auch nicht in ganz expliciter Form, auch bei BURNSIDE gefunden, in einer Arbeit, wo er die Convergenz der POINCARÉ'schen Thetareihen zum Falle $m = 1$ [Reihen (-2) -ter Dimension] auszudehnen sucht, *Proceed. of the London Math. Soc.* XXIII, p. 55 ff. Diese Stelle der BURNSIDE'schen Arbeit wird auch in FRICK-KLEIN's Vorles. üb. automorphe Funct. II, 1, p. 166; hervorgehoben.

für welche die endlichen singulären Stellen eben die gegebenen $e_1 \dots e_\sigma$ sind, und die zugehörigen Fundamentalsubstitutionen

$$A_1, A_2 \dots A_\sigma$$

der für einen gewissen Integralquotienten η geltenden projectiven Monodromiegruppe \mathfrak{S} sämtlich *parabolisch* sind, sowie auch die Umlaufssubstitution

$$A_{\sigma+1} = A_1^{-1} A_2^{-1} \dots A_\sigma^{-1}$$

(so dass also auch $e_{\sigma+1} = \infty$ Verzweigungsstelle ist). Bekanntlich existirt es wirklich immer eine solche Differentialgleichung.¹⁾ Andererseits wähle man eine Gruppe \mathcal{A} mit den oben beschriebenen Eigenschaften (vorläufig nur von der Forderung hinsichtlich einer gegebenen Grösse q abgesehen). Da zwischen den Fundamentalsubstitutionen $C_1 \dots C_\sigma$ derselben keine Relationen bestehen, und dies ebenso für die Fundamentalsubstitutionen $A_1 \dots A_\sigma$ der (nicht homogenen) FUCHS'schen Gruppe \mathfrak{S} gilt, so sind die beiden Gruppen \mathfrak{S} und \mathcal{A} holodrisch isomorph, u. zw. so, dass A_i mit C_i ($i = 1, \dots, \sigma$) correspondirt.

Endlich *postuliren* wir die Existenz zweier Functionen $u(x)$ und $v(x)$, welche beim Überschreiten der Schnitte $(e_1 \infty), (e_2 \infty) \dots (e_\sigma \infty)$ die Substitutionen $C_1, C_2 \dots C_\sigma$ erfahren, sonst aber im Endlichen meromorph sind.²⁾ Wenn man von diesen eindeutigen Functionen der Lage in der zerschnittenen x -Ebene zu den entsprechenden, der unzerschnittenen x -Ebene angehörigen unendlich vieldeutigen Functionen $u(x)$ und $v(x)$ übergeht, so werden diese u und v für $|\eta| < 1$, wie sich leicht nachweisen lässt, eindeutige Functionen von η .

¹⁾ Ganz wie bei dem von Herrn SCHLESINGER behandelten Specialfall des RIEMANN'schen Problems, wäre es hier hinreichend, die leichter beweisbare Existenz einer der genannten Gleichung »subordinirten« Diff.-Gleichung vorauszusetzen (vgl. Handbuch etc. II, 2, p. 383–84). Der Kürze wegen benutzen wir uns hier von der Existenz einer Diff.-Gl. der erwähnten Art.

²⁾ Dies »Postuliren« bedeutet natürlich nicht, dass die Existenz solcher Functionen selbstklar ist, sondern nur dass wir von jetzt ab unter der Voraussetzung räsonniren, dass es solche Functionen giebt.

Zu bemerken ist noch, dass die Gruppen Θ und \mathcal{J} in der Weise isomorph sind, dass jedem \mathcal{J} -Substitution eine völlig bestimmte Θ -Substitution entspricht (obgleich nicht nothwendig umgekehrt).

Dies alles gesetzt, ordne man nach irgend einer Regel die (abzählbar unendlich vielen) \mathcal{J} -Substitutionen in eine einfache Reihe

$$S_0\eta, S_2\eta, \dots S_r\eta, \dots,$$

bezeichne die entsprechenden Θ -Substitutionen mit

$$T_0, T_1 \dots T_r \dots$$

und bilde n Reihen der Form

$$\chi_i(\eta) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ T_r^{-1} \frac{H_i(S_r\eta)}{\varphi(S_r\eta)} \right\} \left(\frac{d(S_r\eta)}{d\eta} \right)^m,$$

wo m eine ganze Zahl ≥ 2 ist, die H_i rationale Functionen, welche dieselben Bedingungen, wie in den POINCARÉ'schen Θ - und ξ -Reihen, erfüllen sollen. Hier ist jetzt jedes Glied eine eindeutig bestimmte Grösse. Und es lässt sich zeigen, dass sobald die absoluten Beträge der Grössen p_i (welche die Gruppe \mathcal{A} näher bestimmen) oberhalb einer von den bestimmenden Elementen der Gruppe Θ abhängigen Grenze P liegen, die n Reihen χ_i für $|\eta| < 1$ convergiren, nur mit Ausnahme für eine η -Menge, welche im Inneren des Kreises $|\eta| = 1$ keine Häufungsstellen hat. Von wesentlicher Bedeutung beim Beweise hierfür ist einerseits der oben genannte Hilfssatz, andererseits die Eigenschaft der Gruppe Γ (durch deren Spaltung \mathcal{A} entsteht) in der x -Ebene eigentlich discontinuirlich zu sein. Wenn man endlich die Reihen χ_i durch zugehörige POINCARÉ'sche Θ -Reihen dividirt, so bilden die n Quotienten, als Functionen von x betrachtet, ein System von Functionen $y_1 \dots y_n$ mit den anfangs verlangten Eigenschaften (oder richtiger: man erhält die zur unzerschnittenen x -Ebene gehörenden unendlich vieldeutigen Functionen, welche den verlangten, zur zerschnittenen Ebene gehörenden eindeutigen y_i entsprechen) ganz wie bei den ξ -Reihen in dem Falle, wo die-

selben convergiren. — Dagegen lässt sich, so viel ich habe finden können, der Charakter der Bestimmtheit an den Stellen e_i jetzt nicht nachweisen, auch wenn man für die Functionen $u(x)$ und $v(x)$ diese Eigenschaft voraussetzt.

4. Wie aus der obigen Darstellung hervorgeht, lässt sich das Resultat der in Frage stehenden Untersuchung in genauer Fassung folgendermassen aussprechen. Die x -Stellen $e_1, e_2 \dots e_\sigma$ seien gegeben. Es kann gefragt werden, ob es möglich ist, die 2σ Grössen h_i, k_i so zu bestimmen, dass, wenn nachher eine beliebige grosse positive Zahl P gewählt wird, immer ein Werthsystem $p_1, p_2 \dots p_\sigma$ mit

$$|p_1| > P, |p_2| > P \dots |p_\sigma| > P$$

überhaupt gefunden werden kann, welches im Verein mit den h_i, k_i Substitutionen C_i geben, für welche zwei Functionen $u(x)$ und $v(x)$ mit den genannten Eigenschaften existiren, also zwei Functionen, welche beim Überschreiten der Schnitte $(e_1 \infty), (e_2 \infty) \dots (e_\sigma \infty)$ bez. die linearen homogenen Substitutionen in zwei Veränderlichen $C_1, C_2 \dots C_\sigma$ erleiden, sonst aber meromorph sind. Wenn diese verhältnissmässig sehr bescheidene Existenzfrage im bejahenden Sinne zu beantworten ist (was wir hier nicht bewiesen haben), dann gilt dasselbe — dies ist unser Resultat — auch für die in der Einleitung formulirte Existenzfrage in ihrer vollen Allgemeinheit (also bei beliebigem $n \geq 2$).

An dies Resultat können verschiedene Bemerkungen geknüpft werden, welche wir jedoch für die ausführlichere Mittheilung ersparen.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 4.)

- Liverpool.** *Biological society.*
 Proceedings & transactions. Vol. 15 (1900/01). 8:o.
- London.** *Geologists' Association.*
 Proceedings. Vol. 17 (1901): P. 5. 8:o.
 — *Royal Institution of Great Britain.*
 Proceedings. Vol. 16: P. 2. 1901. 8:o.
 — *Meteorological office.*
 Meteorological observations at stations of the second order. 1898.
 4:o.
- *Royal Astronomical society.*
 Monthly notices. Vol. 62 (1901/02): N:o 1. 8:o.
- *Chemical society.*
 Journal. Vols. 81—82 (1902): 1. 8:o.
- *R. Microscopical Society.*
 Journal. 1901: P. 6. 8:o.
- *Royal society.*
 Proceedings. Vol. 69 (1901/02): No 453. 8:o.
- London, Ontario.** *Entomological society.*
 The Canadian entomologist. Vol. 33 (1901): No 12. 8:o.
- Manchester.** *Literary and philosophical society.*
 Memoirs and proceedings. Vol. 46 (1901/02): P. 1. 8:o.
- Mexico.** *Observatorio meteorologico central.*
 Boletín de agricultura, minería é industrias. Año 10 (1900/01): Núm.
 11—12. 8:o.
- Napoli.** *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
 Rendiconto. (3) Vol. 7 (1901): Fasc. 8—11. 8:o.
- Ottawa.** *Field-naturalists' club.*
 The Ottawa Naturalist. Vol. 15 (1901): N:o 9. 8:o.
 — *Geological survey of Canada.*
 MACOUN, J., Catalogue of Canadian birds. P. 1. 1900. 8:o.
- Palermo.** *Circolo matematico.*
 Rendiconti. T. 15 (1901): Fasc. 5—6. 8:o.
- Pará.** *Museu Paraense de historia natural e ethnographia.*
 Boletim. Vol. 3 (1901): N:o 2. 8:o.
- Paris.** *Société astronomique de France.*
 Bulletin. 1901: 12. 8:o.
 — *Société de géographie.*
 La Géographie. Année 1901: N:o 6, 12. 8:o.
- Philadelphia.** *University of Pennsylvania.*
 Publications. Vol. 1: P. 3. 1901. 4:o.
- Portici.** *La Regia Scuola superiore de agricoltura.*
 Annali. (2) Vol. 2. 1901. 8:o.

(Forts. á sid. 46.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1902. N:o 1.
Stockholm.

Einige Bemerkungen über *Carinoma Armandi* OUDEMANS (sp. Mc INT.).

Von D. BERGENDAL.

(Vorläufige Notiz.)

(Mitgetheilt am 8 Januar durch HJALMAR THÉEL.)

Seit einigen Jahren mit Studien über die nordischen Nemertinen, unter denen mich ganz besonders die Palæonemertinen interessierten, beschäftigt, habe ich auch Veranlassung gefunden, mich über die systematische Stellung und Bedeutung der Gattung *Carinoma* auszusprechen. Es war mir deshalb sehr wünschenswerth diese wunderbare Nemertine, welche uns hauptsächlich durch MC INTOSH, aber auch durch OUDEMANS, HUBRECHT und BÜRGER bekannt geworden ist, durch eigene Beobachtung kennen zu lernen. Ich erhielt nämlich von Mr R. C. PUNNETT in St Andrews einige wohl conservierten Exemplare jenes bisher wenig untersuchten Thieres.¹⁾ In der Hauptsache kann ich nun sowohl die Beobachtungen der vorigen Untersucher bestätigen wie auch meine früher hervorgestellte Anschauung aufrecht halten, dass jene Nemertine eine Palæonemertine ist, deren Abweichung sehr wenig nach der Richtung der Metanemertinen geht, und deren Organisation so ausserordentlich geringe Verwandtschaft mit der Gattung *Cephalothrix* offenbart, dass es erstens unmöglich erscheint diese beiden Gattungen in eine Familie zusammen zu

¹⁾ Ich sage auch hier Mr PUNNETT meinen besten Dank für diese kostbare Sendung.

stellen, und zweitens wenig wahrscheinlich sei, dass die beiden Gattungen zu einer besonderen Hauptabtheilung der Nemertinen vereinigt werden können.

Die vielen Sonderbarkeiten im Bau der *Carinoma* haben mich ausserdem an und für sich sehr interessiert, und ich kann hier wohl noch einen sehr merkwürdigen Bauzug vorlegen.

Schon durch HUBRECHT wissen wir, dass im Epithel von *Carinoma* (oder wenigstens ausserhalb der Schicht der Körperwand, welche mit der Grundsicht der übrigen Nemertinen verglichen werden muss) Muskelfasern entwickelt sind, und BÜRGER hat hierüber genauere Mittheilung geliefert. Er findet in der vorderen Körperregion sowohl Längs- wie Ringfasern, die im Epithel eine mittlere Zone bilden, und die unter sich so angeordnet sind, dass die äussere Schicht von den ringförmig, die innere von den längs verlaufenden Fasern gebildet wird. Weiter hinten, in der Nephridialregion, finden sich nur Längsfibrillen, und im mittleren und hinteren Körperabschnitt scheint nach BÜRGER (Monographie S. 216) die Musculatur im Epithel zu verschwinden.¹⁾

Diese eigenthümliche Musculatur habe ich nun auch gefunden und studiert. Aber ich möchte sagen: Eine fast noch merkwürdigere Muskelanordnung findet sich im Epithel des Vorderkörpers dieser merkwürdigen Nemertine. Zuerst mag ich doch die früher bekannten Faserschichten mit einigen Worten berühren. Sie sind häufig sehr unregelmässig angeordnet. Wohl findet man im Vorderkörper hinter dem Kopfe eine ziemlich regelmässige Vertheilung, so dass man passend von einer äusseren Ringfaserschicht und einer inneren Längsfaserschicht sprechen kann. Im Kopfe kann auch dieselbe Anordnung hervortreten, aber man findet hier ebenso oft auch eine vollständige Verflechtung der Längs- und Ringfasern. Längsfasern finden sich auch nicht selten unmittelbar unter der Kernzone des Epithels. Ausser-

¹⁾ Anders lautet die Angabe S. 534. Dort lesen wir nämlich: »Die epitheliale Muskelschicht ist am mächtigsten in der Nephridialregion, in der mittleren Körpergegend ist sie sehr fein, nämlich einschichtig geworden: in dieser Stärke ist sie aber auch noch im Schwanzende zu constatiren».

dem laufen viele Ringfasern so schräge, dass man mit vollem Rechte von Diagonalfasern sprechen kann. Und in der Gehirngegend finde ich auf einer Serie: 1) *äussere Ringfasern*, unter denen einzelne Längsfasern verlaufen, 2) *Längsfasern*, mit denen sich einige Ringfasern verflechten und 3) eine sehr deutliche, aus *Ring-* (und *Diagonal*) *fasern* bestehende innere Schicht. Die letztere ist in dieser Region sehr viel mächtiger als die von Längsfasern fast verdrängte äussere Ringfaserzone. Sie liegt auch ganz tief im Epithel, und ihre inneren Fasern laufen mehrmals zwischen den obersten Drüsenschläuchen der Packetdrüsenzellen. Unter (d. h. innerhalb) dieser Ringfaserschicht finden sich keine oder nur sehr vereinzelt Längsfasern.

Wenn nun aber schon dieser unregelmässige Verlauf der Muskelfasern eine starke Faserverflechtung verursacht, wird dieselbe jedoch erheblich verstärkt durch das Vorkommen von radiären oder verticalen Muskelfasern. Die im Kopfe vorhandenen, zahlreichen dorsoventralen und horizontalen Faserbündel setzen sich nämlich nicht alle an der Grundsicht an, sondern viele sowohl Fasern wie Faserbündel durchbohren die Grundsicht und strahlen in das Epithel hinaus. Ein solches Aussetzen der Muskelfasern des Innerkörpers in das Epithel ist besonders deutlich im Kopfe vor und in der Gehirngegend, aber noch recht weit hinter dem Munde können solche radiäre Fasern aufgefunden werden. Es ist schwer dieses Verhältniss ohne Abbildungen deutlich zu beschreiben. Es dürfte das beste sein als Beispiel einen Querschnitt genauer zu schildern. Ich wähle für diese Beschreibung einen Schnitt kurz vor der dorsalen Gehirncommissur, wo auf der einen Seite ein ziemlich mächtiger Gehirnfaserkern vorhanden ist. Auf der anderen Seite finden sich nur kleine, noch getrennte Faserkerne, die wohl besser als Wurzeln von vorderen Gehirnnerven aufgefasst werden mögen.

In der Mitte des Querschnittes sehen wir das mit einem kreuzähnlichen Lumen versehene Rhynchodæum, dessen Epithelwand zunächst von bedeutenden Längfasermassen umgeben wird, welche von dorsoventralen Muskelzügen in Bündel zer-

theilt werden; oben und unten findet sich nur eine geringe Anzahl von Längfasern. Dort sieht man eine ziemlich mächtige Schicht von querlaufenden Fasern, die gewiss einen Anfang der typischen »äusseren Ringmuskelschicht« der Nemertinen darstellen müssen, welche Schicht aber an den Seitentheilen beinahe offen ist. So gering ist nämlich die Zahl der Fasern, welche dort die dorsale und die ventrale Faserschicht in Verbindung setzen. Dagegen wird eine solche hergestellt durch die vielen dorsoventralen Faserbündel, welche sowohl an der äusseren wie an der inneren Seite der spaltförmigen Blutlacune hervortreten.

Die erwähnte äussere Ringfaserschicht wird nach aussen zunächst von einer deutlichen Lamelle von grundsichtähnlicher Natur begrenzt. Ausserhalb derselben liegt dorsal und ventral eine sehr mächtige Schicht von Drüsenzellen, unter denen Längfasern und Bündel in reichlicher Menge aber meistens ziemlich locker vertheilt sind. In den Seitentheilen des Schnittes sind die Längfasern, wenn auch die Schicht selbst viel dünner ist, jedoch dichter gelagert. Auf der einen Seite, wo schon ein Faserkern vorhanden war, sieht man ausserhalb desselben und, wie es mir scheint, in die innere Schicht der dicken Grundsicht eingesprengt, einige Längfaserbündel.

Die ganze jetzt geschilderte Zone zwischen der Grundsicht und der äusseren Ringmuskelschicht wird nun von einer grosser Anzahl radiärer Faserbündel durchsetzt. Diese Radiärbündel bilden zum Theil die direkte Fortsetzung der oben genannten dorsoventralen Faserzügen, welche sowohl zwischen dem Rhynchodæum und den lateralen Blutlacunen verlaufen, wie sie sich auch ausserhalb der letztgenannten vorfinden. Zum Theil sind sie auch laterale Fortsätze der querliegenden Faserschichten, welche wir als den Anfang der äusseren (typischen) Ringschicht deuteten. Sie scheinen auch viele Nervenfasern zu enthalten.

Diese eigenthümliche Anordnung der Faserbündel hat schon Mo INTOSH zum Theil richtig dargestellt. Er lässt aber dieselben an und in der Grundsicht aufhören. Dies ist nun keineswegs der Fall. Vielmehr dürften sogar die allermeisten dieser

Faserbündel die Grundschrift durchsetzen und wenigstens eine grosse Anzahl der Muskelfasern ins Epithel auslaufen. Dort laufen einige mehr zusammen, andere trennen sich aus einander und verteilen sich im Epithel. Viele Fasern können fast bis an die Kernzone der Epithelzellen verfolgt werden. Sowohl während ihres Verlaufes in der Drüsenzzone (»äusseren Längsmuskelschicht«) an der inneren Seite der Grundschrift wie in der Basalzzone des Epithels sind die Faserbündel von deutlichen Bindegewebs- oder Grundschriftscheidern umhüllt. Weiter nach aussen im Epithel, wo die Fasern getrennt und zum Theil nach verschiedenen Richtungen laufen, können solche spezielle Bindegewebscheiden nicht aufgewiesen werden.

Es liegt nun ohne weiteres auf der Hand, dass durch den hier dargelegten Lauf der Muskelfasern sowohl der Bau des Epithels noch viel mehr komplizirt wie auch die Verbindung des Epithels mit dem Innenkörper bedeutend verstärkt wird. Hierdurch wird es auch leichter zu verstehen, wie das Epithel wirkliche eigene Muskelschichten enthalten könne. Denn in anderem Falle scheint es nicht fast genug mit der inneren Körperwand verbunden zu sein. Bekanntlich wird das Epithel der Nemeriten ziemlich leicht abgelöst. Auf die mögliche systematische Bedeutung dieses Verhältnisses werde ich nicht hier eingehen.

Andere Bauzüge, welche hier in aller Kürze erwähnt werden mögen, sind die folgenden.

Die kräftige *innere Ringmuskelschicht* von *Carinoma* besteht nicht ausschliesslich von Ringfasern sondern zeigt in beinahe ihrer ganzen Ausstreckung auch viele einzelne Längsfasern oder Bündel von solchen, ganz wie es für die hintere Abtheilung der Rhynchocöломwand schon bekannt ist.

Eine *Muskelplatte* zwischen dem Darne und Rhynchocöлом ist deutlich ausgebildet, wenn sie auch ziemlich dünn ist. Das Parenchym scheint stärker entwickelt in der Nephridialregion und in der vorderen Mitteldarmregion als in der hinteren. Dasselbe kommt auch ungewöhnlich zellenarm vor.

Der Mitteldarm besitzt auch bei meinen Exemplaren *sehr tiefe Darmtaschen*, ebenso tiefe wie z. B. bei einem Cerebratulus.

Im Gehirn ist die Ungleichheit zwischen Ganglienzellen von verschiedener Grösse stark ausgebildet.

Sowohl die hier genannten wie auch andere Baueigenthümlichkeiten dieser interessanten Form beabsichtige ich so bald wie möglich ausführlicher in Wort und Bild vorzulegen.

Trematoden aus Reptilien nebst allgemeinen systematischen Bemerkungen.

VON THEODOR ODHNER.

[Mitgetheilt am 8 Januar 1902 durch HJ. THÉEL.]

Im Laufe meiner vorjährigen Reise im Sudan hatte ich mehrmals Gelegenheit die Helminthfauna des Nilkrokodils kennen zu lernen und habe dabei im Darmkanal dieses Tieres ausser dem schon von WEDL dort entdeckten *Diplostomum bifurcatum* (WEDL)¹⁾ auch mehrere für die Wissenschaft neue Trematodenarten gefunden, von denen sechs Distomen sind, während eine der intressanten und bis jetzt nur durch eine einzige Art vertretenen Holostomidengattung *Cyathocotyle* MÜHL. zugehört.

1. *Cyathocotyle fraterna* n. sp.

Diese Art steht dem bisher bekannten Repräsentanten der Gattung, *C. prussica* MÜHL. aus dem Darne von *Harelda glacialis*²⁾, äusserst nahe und ihre specifischen Merkmale sind bald erwähnt. Sie ist von mir nur einmal in zwei Exemplaren in der Mitte des Darmes angetroffen worden.

Die Körperform ist ganz dieselbe wie die der anderen Art, die Dimensionen sind aber ein wenig grösser. Nur das eine

¹⁾ Über die Helminthfauna Aegyptens (S. B. Akad. Wien, mat.-nat. Cl., Bd. XLIV, Jahrg. 1861, p. 477, tab. III, fig. 38) und BRANDES: Die Familie der Holostomiden (Zool. Jahrb., Abth. Syst. etc., Bd. V, 1890. p. 584.

²⁾ MÜHLING: Beitr. z. Kenntniss d. Trematoden (Arch. f. Naturg., Jahrg. 62 Bd 1, p. 270, Tab. 18, Fig. 7 und Tab. 19, Figg. 15—17.)

meiner Exemplare ist völlig reif. Es zeigt im Quetschpräparat eine Länge von 2,25 mm und eine Maximalbreite von 1,75 mm. Wenn man nun auch die Ausdehnung beim Quetschen in Betracht nimmt, so dürfte doch die vorliegende Art als wohl andert-halbmal so gross wie die vorher bekannte, die ca 1 mm lang ist, zu bezeichnen sein. Von den Saugnäpfen ist der vordere, wie auch bei *C. prussica*, grösser als der im Anfang des zweiten Körperviertels gelegene Bauchnapf, aber nur um ein Drittel. Bei dem noch nicht völlig reifen Exemplar, das im Quetschpräparat eine Länge von 1,5 mm hat, sind die Masse 0,16 resp. 0,115 mm. Der Pharynx hat dabei einen Durchmesser von 0,1 mm. Die Hoden haben bei beiden meinen Exemplaren dieselbe Lage, der eine liegt in der vorderen Hälfte des Körpers zwischen dem Pharynx und der Körpermitte und ein wenig nach links aus der Medianlinie verschoben, während der andere im äussersten Hinterende rechts von der Medianlinie zu finden ist. Durch einen bedeutend kürzeren Cirrusbeutel unterscheidet sich die neue Art vielleicht am besten von *C. prussica*. Dieser erstreckt sich nämlich nicht über die Körpermitte nach vorn hinaus. Die in ihm eingeschlossene Samenblase nimmt fast seine ganze Länge ein und zeigt wenigstens keine schärfer markierte Einschnürung. — Der Keimstock ist queroval und liegt auf der rechten Seite unmittelbar vor der Körpermitte. Die Eier messen in der Länge 0,132—0,137 mm und sind somit bedeutend grösser als die der MÜHLING'schen Art. Ihre Breite beträgt ca 0,094 mm. Sie enthalten eine ungefurchte Eizelle nebst einer Anzahl intacter Dotterzellen.

Unter den Distomen des Nilkrokodils mögen zuerst zwei Echinostomen erwähnt werden. Das eine von diesen ist ein ganz typisches *Echinostomum*, das zwar mit dem von POIRIER¹⁾ im Darne von *Crocodylus siamensis* gefundenen *Echinost. crocodili* in Bezug auf die Stachelzahl und die Dimensionen sowohl des ganzen Körpers wie der Eier übereinstimmt, das sich aber doch durch

¹⁾ Trématodes nouveaux ou peu connus (Bull. Soc. Philom., Paris, Sér. 7, Tom. X, 1886, p. 11, tab. I, fig. 4).

die Grösse der Stacheln, die Ausdehnung der Dotterstöcke nach vorn und das Grössenverhältnis zwischen den Saugnapfen dermassen von jener Art unterscheidet, dass eine spezifische Trennung durchaus berechtigt erscheint.

2. *Echinostomum umbonatum* n. sp.

Zwei Exemplare aus dem Vorderdarm eines kleinen Krokodils.

Länge im Quetschpräparat ungefähr 10 mm, Breite im Maximum 1,7 mm, am Bauchnapfe befindlich. Der Stachelkranz des Kragens setzt sich aus 24 derben Stacheln zusammen, welche in *einer*, auf dem Rücken unterbrochenen Reihe angeordnet sind und eine Maximallänge von 0,157 mm aufweisen. Hautbestachelung im Niveau des hinteren Hodens aufhörend. Mundsaugnapf 0,53—0,6 mm, Bauchsaugnapf 1,08 mm im Durchmesser. Letzterer am Ende des ersten Körperdrittels gelegen. Pharynx längsoval, 0,5 mm lang. Darmgabelung ein wenig vor dem Bauchsaugnapfe. Hoden vor der Mitte des Hinterkörpers unmittelbar hinter einander gelegen, längsoval, ganzrandig. Die Dotterstöcke erstrecken sich vom Hinterrande des Bauchsaugnapfes nach hinten und füllen das Feld hinter den Hoden bis auf einen schmalen Mediansaum völlig aus. Eier in reichlicher Anzahl vorhanden, c:a 0,1 mm lang und 0,063 mm breit. Cirrusbeutel vor und neben dem Bauchnapfe, nach hinten zu ihn aber nicht überschreitend und eine relativ grosse, scharf zweigeteilte Samenblase einschliessend.

Ausser dieser Art habe ich zweimal in beschränkter Anzahl im Vorderdarm des Nilkrokodils eine kleinere Echinostomenform angetroffen, die ich beim Einsammeln für jüngere Exemplare der vorigen Art hielt. Bei genauerer Untersuchung hat es sich aber gezeigt, dass eine von jener spezifisch ganz verschiedene Art vorlag, die in ihrem ganzen inneren Baue ein typisches *Echinostomum* ist und auch einen typischen mit einem Stachelkranz bewaffneten Kragen besitzt, die aber dazu auf dem äussersten Vorderende am Saugnapfe eine in der beigegebenen Figur dar-

gestellte sonderbare Bestachelung aufweist, wie sie bisher nicht beschrieben worden ist. Dies veranlasst mich, für die Art eine neue Gattung zu etablieren.

3. *Stephanoprora ornata* n. g. n. sp.

Körperlänge c:a 5 mm bei einer grössten Breite am Bauchnapfe von c:a 0,6 mm. Von hier aus Verjüngung teils nach vorn bis zum Anfang des »Kopfes«, teils nach hinten allmählich bis zum nur 0,27 mm breiten Hinterende. Der Stachelkranz des Kragens wird normal von 26 Stacheln gebildet, die in einer einfachen Reihe und mit einer wenig in die Augen fallenden



Fig. 1. *Stephanoprora ornata* n. g. n. sp. Äusserstes Vorderende von der Bauchseite. dorsalen Unterbrechung so geordnet sind, dass an jeder Seite die 6 hintersten paarweise unmittelbar neben einander sitzen. Ihre Maximallänge beträgt 0,076 mm, und sie nehmen nach hinten an Grösse ab, so dass die hintersten nur ca 0,06 mm lang sind. Die Hautbewaffnung beginnt sowohl auf der Bauch- wie auf der Rückenfläche schon am hinteren Teile des »Kopfes«. Zunächst sind die Reihen aber ganz kurz — nur einige Stacheln an jeder Seite der Medianlinie. Allmählich werden sie länger, bis sie hinter dem »Kopfe« rings um den Körper geschlossen sind. Die Bestachelung der Rückenfläche ist ganz auffallend kräftig und dicht. Hinter dem hinteren Hoden ist der Körper völlig unbewaffnet. Fassen wir nun zuletzt die eigentümliche Bestachelung des Vorderendes näher ins Auge. Auf der *Rückenseite* des

Mundnapfes in der Höhe seiner bauchwärts gerichteten Mündung sitzen *drei* Reihen von triangulären Stacheln. Die vorderste von diesen wird von 5 annähernd gleichgrossen Stacheln gebildet, unter denen der mittelste median sitzt und der grösste ist (0,029 mm lang). Hinter den Lücken in dieser Reihe sitzen 4 ein wenig kleinere, und hinter den beiden Seitenlücken letzterer Reihe findet sich je ein nur 0,014 mm langer Stachel. Gehen wir jetzt zur *Bauchseite* über. Dort findet sich am Saugnapfe dem vordersten Abschnitt des Mündungsrandes eingepflanzt eine nach vorn schwach konvexe Reihe von 7—8 sehr kleinen Stacheln (von nur 0,08 mm Länge), denen an jeder Seite zwei ein bischen grössere, ihre Reihe fortsetzend, folgen. 11—12 in einem Bogen sitzende Stacheln fassen also die Mündung des Mundnapfes von vorne ein. Ganz neben den hintersten Stacheln dieser Reihe beginnt an jeder Seite eine andere Reihe von 5 in transversaler Richtung auf einander folgenden, etwa 0,02 mm langen Stacheln. Endlich sitzen auf der Bauchseite des Vorderendes auch zwei Paare einzelner Stacheln, ein hinteres in der Höhe der vordersten Kragenstacheln und ein vorderes etwa mitten zwischen diesem und dem Vorderende.

Der Mundsaugnapf ist nicht napfförmig wie bei den echten Echinostomen, sondern mehr spitz trichterförmig, 0,14 mm lang und 0,1 mm breit. Bauchsaugnapf 0,37 mm im Durchmesser am Ende des ersten Körperdrittels. Präpharynx ziemlich lang, so dass der cylindrische, 0,14 mm lange Pharynx erst unmittelbar hinter dem Kopfe zu finden ist. Daringabelung durch den Cirrusbeutel vom Bauchnapfe getrennt. Samenblase zweigeteilt. Hoden vor der Mitte des Hinterkörpers mit eingekerbten Rändern. Dotterstöcke hinter den Hoden das Hinterende einnehmend. Eier oft zahlreich, ca 0,09 mm lang.

Auch die Gattung *Acanthochasmus* Lss. ist im Darne des Nilkrokodils vertreten, und zwar sind, wie ja bereits zwei ähnliche Fälle neulich durch Looss¹⁾ bekannt geworden sind, zwei deutlich

¹⁾ Über d. Fasciolidengenera *Stephanochasmus*, *Acanthochasmus* etc. (Centralbl. f. Bakt. etc. 1 Abth. Bd. XXIX, 1901, p. 629.)

verschiedene Species neben einander dort vorhanden. Leider finden sich in meinen Obduktionsnotizen nicht so genaue Angaben über ihren Aufenthaltsort im Darne, dass ich einen Unterschied zwischen beiden Formen betreffs ihres Wohnsitzes konstatieren kann. Beide sind als im Mitteldarme und spärlicher auch im Vorderdarme vorkommend etikettiert worden.

4. *Acanthochasmus productus* n. sp.

Länge durch Schüttelung ausgestreckt konservierter Exemplare bis 3,5 mm. Körper drehrund, beinahe gleichdick, von ca 0,35 mm Durchmesser. Mundsaugnapf ca 0,27 mm weit bei einer Tiefe von 0,2 mm. Sein Rand normal mit einem Kranze von 23 höchstens 0,057 mm langen Stacheln bewaffnet. Bauchnapf 0,17 mm im Durchmesser, im Anfang des zweiten Viertels bis Fünftels der Körperlänge. Samenblase wellenförmig gewunden, nach hinten ungefähr bis zum Ende des ersten Drittels der Entfernung zwischen Bauchnapf und Keimstock reichend. Im äussersten Hinterende folgen hinter einander Keimstock, grosses Receptaculum seminis und die beiden längsovalen ganzrandigen Hoden. Die drei Keimdrüsen liegen alle völlig median, das Receptaculum ist dagegen ein wenig seitlich verschoben. Dotterstöcke in der Höhe des Receptaculums beginnend und vorn ein kleines Stück vor dem Hinterende der Samenblase aufhörend. Uterusschlingen weniger dicht verlaufend. Eier langgestreckt, 0,034 mm lang, aber nur 0.11 mm breit.

5. *Acanthochasmus vicinus* n. sp.

Diese Art unterscheidet sich von der vorigen schon für das blossе Auge durch andere Körperform. Die Länge beträgt bei den meisten meiner Exemplare ein wenig über 2 mm, kann indessen bis zu 3 mm steigen. Der Körper ist bedeutend abgeplattet in dorsoventraler Richtung mit einer Maximal-

breite von 0,5 mm in der Höhe des Bauchnapfes. Der Hinterkörper wie bei *Acanth. spiniceps* Lss. deutlich verbreitert. Mundsaugnapf 0,23—0,25 mm weit und 0,3—0,33 mm tief, also viel tiefer als bei *Ac. productus*. Die Zahl der Stacheln an seinem Rande ist 23, also genau dieselbe wie bei jener Art. Sie sind indessen bedeutend grösser, mit einer Maximallänge von 0,075 mm. Der Bauchnapf 0,18—0,21 mm. im Durchmesser, am Anfang des zweiten Drittels bis Viertels der Körperlänge. Samenblase locker knäuelartig geschlängelt und nur ein ganz kurzes Stück nach hinten reichend. Receptaculum seminis zwischen Keimstock und vorderem Hoden. Dotterstöcke vom Vorderrande des vorderen Hodens bis in die Höhe des Hinterrandes des Bauchsaugnapfes reichend. Uterusschlingen äusserst dicht liegend. Eier immer nur ca 0,026 mm lang und 0,01 mm breit.

Die spezifischen Unterschiede zwischen beiden Arten dürften bei einer Vergleichung der gesperrt gedruckten Merkmale ohne Weiteres einleuchten. Von sämtlichen bis jetzt beschriebenen Arten der Gattung *Acanthochasmus*, incl. *Ac. coronarius* (COBB.) aus dem Alligator, sind sie leicht zu unterscheiden. In den beiden von Looss bekannt gemachten Fällen von einem Vorkommen zweier *Acanthochasmus*-Arten im Darne desselben Wirtes sind die neben einander wohnenden Formen mit einander näher verwandt, als es hier der Fall ist, indem die beiden Arten des Krokodils nicht derselben Untergruppe der Gattung angehören. *Ac. vicinus* ist nämlich nach dem Typus von *Ac. spiniceps* Lss. gebaut, während *Ac. productus* mit *Ac. imbutiformis* (MOL.) am nächsten verwandt ist. Der letzteren Gruppe gehören auch die beiden schon bekannten Arten aus Reptilien, *Ac. scyphocephalus* BRN. und *Ac. coronarius* (COBB.) an.

6. *Oistosomum caduceus* n. g. n. sp.

Diese besonders durch ihre eigentümliche Körperform ausgezeichnete Art habe ich leider nur in einem einzigen Exemplare im Duodenum des Krokodils angetroffen.

Länge 8 mm. Der dorsoventral abgeplattete Körper zerfällt durch einen scharfen Einschnitt an jedem Seitenrande in zwei Teile: ein Vorderleib von der Form eines gleichschenkligen Dreiecks und ein wenig länger als ein Drittel der Körperlänge, dessen nach hinten gekehrter, unpaarer, kürzerer Seite ein dieser gegenüber schmalerer, langgestreckter nach hinten sich verjüngender Hinterleib angesetzt ist. Es kommt dadurch an jeder Seite ein flügelartig herausragender Lappen zustande, je einem der beiden hinteren Winkel des Dreiecks entsprechend. Die selbstverständlich hier befindliche grösste Breite des Körpers beträgt 2,5 mm, während der Hinterleib an seiner Basis beinahe 2 mm breit ist. Das Vorderende ist abgerundet. Am Ende des ersten Sechstels des Hinterleibes findet eine sehr rasche Verjüngung von 1,7 mm auf 1,2 mm statt. Dahinter ist die Verschmälerung zum ziemlich spitz auslaufenden Hinterende gleichmässig. Der Körper ist auf den zwei ersten Dritteln des Vorderleibes bestachelt. Mundsaugnapf mit terminal gerichteter Mündung, rundlich, 0,38 mm breit und 0,28 mm lang. Unmittelbar dahinter ein kugeliges Pharynx von 0,22 mm Durchmesser. Die Darmschenkel nehmen ihren Ursprung direkt aus ihm und endigen nach einem geraden Verlauf in derselben Höhe 0,7 mm vom Hinterende. — Der Bauchsaugnapf hat einen Durchmesser von 0,5 mm; sein Hinterrand liegt auf der Mitte des Vorderleibes. Dicht hinter ihm an der rechten Seite liegt der breitovale, ganzrandige Keimstock von 0,36 mm Durchmesser, über und hinter diesem ein ein wenig grösseres Receptaculum seminis. Dicht hinter letzterem endlich die beiden grossen, symmetrisch unmittelbar an jeder Seite der Medianlinie gelagerten, längsovalen und ein wenig eingekerbten Hoden, die über 1 mm lang sind. Ihre Hinterenden liegen in der Höhe der Seiteneinschnitte. Die Dotterstöcke finden sich

längs der nach hinten divergierenden Seitenränder des Vorderleibes, und zwar erstrecken sie sich von der Höhe der Darmgabelung bis zur Mitte der Hoden. Zwischen den Hoden zieht der Uterus aus dem Schalendrüsenskomplex nach hinten und kehrt, nachdem er das Feld hinter den Hoden und zwischen den Darmschenkeln mit Windungen gefüllt hat, auf demselben Wege nach der Genitalöffnung zurück. Die Eier sind ungemein zahlreich, ca 0,043 mm lang. Die Genitalöffnung liegt ein kleines Stück vor dem Bauchnapf median und scheint in einen geräumigen Sinus zu führen, der eine eigentümliche Bewaffnung von sehr langen Chitinnadeln besitzt, worüber ich in der definitiven Arbeit des Näheren berichten werde, soweit es an dem einzigen Exemplar möglich ist, die Verhältnisse aufzuklären. Ein Cirrusbeutel ist vorhanden und reicht nach hinten bis in die Höhe des Centrums des Bauchsaugnapfes. Eine einfache eiförmige Samenblase liegt in seinem Hinterteile. Prostata wohl entwickelt. Cirrus von mässiger Länge, anscheinend wenig kräftig.

Was die Verwandtschaftsverhältnisse dieser Art betrifft, so lässt sich kaum mehr sagen, als dass sie zur Gattung *Styphlodora* Lss. unzweifelhaft die nächsten Beziehungen aufweist.

7. *Nephrocephalus sessilis* n. g. n. sp.

Im Oesophagus des Nilkrokodils habe ich konstant in grösserer oder geringerer Zahl ein grosses *Distomum* gefunden, das der Schleimhaut so fest anhaftet, dass ein Losmachen mit Gewalt kaum möglich ist. Sowohl durch seinen Wohnsitz wie durch mehrere Züge seiner Organisation stellt es eine Parallellform zu den im Speiserohr der Reihervögel lebenden Clinostomen dar, die unzweifelhaft seine nächsten Verwandten sind.

Länge ausgewachsener Exemplare 12—14 mm bei einer ziemlich gleichmässigen Breite des in dorsoventraler Richtung nur unbedeutend abgeplatteten Wurmes von ca 2,5 mm. Hinterende abgerundet. Eine sehr derbe, unbestachelte Cuticula bekleidet den Körper. Vorderende wie bei den Clinostomen schräg

abgestutzt und mit einem rings um den Mundsaugnapf sich erhebenden muskulösen Kragen ausgestattet. Dieser ist aber im Gegensatz zum Verhältnis bei den Clinostomen in der ventralen Medianlinie abgebrochen, indem er sich dort unter Bildung einer schmalen medianen Rinne an den Mundnapf ansetzt. Das ganze vom Kragen eingeschlossene Feld wird dadurch nierenförmig. Der Mundsaugnapf ist glockenförmig, ca 0,5 mm tief und 0,3 mm weit. Der mächtige, in den Körper eingesenkte Bauchsaugnapf zeigt seine rundliche Mündung auf der Grenze zwischen dem ersten und dem zweiten Viertel der Körperlänge. Seine Tiefe beträgt 1 mm, seine Länge 0,75 mm. Präpharynx kurz. Pharynx gross, ca 0,3 mm lang und ein wenig dicker. Oesophagus von derselben Länge. Darmschenkel längs den Körperseiten das Hinterende erreichend, im Anfang vielfach ausgesackt und bald nach ihrer Gabelung zwei nach vorn gehende grössere Blindsäcke, die bis in die Höhe des Mundnapfes vordringen, abgebend. Excretions-system netzförmig verzweigt. Die grossen Hoden liegen als zwei ganzrandige, rundliche, aber einander ein wenig abplattende Körper hinter einander unmittelbar hinter der Mitte des Hinterkörpers. Zwischen ihnen an der rechten Seite findet sich der relativ winzige runde Keimstock. Receptaculum seminis fehlt, ein LAURER'scher Kanal ist vorhanden. Schalendrüsenskomplex median zwischen den Hoden. Die Dotterstöcke dehnen sich in sehr kleinen Follikeln längs den Seiten des Hinterkörpers aus. Uterus zuerst an der linken Seite bis zum Hinterrand des Bauchnapfes emporsteigend und dann an der anderen Seite nach dem ein kleines Stück vor dem Hinterende median gelegenen Genitalporus zurückkehrend. Die zahlreichen Eier messen in der Länge ca 0,114 mm und in der Breite 0,066 mm. Sie enthalten schon lange vor der Ablage ein reifes Miracidium mit Augenfleck. Die Endteile der männlichen Ausführungswege umschliesst ein mächtiger, S-förmig verlaufender Cirrusbeutel, der durch Grösse und Lage an denjenigen der Gasterostomen erinnert. Sein Vorderende, wo die Vasa deferentia einmünden, liegt in der Höhe des hinteren Hodens. Die auf seinem Grunde gelegene Samen-

blase ist schlauchförmig, von gleichmässigem Kaliber und zu einem lockeren Knäuel gewunden. Pars prostatica wenig entwickelt. Cirrus enorm lang und distalwärts an Dicke zunehmend.

Die neue Gattung zeichnet sich somit von der am nächsten verwandten, *Clinostomum* LEIDY, durch das nierenförmige Mundfeld, den Mangel eines Uterussacks und die ganz verschiedene Lage der Genitalöffnung und des Cirrusbeutels aus.

Ausser diesen von mir selbst im Sudan eingesammelten Arten, die ich später in einer ausführlicheren Arbeit näher beschreiben und auch abbilden werde, finden sich in dem zu meiner Verfügung stehenden Distomenmateriale zwei weitere neue Arten aus Reptilien, die ich hier auch beschreiben will.

8. *Telorchis solivagus* n. sp.

Von mir in einem einzigen Exemplar im Vorderdarme einer von meinem Freunde Dr. E. LÖNNBERG von einer Reise in Südkaukasien nach Upsala lebendig mitgebrachten Flussschildkröte (*Clemmys caspica*) gefunden. Es handelt sich um eine neue, aber durchaus typische Art der Gattung *Telorchis* LSS.

Der Körper ist langgestreckt, abgeflacht, 7,5 mm lang. Die Maximalbreite in der Mitte des Hinterkörpers beträgt 0,8—0,9 mm. Das Hinterende ist hinter den Uterusschlingen spitz verjüngt, die Verschmälерung nach vorn dagegen weniger stark. Vorderende abgerundet, bei meinem Exemplar leider bauchwärts ein-



Fig. 2. *Telorchis solivagus* n. sp. von der Bauchseite. CB Cirrusbeutel.

gerollt. Eine ziemlich dichte Bestachelung bekleidet den Vorderkörper, wird nach hinten zu, wie gewöhnlich, dünner, ist aber noch mit einzelnen Stacheln in der Höhe des vorderen Hodens vorhanden. — Der Mundsaugnapf ist bauchwärts gerichtet und misst in der Länge 0,19 mm, in der Breite 0,24 mm. Der runde Bauchsaugnapf, der 1,5 mm vom Vorderende entfernt zu finden ist, hat einen Durchmesser von 0,28 mm und ist also grösser als der Mundnapf.

Unmittelbar hinter diesem liegt ein kugeliges Pharynx von 0,146 mm Durchmesser. Ihm folgt ein ca 0,35 mm langer Oesophagus, der sich vor der Mitte des Halses in die beiden Darmschenkel teilt. Letztere ziehen nahe den Körperändern und diesen parallel nach innen von den Dotterstöcken bis ins äusserste Hinterende hinaus, wo sie genau in gleicher Höhe endigen. — Vom Excretionssystem ist nur die dorsal von den Hoden in der Medianlinie verlaufende einfach schlauchförmige Endblase ersichtlich.

Dicht hinter einander im äussersten Hinterende (nur um die Länge eines Hodens von der Spitze entfernt) liegen, einander ein wenig abplattend, die beiden unregelmässig rundlichen, ganzrandigen, gleichgrossen Hoden. Sie messen in der Länge 0,5 mm und in der Breite 0,42 mm. Die von ihnen nach vorn verlaufenden Vasa deferentia sind nicht zu sehen. Der Cirrusbeutel zeigt eine ungewöhnliche Länge. Von der am Vorderrande des Bauchsaugnapfes gelegenen Genitalöffnung erstreckt er sich nämlich, vielfach in die Quere gewunden, durch 2,4 mm der Körperlänge nach hinten, also beinahe ein Drittel des Körpers durchziehend. Sein die Samenblase enthaltendes Hinterende ist ein wenig angeschwollen, sonst behauptet er gleichmässig die geringe Dicke von ca 0,1 mm. — Unter dem äussersten Hinterende des Cirrusbeutels finden wir den linksseitig gelegenen, regelmässig kugeligen Keimstock, dessen Durchmesser 0,27 mm beträgt. Er findet sich also ein Stück vor der Mitte des Hinterkörpers. Ein Receptaculum seminis ist ebenso wenig wie bei anderen *Telorchis*-Arten vorhanden.

Die Dotterstöcke setzen sich aus kleinen Follikeln zusammen und erstrecken sich längs den Körperseiten ausserhalb der Darmschenkel. Sie beginnen in einer Höhe, die vom Bauchnapfe um ein Drittel des Abstandes zwischen ihm und dem Keimstock entfernt ist und endigen mitten zwischen dem Keimstock und dem Hinterende oder näher präzisiert an der rechten Seite ein Stück vor, an der linken ein Stück hinter dieser Höhe. Eine Anordnung der Follikel in Trauben kommt im Ganzen nicht deutlich zum Ausdruck. Der Verlauf des Uterus weicht bei meinem einzigen Exemplar insofern von dem von BRAUN¹⁾ neulich für mehrere Arten der Gattung geschilderten ab, dass die auf- und absteigenden Schenkel desselben einander genau mitten zwischen dem Keimstock und dem vorderen Hoden überkreuzen und also die Seite wechseln. Der absteigende Schenkel nimmt also erst die linke Hälfte des zwischen den Darmschenkeln eingeschlossenen Feldes ein, geht durch die Überkreuzung aber nach der rechten Seite über und vice versa. Ausserdem ist die Trennung beider Schenkel auch sonst nicht so scharf wie bei *Tel. aculeatus* (v. LINST.), sondern gelegentliche Beeinträchtigungen des einen Schenkels durch das Gebiet des anderen kommen vor. Vor dem Bauchsaugnapfe liegt der Uterus eher auf der linken Seite und geht in der Höhe der Vorgrenze der Dotterstöcke in eine deutlich differenzierte, ziemlich dickwandige Vagina über. Die Eier sind ungemein zahlreich und messen in der Länge 0,031 mm und in der Breite 0,015 mm. Neu gebildet sind sie farblos und nur 0,028 mm lang, werden allmählich zuerst braungelb und bei völliger Reife zuletzt dunkelbraun. Sie sind dünnschalig und gedeckelt.

Diejenigen Merkmale, welche diese Art den bis jetzt bekannten *Telorchis*-Arten gegenüber besonders charakterisieren, sind durch den Druck in der Beschreibung hervorgehoben worden. Am meisten wäre unter jenen an *Tel. poirieri* (Stoss.) zu denken auf Grund des ähnlichen Wirtes (*Emys lutraria*) und der ziemlich übereinstimmenden Eimasse. Von dieser Art unter-

¹⁾ Trematoden der Chelonier (Mitt. Zool. Museum, Berlin, Bd. II, 1901, p. 15 ff.).

scheidet sich *Tel. solivagus* indessen z. B. durch anderes Grössenverhältnis zwischen den Saugnäpfen, besser entwickelte Dotterstücke und längere Darm-schenkel. Auch hier kann also von einer Identität keine Rede sein.



Fig. 3. *Cotylotretus rugosus* n. g. n. sp. Die Figur ist nach dem unreifen Exemplar gezeichnet worden, worauf der Kopfkragen, die Dotterstöcke und die Uteruswindungen nach dem grösseren eingetragen worden sind. CB Cirrusbeutel. GP Genitalporus. H Hoden. Kst Keimstock.

Den Sammlungen des Kopenhagener Museums, aus denen ich durch die Zuvorkommenheit des Museumsinspektors Dr. G. M. R. LEVINSEN mehrere interessante Formen zur Bearbeitung bekommen habe, entstammt die folgende Art, welche von einem ganz hervorragenden Interesse ist als mit dem neuerdings von BRAUN¹⁾ näher untersuchten *Dist. grande* RUD. unzweifelhaft ganz nahe verwandt. Sie zeigt wie jene Art einen im Grunde durchbohrten Bauchsaugnapf, der mit einem langen den ganzen Hinterkörper durchziehenden Kanal in Verbindung steht, und schliesst sich auch in vielen anderen Hinsichten jener Art sehr nahe an, soweit die kurzen, vorläufigen Angaben BRAUN's eine Vergleichung gestatten.

9. *Cotylotretus rugosus* n. g. n. sp.

Zwei vollständige, aber stark eingerollte Exemplare, ein reifes und ein kleineres unreifes, nebst einigen Bruchstücken vorhanden, in »*Coluber pullatus*» (jetzt *Spilotes pullatus*), einer brasilianischen Schlange, 1852 gesammelt. Über Wohnsitz und Fundort finden sich keine Angaben. Das alte Material ist stark gedunkelt und das erwachsene Exemplar lässt

¹⁾ Zur Revision der Trematoden der Vögel I (Centralbl. f. Bakt. etc. 1 Abth. Bd XXIX, 1901, p. 564—565).

sich nur unvollkommen aufklären. Meine Beschreibung muss daher in mehreren Punkten mangelhaft bleiben.

Das erwachsene Exemplar, das ich vorsichtig gestreckt habe, misst in totaler Länge ca 19 mm bei einer Maximalbreite von beinahe 4 mm, die etwas hinter dem Bauchsaugnapfe sich findet. Nach hinten zu tritt eine allmähliche, aber unbedeutende Verjüngung ein, so dass die Breite unmittelbar vor dem Hinterende noch 3,3 mm beträgt. Der sehr kurze Halsteil erreicht eine Breite von 2,75 mm. In gleichem Niveau mit dem Hinterende des Bauchsaugnapfes findet sich eine seichte Einbuchtung an jeder Körperseite. Beide Körperenden sind breit abgerundet. In dorso-ventraler Richtung ist der Wurm bedeutend abgeplattet, indem die Dicke nur ca 1,5 mm beträgt. Die gänzlich unbestachelte Cuticula ist in starke Querfalten gelegt. Das unreife Exemplar unterscheidet sich, was die äussere Form betrifft, von dem anderen durch einen relativ schmäleren Hinterkörper, indem dieser noch nicht durch die Füllung der Uteruswindungen mit Eiern und die völlige Reifung der Dotterstöcke ausgedehnt worden ist und daher noch dem Halse an Breite gleichkommt. Sein Hinterende ist auch mehr zugespitzt. Die Länge beträgt 9,5 mm und die Maximalbreite 1,75 mm.

Der kleine, subterminale Mundsaugnapf hat einen Durchmesser von 0,31—0,39 mm ¹⁾ und ist von gewöhnlicher Form. Ein unbewaffneter, durch Verdickung der Körpermasse gebildeter Kopf- oder Schulterkragen umgiebt ihn ringsum. Der ventrale Abschnitt dieses Kragens ist durch einen an jeder Seite nahe dem Körperrande befindlichen Einschnitt in zwei seitliche Lappen und eine sie verbindende, nach hinten zu leicht konvexe Mittelpartie geteilt. Die Breite des ganzen Kragens beträgt beim ausgewachsenen Exemplar 0,87 mm. Der Bauchsaugnapf ist von gewaltiger Grösse und sehr weiter Mündung. Seine Form ist die eines flachen, querovalen Tellers, der durch eine Öffnung mit

¹⁾ Wo in dieser Beschreibung zwei Masse angegeben werden, bezieht sich das kleinere auf das unreife Individuum, das grössere auf das reife. Wenn dagegen nur ein Mass geliefert wird, handelt es sich um das erstere.

einem kleinen median liegenden, nach hinten verlaufenden, trichterförmigen Sack communiciert. Der Vorderrand liegt 1 mm vom Vorderende des Körpers entfernt. Die Breite seiner Mündung beträgt 1,45—2,35 mm und ihre Länge 1—1,6 mm. Vom Vorderrande des Saugnapfes bis zur Spitze des Trichters ist die Entfernung 1,33—2,4 mm. Diese Spitze ist nun durchbohrt und aus der Bauchsaugnapfhöhle gelangt man in einen in der Medianlinie des Hinterkörpers hinziehenden, ziemlich dickwandigen Kanal, der der Rückenseite genähert ohne Windungen geradenwegs nach hinten verläuft, um an der Spitze des Hinterendes zu münden. Dass er wie bei *Dist. grande* nach BRAUN mit dem Excretionssystem gemeinsam ausmündet, habe ich zwar nicht direkt konstatieren können, bei der sonstigen Übereinstimmung mit dieser Form dürfte wohl aber wahrscheinlich dies auch hier der Fall sein. Was seine Bedeutung sein kann, ist unverständlich.

Durch einen ganz kurzen Präpharynx gelangt man aus der Mundsaugnapfhöhle in einen kräftigen, kugeligen oder ovalen Pharynx, der ein wenig kleiner als der Mundnapf ist. Sein Durchmesser beträgt nämlich 0,25—0,38 mm. Darauf folgt ein Oesophagus von 0,35 mm Länge, der sich unmittelbar vor dem Vorderrande des Bauchsaugnapfes in die dickwandigen Darmschenkel gabelt. Diese ziehen längs der Körperseiten bis ins äusserste Hinterende hinaus, wo sie in gleicher Höhe endigen. — Vom Excretionssystem habe ich zwei längsgehende Gefässe gesehen, die an der inneren Seite der Darmschenkel verlaufen und die von der unmittelbaren Nähe des Hinterendes bis in die Nähe des Bauchsaugnapfes zu verfolgen sind.

Die beiden Hoden liegen als nieren- oder bohnenförmige Körper median nahe hinter einander am Ende des dritten Körper Viertels. Ihre 0,4—1,5 mm messenden Längsachsen finden sich in der Längsrichtung des Körpers. Der die Endteile der männlichen Ausführungswege umschliessende Cirrusbeutel ist von gedrungener Form und reicht von der unmittelbar vor dem Vorderrande des Bauchsaugnapfes median gelegenen Genitalöffnung nur

bis in die Höhe des Centrums der Saugnapfmündung. Eine Samenblase scheint ihn fast vollständig auszufüllen. Kurz vor dem vorderen Hoden liegt in der Medianlinie der winzige, rundliche Keimstock. Wenigstens ein grösseres Receptaculum seminis dürfte fehlen. Die Dotterstöcke setzen sich aus sehr kleinen runden Follikeln zusammen, die in grosser Anzahl längs der Körperseiten ausserhalb der Darmschenkel liegend in einer Körperhöhe unmittelbar hinter dem Bauchsaugnapfe beginnen und bis ins äusserste Hinterende hinausreichen. Von der Gegend des Keimstockes steigt der mit zahllosen Eiern gefüllte Uterus in regelmässigen Querwindungen, die das Mittelfeld zwischen den Darmschenkeln einnehmen, nach dem Bauchsaugnapfe empor und setzt sich am Hinterende des Saugnapfes in eine geradenwegs nach der Genitalöffnung hinziehende Vagina fort. Die grossen Eier messen in der Länge ca 0,12 mm bei einer Breite von ca 0,06 mm. Sie sind dünnschalig und von ovaler Form.

Dass *Dist. grande* RUD. zu dieser Art in den allernächsten Beziehungen steht, bedarf wohl nach der gegebenen Beschreibung keiner weiteren Erörterung. Das einzige, das bei einer Vergleichung mit den kurzen vorläufigen Angaben BRAUN's über jene Art ein wenig befremdend wirkt, ist, dass von ihm kein Kopfkragen erwähnt wird, eine Bildung, die bei der sonstigen vollständigen Übereinstimmung mit der von mir geschilderten Form kaum fehlen zu können scheint. Dass die Arten indessen trotz aller Ähnlichkeit doch als spezifisch wohl verschieden zu betrachten sind, dafür habe ich in der Angabe BRAUN's, dass der Pharynx bei *D. grande* grösser als der Mundsaugnapf ist, einen positiven Anhaltspunkt. Auch soll *D. grande* nach RUDOLPHI (Synopsis p. 677) bedeutend grösser sein (27 mm). Endlich sind ja auch die Wirttiere so ganz verschieden.

Für die neue Gattung *Cotylotretus* betrachte ich die von mir hier beschriebene Art, *C. rugosus*, als Typus. Ihre nächsten Verwandten dürften allem Anscheine nach in den Echinostomen zu erblicken sein, mit denen sie ja in vielen Hinsichten übereinstimmt. Bis auf weiteres dürfte auch das *Dist. grande* RUD.

ihr angeschlossen werden können, bis wir durch bessere Kenntnisse von dieser Art im Stande sein werden, den Grad der Verwandtschaft zu bewerten.

Den jetzt gelieferten Artbeschreibungen möchte ich auch einige allgemeinere systematische Ausführungen über das System der Trematoden anschliessen und den Umfang, den man meiner Ansicht nach bei dem Ausbaue des natürlichen Systemes den verschiedenen systematischen Kategorien zu geben hat, in aller Kürze besprechen, besonders mit Rücksicht auf die in der letzteren Zeit erschienenen Vorschläge einer Aufteilung der »Distomen« in natürliche Familien.

Um da zuerst mit dem Gattungsbegriff zu beginnen, muss ich in Bezug darauf fast in allen Hinsichten den von LOOSS in seinem »Versuche« geltend gemachten Ansichten beistimmen. Ihm gebührt das grosse Verdienst, nicht nur durch seine vielen exacten und detaillierten Beschreibungen eine richtigere und schärfere Auffassung des Artbegriffes und eine genauere Beachtung der oft unbedeutenden Artmerkmale angebahnt zu haben, wodurch fürs natürliche System ein festerer Grund als der früher existierende von ihm geschaffen wurde, sondern auch schon bei seinem ersten Versuche einer natürlichen Gliederung der Distomen, so viel ich verstehe, im Prinzip sogleich das Richtige getroffen zu haben. Die von Seiten BRAUN's und LÜHE's gegen ihn gerichteten prinzipiellen Hauptanmerkungen, dass er seinen Gattungen allzu enge Grenzen gezogen hätte und dass er bei der Befolgung seiner Prinzipien voreilig eine Reihe nur einzelne Arten enthaltender Gattungen etabliert hätte, ohne sich vorher einen Überblick über die allgemeinen systematischen Beziehungen der betreffenden Arten verschafft zu haben, kann ich unmöglich als berechtigt anerkennen. Ich gebe zwar zu, dass ungefähr dieselben Einwürfe auch mir selbst beim ersten Studium des LOOSS'schen Werkes aufgetaucht sind, später bin ich aber besonders unter dem Eindruck der vielen durch so geringfügige Merkmale von einander getrennten Arten, die vor Allem von

Looss¹⁾ selbst zu Tage gebracht worden sind und deren Artberechtigung doch über jeden Zweifel steht, sowie auf Grund eigener Untersuchungen völlig auf seine Seite übergegangen. Mir scheinen also nunmehr die aus den Looss'schen Einteilungsprinzipien hervorgegangenen Distomengattungen, wie sie sich in seinem »Versuche« finden, gerade mehreren von anderen Verfassern aufgestellten Gattungen²⁾ gegenüber, bei deren Gründung man ebenfalls, wenn auch nicht so scharf wie Looss, der allgemeinen Topographie der Organe allseitig Rechnung zu tragen versucht hat, den Anforderungen, die man an eine natürliche Gattung als wohl geschlossenen Artenkreis stellen muss, entschieden besser zu entsprechen. Ich kann auch nicht anders finden, als dass schon in den beiden seit dem Erscheinen der Looss'schen Arbeit verflossenen Jahren eine fast überwältigende Menge von neuen Thatsachen zu Tage gefördert ist, welche zu Gunsten der Looss'schen Prinzipien sprechen. So ist ja Looss in der vielumstrittenen Frage von der Stellung des *Dist. cymbiforme* RUD. im Systeme jetzt unzweifelhaft als Sieger hervorgegangen. Es scheint mir gerade dieser Specialfall von grosser Tragweite für die ganze Prinzipfrage zu sein, weil ich in der verschiedenen systematischen Verwertung, die von Seiten BRAUN's und Looss' dem von den Harnblasedistomen gebildeten Formenkreise zu Teil geworden ist, ein sehr typisches Beispiel der Resultate, zu denen die respektiven Einteilungsprinzipien führen, erblicken muss. Beiträge zur Beleuchtung dieser Streitfrage habe ich selbst an anderer Stelle publiciert.³⁾

Wenn möglich noch schwerer fallen aber ins Gewicht zu Gunsten der Looss'schen Auffassung die vielen oben angedeuteten durch nur unbedeutende Merkmale charakterisierten Arten, die

¹⁾ Ich denke dabei besonders an die von ihm erörterten Arten der Gattungen *Stephanochasmus*, *Acanthochasmus*, sowie an mehrere der von ihm letzthin beschriebenen neuen Schildkrötentrematoden (Notizen zur Helminthologie Aegyptens, Centralbl. f. Bakt. etc., Bd. XXX). Selbst habe ich im Vorigen zwei solche nahestehende Arten der letzteren Gattung beschrieben.

²⁾ z. B. *Opisthorchis* R. Bl., *Phyllodistomum* BRN.

³⁾ Mitteilungen zur Kenntniss der Distomen I (Centralbl. f. Bakt. etc. 1 Abth. Bd. XXXI 1902).

in letzterer Zeit entdeckt oder aus alten Kollektivarten ausgesondert worden sind. Durch diese sind schon mehrere der im »Versuche« von Looss mit nur einer einzigen Art figurierenden Gattungen an Artanzahl bereichert worden. Auf diese Weise hat sich ja schon die Berechtigung seiner Gattungen *Enodiotrema*, *Cymatocarpus*, *Megacetes*, *Stomylotrema* und *Lyperosomum* glänzend bestätigt, und schon dies scheint mir einen deutlichen Beweis dafür abzugeben, dass das Aufstellen neuer Gattungen für einzelne Arten an und für sich nicht zu tadeln ist, wie denn auch LÜHE selbst, der mit dieser Ausstellung hervorgetreten ist, — wie LOOSS¹⁾ zutreffend bemerkt — sich, und zwar meiner Ansicht nach immer mit vollem Recht, eines solchen Verbrechens relativ noch öfter als LOOSS selbst schuldig gemacht hat. Beim Ausbaue des natürlichen Systemes müssen doch die praktischen Rücksichten ganz in den Hintergrund treten.

Persönlich hege ich sogar die Überzeugung, dass es ihm nicht gelingen wird, eine einzige der LOOSS'schen Gattungen aus anderen als formellen Gründen aus der Welt zu schaffen, dass vielmehr, wie er ja auch selbst andeutet, viele derselben noch weiter aufgeteilt werden müssen. So kann ich z. B. seine darauf bezügliche Bemerkung über die Gattung *Echinostomum*, wie sie in seinem »Versuche« begrenzt worden ist, völlig bestätigen. Es stecken unzweifelhaft eine ganze Reihe natürlicher Gattungen darin. Ausser der von ihm selbst erwähnten Gruppe von *E. bilobum* RUD. und *E. ramosum* SONS. dürften weiter auch sowohl *E. asperum* WRIGHT wie *E. ferox* RUD. besondere Gattungen bilden müssen, die ich dann wahrscheinlich mit je einer neuen afrikanischen Art bereichern kann. Mehrere solche Beispiele könnten weiter angeführt werden.

Als Zusammenfassung der obigen Ausführungen will ich als meine Meinung aussprechen, dass in dem definitive Siege der Looss'schen Ansichten als im Prinzip richtig in Bezug auf die Begrenzung der Gattung die erste reife Frucht der eifrigensystematischen Bestrebungen und Diskussionen der letzten beiden

¹⁾ Natura doceri etc. (Centralbl. f. Bakt. etc. Bd. XXIX, 1901, p. 206).

Jahre zu erblicken ist. Demnach glaube ich, dass man mit Beachtung dieser Prinzipien in Zukunft für jede neue Form, die sich mit Sicherheit in keine der schon vorhandenen Gattungen einpassen lässt, ruhig eine neue schaffen kann. Die Trematodenfauna der weitaus grössten Teile der Welt ist ja beinahe terra incognita, so dass noch das meiste zu entdecken übrig sein dürfte, und die Erfahrung hat ja schon mehrfach gelehrt, wie bald oft solche anscheinend isolierten Formen Gattungsgenossen bekommen. Die strengen Anforderungen, die Looss in seinem »Versuche« in Bezug auf das stetige Liefern einer Diagnose für jede neu etablierte Gattung stellt, scheinen mir indessen für die vorläufig auf nur eine einzige Art gegründeten kaum gelten zu können. In dieser Hinsicht stimme ich LÜHE¹⁾ völlig darin bei, dass erst das Auffinden weiterer Arten das erforderliche Material zur Aufstellung einer nicht mehr oder weniger in der Luft schwebenden Diagnose liefern kann. Looss hat auch selbst in seinen letzten Publikationen viele solche Gattungen ohne Diagnose aufgestellt.

Über die Vereinigung verwandter Gattungen zu Unterfamilien, wie es Looss vorgenommen hat, ist nicht besonders gestritten worden, und ich glaube auch meinerseits, dass sie auf richtigen Prinzipien ruht.

Der von LÜHE²⁾ in allerletzter Zeit in Vorschlag gebrachten Familieneinteilung gegenüber muss ich mich dagegen sehr zweifelnd stellen. Dass »die Verteilung der Distomen auf mehrere Familien« oder, wie ich lieber sagen möchte, um den meiner Ansicht nach einzig richtigen Weg zu betonen, die allmähliche Vereinigung offenbar verwandter Unterfamilien zu *natürlichen* Familien »ein künftiger Fortschritt« im Ausbaue des natürlichen Distomensystemes sein muss, ist ja unzweifelhaft. Doch muss ich sogleich hinzufügen, dass ich dabei ein vorsichtigeres Vorgehen als das LÜHE'sche als durchaus erforderlich halten muss. Seine

¹⁾ Zwei neue Distomen aus indischen Anuren (Centralbl. f. Bakt. etc. Bd. XXX, 1901, p. 176).

²⁾ Über Hemuriden (Zool. Anz. 1901 p. 485).

Familien scheinen mir in einem gewissen Grade an demselben Fehler zu leiden wie die Gattungen, welche aus den ersten Systematisierungsversuchen für die Distomen resultierten, d. h. sie scheinen mir einseitig auf allzu wenige und oberflächliche Merkmale gegründet zu sein und allzu heterogene Elemente zusammenzuhalten zu versuchen. Ein Blick auf andere Tiergruppen, in denen die natürliche Einteilung weiter gekommen ist als bei den Trematoden, lehrt, dass auch die Familien durch mehrere vereinende Merkmale fest zusammengehalten werden müssen. Von unten aber, nicht von oben, muss das Gebäude des Systems aufgeführt werden. »Eine gleichzeitige Auflösung der bisherigen Fascioliden in mehrere Familien« dürfte kaum in der näheren Zukunft möglich werden. Vielmehr hat man, soviel ich verstehe, durch sorgfältige Vergleichung der vorhandenen, *vorher ihrerseits wohl begründeten* Unterfamilien Ähnlichkeiten und Unterschiede aufzusuchen, die einen Leitfaden zum Herausfinden der natürlichen Familien abgeben können. Mit Bezug hierauf möchte ich aber einen Ausspruch LÜHE's citieren,¹⁾ der vor dem voreiligen Aufstellen neuer Gattungen warnen sollte, den ich aber mit einer kleinen Veränderung mit mehr Recht auf die Familienbildung beziehen zu können glaube. »Doch hat dies meiner Ansicht nach Zeit, bis wir erst die verwandtschaftlichen Beziehungen der betreffenden Gattungen (bei LÜHE Arten!) unter sich vollständiger zu überblicken vermögen.«

Auch in diesem Punkte muss ich mich LOOSS anschliessen und die einzige von ihm bis jetzt aufgestellte Familie der Gorgoriden als allem Anscheine nach nur wirklich verwandte Formen einschliessend d. h. als natürlich anerkennen. Um auch spezieller zu zeigen, wie ich mir die Umgrenzung der natürlichen Familien denken möchte, will ich auf die LÜHE'sche Familie der Plagiorchiden eingehen. Darin führt er zusammen die LOOSS'schen Unterfamilien *Lepodermatinae*, *Brachycæliinae*, *Pleurogenetinae*, *Dicrocæliinae* und die Gattungen *Glossidium*, *Styphlodora*, *Eno-*

¹⁾ Über einige Distomen aus Schlangen und Eidechsen (Centralbl. f. Bakt. etc. 1 Abth. Bd. XXVIII, 1900, p. 56).

diotrema, *Cymatocarpus*, *Haplometra*, *Hæmatoloechus*, *Macrodera*, *Opisthogonimus* und *Anchitrema*, sämtliche Formen nur dadurch verbunden, dass »die Hoden, sei es symmetrisch, sei es schräg hinter einander dicht hinter dem Bauchsaugnapf liegen und der zwischen ihnen hindurch verlaufende Uterus seine Hauptentwicklung hinter ihnen findet, während gleichzeitig die Dotterstöcke in mehr oder weniger zahlreichen Follikeln an den Seiten (häufig auch nur am Vorderende) des Körpers gelagert sind.« Hier wie in anderen Fällen nimmt LÜHE also nur die allgemeine Lagerung der Keimdrüsen und den Verlauf des Uterus in Betracht. Gerade in dieser Hinsicht scheinen mir aber die Ausführungen LOOSS' bei *Anchitrema* (p. 636 seines »Versuches«), auf die ich verweise, sehr beachtenswert zu sein, und LÜHE¹⁾ hat auch selbst sich mit ihnen vollkommen einverstanden erklärt. Bei der Zusammenstellung seiner Familien scheint mir LÜHE die, meines Erachtens, unrichtige Methode zu benützen, die eine Gattung durch verbindende Merkmale an die andere zu knüpfen und so fortzufahren, ohne die Entfernung zwischen den Enden der Kette in Betracht zu nehmen. So ist er betreffs seiner Plagiorchiden von den Lepodermatinen, die den so zu sagen Kern seiner Familie bilden, via *Anchitrema* zu *Dist. mutabile* MOL. gekommen und weiter davon zu den Dicrocæliinen hinübergelangt. Meiner Meinung nach können aber zwei so vielfach verschiedene Unterfamilien wie die Endglieder dieser Kette unmöglich in derselben natürlichen Familie stehen. Ich würde vielmehr natürlicher finden, die Dicrocæliinen als den Kern einer besonderen Familie bildend zu betrachten und das *Dist. mutabile* als ein innerhalb dieser Familie nach *Anchitrema* hin zeigendes Glied aufzufassen, wie ja z. B. innerhalb den Fascioliden *Hapalotrema* deutlich nach der Richtung der Schistosomiden hinweist. Nicht unmöglich dürfte es schon jetzt sein, aus den Plagiorchiden LÜHE's drei grössere Gruppen auszuscheiden, die möglicherweise natürliche Familien sind, jedenfalls aber mir den Begriff dieser eher zu erfüllen scheinen als es die LÜHE'schen Gruppen thun. Um da zunächst von

¹⁾ Über Hemiriden I. c. p. 487.

den Lepodermatinen auszugehen, scheint mir eine recht wohl geschlossene Gruppe um diese Unterfamilie sich sammeln zu lassen. Ich meine die folgenden Gattungen *Glossidium*, *Styphlodora*, *Enodiotrema*, *Cymatocarpus*, *Oistosomum* und weiter mehrere einzelne Arten, welche wahrscheinlich Typen besonderer Gattungen sind, wie *Dist. nigrovenosum* BELL., *D. pulvinatum* BRN. und *D. ovofarctum* mihi. Ich habe zwar nicht alles so genau geprüft, dass ich definitiv zu behaupten wage, dass in dieser Gruppe eine natürliche Familie zu erblicken ist. Ich halte es aber für nicht unwahrscheinlich. Ebenso könnten die *Brachycælinæ* und die *Pleurogenetinae* eine zweite Gruppe bilden, während die *Dicrocæliinen* zusammen mit *D. mutabile* MOL. und *D. sociale* LHE. eine dritte darstellen würden. Immerhin bleibt ein noch ungeteilter Rest übrig. Die Merkmale, welche diese Gruppen zusammenfügen, fallen ja leicht ins Auge, und meine Ansichten über die Begrenzung der natürlichen Familien dürften aus diesen Erörterungen hervorgehen.

Eine der Familien LÜHE's, die *Clinostomiden*, fällt ziemlich vollständig mit der letzten der drei Hauptgruppen zusammen, in welche LOOSS in seinem »Versuche« in »Ermangelung eines besseren Einteilungsprinzips« die Distomen einordnete und zwar dabei mit der Bemerkung, dass es sich um eine artificielle, nur auf oberflächliche Ähnlichkeit gegründete Einteilung handelte. Dass die alte Gattung *Clinostomum* LEIDY in mehrere aufgeteilt werden muss, scheint mir unzweifelhaft. BRAUN hat ja auch einige Arten schon ausgeschieden und für sie den alten unseligen Namen *Mesogoninus* MONT. fixiert. Eine Unterfamilie *Clinostominae* wird für diese Gattungen zu bilden sein. Wenn ich nun einen Familien-genossen zu dieser Gruppe suchen würde, wüsste ich keinen anderen als den hier neubeschriebenen *Nephrocephalus* zu nennen, der dann einer zweiten Unterfamilie zu zugehören hätte. Auf diese Weise würde meines Erachtens eine natürliche Familie *Clinostomidae* zustande kommen, in die weder *Harmostomum* noch *Hupalotrema* eintreten könnten. Ich kann also die Familien LÜHE's nicht als natürlich anerkennen und betone nochmals, dass ich glaube, das Aufstellen der Familien könne im Allgemeinen

noch gute Zeit haben bis durch eine fortgesetzte Ausarbeitung der natürlichen Gattungen eine breitere Basis dafür gewonnen ist. Die alte Gattung *Distomum* muss indessen augenscheinlich in systematischem Rang noch weiter steigen und von Familie zu Tribus befördert werden, denn die entsprechenden Familien können doch nicht, wie es LÜHE thut,¹⁾ ohne Weiteres den übrigen Digenenfamilien nebengeordnet werden (darunter den ungeteilten Monostomiden!), sondern müssen ihrerseits durch eine höhere systematische Einheit zusammengehalten werden.

Zuletzt möchte ich auch die jetzt allgemein geltenden Hauptgruppen, welche die Klasse der Trematoden zusammensetzen, kurz besprechen. Ich bin nämlich lebhaft überzeugt, dass die zuerst von MONTICELLI vorgeschlagene und später durch BRAUN's Acceptierung in seiner Bearbeitung der Trematoden für BRONN zu allgemeinerer Anerkennung gelangte Einteilung in drei Ordnungen unhaltbar ist, insofern als ich das Aufstellen der besonderen Ordnung *Aspidocotylea* MONT. für die Aspidobothriden als unberechtigt betrachte. Ich meine, dass man statt dessen zu der älteren Einteilung P. J. VAN BENEDEN's zurückzukehren hat, wobei die Aspidobothriden den Digenen ohne Weiteres einverleibt werden können. Auch die älteren Namen der Ordnungen, *Monogenea* und *Digenea* müssen in ihre Rechte wiedereingesetzt werden, da sie ja unbedingt Priorität haben. Dagegen sind die drei auf Cotylea endigenden Ordnungsnamen MONTICELLI's, wenn meine Ansicht richtig ist, zu streichen. Meine Gründe für das Obige sind nun die folgenden.

Der anatomische Bau der Aspidobothriden weicht in keiner Hinsicht mehr von demjenigen typischer Digenen, wie z. B. der Distomen ab, als der Bau der Gasterostomen, an deren wahrer digenetischer Natur doch niemand zweifelt. Der Aufbau der weiblichen Genitalorgane ist, wie es JÄGERSKIÖLD²⁾ in seiner Schilderung der Anatomie von *Macraspis* besonders aufweist, ein typisch

¹⁾ Die Heminriden l. c. p. 488.

²⁾ Über den Bau von *Macraspis elegans* OLSS. (Öfvers. Vet. Ak. Fhdl. Bd. 1899, p. 56).

digenetischer mit LAURER'schem Kanale, der später auch von LOOSS¹⁾ bei *Lophotaspis vallei* (Stoss.) aufgefunden ist. Wenn auch die männlichen Genitalien ein wenig mehr eigenartig als die weiblichen gebaut sind, bieten sie doch durchaus nichts dar, was eine Sonderstellung der Gruppe motivieren könnte. Dasselbe gilt, wie BRAUN selbst bestätigt,²⁾ für den Excretionsapparat, die Eier und die Larvenformen. Der Digestionsapparat weicht nicht von dem typischen Bau mehr ab als der der Gasterostomen, im Gegenteil, er mündet ja am Vorderende aus durch einen Mundtrichter. Was zuletzt den schildförmigen Haftapparat betrifft, so sind auch unter den Digenen s. str. mehrere Typen von Haftorganen zur Entwicklung gelangt, so dass ich ihm durchaus keine grössere systematische Bedeutung beimessen kann, um so mehr als er bei einem unzweifelhaften Aspidobothriden, *Stichocotyle*, durch Saugnäpfe ersetzt ist. Überhaupt dürften auch die Haftorgane, da sie sich ja durch Anpassungen leichter als die übrigen Organsysteme verändern müssen, diesen an systematischem Wert eher nachstehen als umgekehrt. Also kann ich in der Organisation unmöglich einen Anhaltspunkt für die Sonderstellung der Gruppe gewinnen.

Es bleibt dann übrig in Betracht zu nehmen, ob sie auf entwicklungsgeschichtliche Thatsachen besser gegründet werden kann. Sowohl MONTICELLI wie BRAUN haben die direkte Entwicklung bei *Aspidogaster conchicola* als den Hauptgrund für die Aufstellung der dritten Ordnung *Aspidocotylea* hervorgehoben und diese Gruppe gewissermassen als ein Bindeglied zwischen Monogenen und Digenen aufgefasst. Ich muss dabei zunächst bemerken, dass es mir inkonsequent von diesen Verfassern zu sein scheint, zuerst die auf die Entwicklung basierte BENEDEN'sche Einteilung zu verwerfen und die Namen *Monogenea* und *Digenea* durch andere, die auf morphologische Charaktere gegründet sind,

¹⁾ Notizen zur Helminthologie Egyptens IV (Centralbl. f. Bakt. Bd XXI, 1901. Die da beschriebene *Lophotaspis adhaerens* n. g. n. sp. dürfte nämlich unzweifelhaft mit *Aspidogaster vallei* Stoss. identisch sein.

²⁾ Trematoden in BRONN's Klassen und Ordnungen des Thierreichs p. 888.

zu ersetzen und dann selbst in Bezug auf die Aspidobothriden gerade das grösste Gewicht auf die für die ganze Gruppe vermeintlich charakteristische Entwicklungsweise zu legen. Aber auch abgesehen davon, dass die Entwicklungsweise an und für sich bei der Systematisierung nicht entscheidend sein darf, wenn morphologische Thatsachen in eine andere Richtung zeigen, scheint mir doch die Ordnung *Aspidocotylea* unhaltbar. Es dürfte nämlich als ziemlich sicher gelten können, dass die direkte Entwicklung bei *Aspidogaster conchicola* im nächsten Zusammenhang mit ihrem Parasitieren in einem wirbellosen Tiere steht und dass, wie LEUCKART¹⁾ besonders hervorgehoben hat, diese Entwicklung als eine sekundär verkürzte aufzufassen ist, indem der Wurm schon im Zwischenwirte zu völliger Reife gelangt ist. Für *Stichocotyle* steht eine Entwicklung mit Zwischenwirt fest, und dasselbe wird sich wahrscheinlich mit der Zeit als auch für die übrigen in Wirbeltieren schmarotzenden Aspidobothriden geltend erweisen. Wenigstens muss eine solche Annahme bei mangelnden Kenntnissen der thatsächlichen Verhältnisse viel näher liegen als die andere. Ich bezweifle also, dass stichhaltige Gründe für die MONTICELLI'sche Dreiteilung der Trematoden angeführt werden können.

Nachschrift. Das von JÄGERSKIÖLD (Centralbl. f. Bakt. etc. Bd. XXX, 1901) neulich näher geschilderte *Tocotrema ex-pansum* (CREPL.) scheint mir bei der Beurteilung der Prinzipien, denen BRAUN und LÜHE bei ihren Familieneinteilungen gefolgt sind, ein sehr einleuchtendes Beispiel abzugeben. Diese Form wäre ja nämlich bei konsequenter Befolgung dieser Prinzipien der BRAUN'schen Familie der Opisthorchiiden einzuverleiben, während der Gattungs- oder wenigstens Unterfamiliengenosse *Tocotr. lingua* (CREPL.) von LÜHE in einer ganz anderen Familie untergebracht worden ist.

¹⁾ Die thierischen Parasiten des Menschen, 2 Aufl., Bd. I Abth. 1 p. 150.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademins Bibliotek.

(Forts. från sid. 12.)

Roma. *Italiensku regeringen.*

Le opere di Galileo Galilei. Vol. 11. Firenze 1901. 4:o.

— *Reale accademia dei Lincei.*

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Rendiconti. (5) Vol. 10 (1901): Sem. 2: Fasc. 10—11. 8:o.

Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

Atti. (5) P. 2: Notizie degli Scavi. 1901: 9—10. 4:o.

S:t Pétersbourg. *Institut impérial de médecine expérimentale.*

Archives. T. 8: N:o 5. 1901. 4:o.

— *Russisch-Kaiserliche Mineralogische Gesellschaft.*

Verhandlungen. (2) Bd 39: Lief. 1. 1901. 8:o.

Shanghai. *Meteorological society.*

Annual report. 8 (1899) & Append. 8:o & 4:o.

Sydney. *Australian museum.*

Report of the trustees. Year 1900. Fol.

— *Linnean society of N. S. Wales.*

Proceedings. Vol. 26 (1901): P. 2. 8:o.

Tokyo. *Mathematico-physical society at the Imp. university.*

Tōkyō sūgaku-buturigaku kwai kizi. No 8: 6. 1901. 8:o.

Topeka. *Kansas academy of science.*

Transactions. Vol. 17 (1899—1900). 8:o.

Washington. *Academy of sciences.*

Proceedings. Vol. 3: pp. 569—600. 1901. 8:o.

— *U. S. Weather Bureau.*

Monthly weather review. 1901: 9. 4:o.

— *U. S. Department of agriculture.*

Report of the secretary. 1901. 8:o.

Bureau of animal industry. Bulletin. No. 33. 1901. 8:o.

Division of botany. Bulletin. No 29. 1901. 8:o.

Division of botany. Contributions from the U. S. National Herbarium.

Vol. 5: No. 6. 1901. 8:o.

Office of experiment stations. Bulletin. No. 101—102. 1901. 8:o.

Division of forestry. Bulletin. No. 31. 1901. 8:o.

— *U. S. Geological survey.*

Annual report. 21 (1899/1900): P. 1, 6: [1—2]. 4:o.

Wien. *K. K. Geologische Reichsanstalt.*

Jahrbuch. Bd 51 (1901): H. 1. 8:o.

Zürich. *Schweizerische geodätische Kommission.*

Das Schweizerische Dreiecknetz. Bd 9. 1901. 4:o.

Af Herrar Wahlström & Widstrand.

Bilder ur Nordens flora. Efter Palmstruch m. fl. Svensk Botanik af

C. A. M. LINDMAN. H. 4. 1901. 8:o.

Af Madame Veuve Godin, Guise.

Le Devoir. T. 25 (1901): 12. 8:o.

Af Herr Emanuel Öhlén.

Officiell Handbok innehållande underrättelser angående Canada. Ottawa 1900. 8:o.

Af utgifvarne:

La feuille des jeunes naturalistes, publ. par A. DOLLFUS. Catalogue de la bibliothèque. Fasc. 31: P. 1—2. 1901. 8:o.

The American monthly microscopical Journal, ed. by W. C. DOBSON. Vol. 22 (1901): N:o 1—7. 8:o.

Af författarne:

BOUCARD, A., Les oiseaux utiles et nuisibles. Paris 1901. 8:o.

GAUTIER, R., Résumé météorologique de l'année 1899 pour Genève et le Grand Saint Bernard. Genève 1900. 8:o.

HECK, O., Physiologie: Die menschlichen Sinnesthätigkeiten, Bewusstsein, Wille . . . Homberg 1901. 8:o.

HELLMAN, G., Regenkarte der Provinzen Brandenburg und Pommern. Berlin 1901. 8:o.

HIPPAUF, H., Die Rectification und Quadratur des Kreises. Breslau 1901. 8:o.

KOPS, J., & VAN EEDEN, F. W., Flora Batava. Afl. 333—336. Haarlem 1901. 4:o.

LEVASSEUR, E., Histoire des classes ouvrières et de l'industrie en France avant 1789. Éd. 2. T. 1—2. Paris 1900—1901. 8:o.

WINKLER, C., Lehrbuch der technischen Gasanalyse. Aufl. 3. Lpz. 1901. 8:o.



Utgifningsdag 11 febr. 1902.

Stockholm 1902. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 59.

1902.

N:o 2.

Onsdagen den 12 februari.

INNEHÅLL.

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 49.
JOHNSON, K. R., La capacité d'un conducteur pour l'unité de longueur . . .	> 53.
EULER, H., Zur Theorie der chemischen Reaktionsgeschwindigkeit . . .	> 57.
BOTHEN, C. O., Nytt fynd af svarthalsade buskaqvätten i Sverige . . .	> 65.
BENEDICKS, C., Elektriska ledningsmotståndet hos stål och rent järn . .	> 67.
Skänker	sidd. 51, 64, 75.

Anmäldes att Större Akademiska Konsistoriet i Lund genom skrifvelse meddelat, att docenten i historia vid Lunds universitet L. U. A. WEIBULL blifvit utsedd till Letterstedtsk stipendiat för 1902 samt att instruktion för honom blifvit i vederbörlig ordning utfärdad.

Reseberättelser för af dem med understöd från Akademien företagna resor inom landet hade inkommit från docenten R. SERNANDER och fil. licent. H. HESSELMAN.

Det Letterstedtska priset för utmärkte författare och viktiga upptäckter beslöt Akademien tilldela professorn och intendenten för Riksmuseets afdelning för fossila djnr J. E. G. HOLM för hans under förlidet år utgifna arbete: »Kinnekulle, dess geologi och den tekniska användningen af dess bergarter».

Det Letterstedtska priset för förtjänstfulla öfversättningar beslöt Akademien fördela i två lika delar, af hvilka den ena tillerkändes bankofullmäktigen, lektor R. TÖRNEBLADH för hans öfversättning af H. W. Longfellow's dikt »Evangelina» samt den

andra åt öfverbibliotekarien, grefve C. J. G. SNOILSKY för hans öfversättning af Göthes »Visor och dikter».

De från 1901 disponibla Letterstedtska räntemedlen för maktpåliggande vetenskapliga undersökningar anvisade Akademien åt den zoologiska stationen vid Kristineberg för att sätta densamma i tillfälle att använda ångbåt vid begagnandet af trawl för undersökningar i Kattegat, hvarjämte en från föregående år uppkommen besparing å dessa räntemedel tilldelades riksantikvarien H. O. HILDEBRAND för gäldandet af en del af omkostnaderna för de af honom utförda gräfningarne å Hven vid lämningarne af Uranienborg och Stjerneborg.

Genom anställdt val kallade Akademien sekreteraren för Smithsonian Institution professor S. P. LANGLEY till utländsk ledamot af fjärde klassen samt f. d. finska senatoren m. m. L. H. S. MECHELIN till utländsk ledamot af åttonde klassen.

På tillstyrkan af kommitterade antogos följande inlämnade afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter:

i Akademiens Handlingar: 1:o) The Plankton of the North Sea and the Skagerak in 1900 af professor P. T. CLEVE; 2:o) Bidrag till en öfversigt af de i Sveriges färskvatten hittills iakttagna arterna af familjen Harpacticidæ af professor W. LILLJEBORG;

i Bihaget till Akademiens Handlingar: 1:a) Bidrag till kännedomen om de svenska *Saxifraga*-arternas yttre byggnad och individbildning af ingenjör GUNNAR LINDMARK; 2:a) Om adventiv lökbildning på stjälken hos *Lilium candidum* L. af densamme; 3:e) On the female genital organs of *Cryptoprocta* af docenten E. LÖNNBERG; 4:e) Ueber das Holmium af lektor S. FORSLING; 5:e) Resultaten af den internationella undersökningen af norra Europas djupa sjöar och innanhaf år 1900 af professor O. PETTERSSON; 6:e) Precisionsnivelement öfver Öresund 1896 af professor P. G. ROSÉN samt 7:e) Applications nouvelles de la fonction exponentielle af docenten H. VON KOCH;

i Öfversigten: de i innehållsförteckningen uppräknade fyra uppsatserna.

Följande skänker annäldes:

Till Riksmuseum.

Af godsegaren och kommandören HARALD RÖHSS å Munkeberg vid Hjo en summa af 3,000 kronor för att åt den entomologiska afdelningen förvärfva framl. Doktor C. J. E. HAGLUNDS utmärkta samling af Hemiptera.

Till Akademien.

Af enkefru A. EKMAN f. KOCH en af hennes aflidne man professor F. L. EKMAN vid flere viktiga undersökningar använd anemometer.

Till Vetenskaps-Akademins Bibliotek.

Stockholm. *Meteorologiska central-anstalten.*

Månadsöfversigt af väderleken i Sverige. Årg. 21 (1901). Fol.

— *K. Statistiska Centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. A: N.F. 41; G: N.F. 42. 1899—1900. 4:o.

De kommunalt skattskyldige fördelade med hänsyn till deras rösträtt vid val till riksdagens andra kammare samt antalet jordtorpare. Prelim. summarisk redogörelse. År 1900. 4:o.

— *Entomologiska föreningen.*

Entomologisk tidskrift. Årg. 22 (1901): H. 1—4. 8:o.

— *Generalstaben.*

Rikets allmänna kartverk, 1 : 200,000. Bl. 79. 1901. Fol.

Karta öfver Sverige, 1 : 100,000. Bl. 105. 1901. Fol.

— *Stockholms Högskola.*

Handlingar ang. förvärfvande af examensrätt för och inrättande af juridisk fakultet vid Sthlms Högskola. Sthlm 1901. 8:o.

— *Karolinska Mediko-kirurgiska Institutet.*

Berättelse 1900/1901. 8:o.

— *Kongl. Jordbruksdepartementet.*

3. 1901. 8:o.

— *Kongl. Kommittén för gradmätning på Spetsbergen.*

Rapporter. 1901. 8:o.

— *Sabbatsbergs sjukhus.*

Årsberättelse. 21—22 (1899/1900). 8:o.

— *Svenska sällskapet för antropologi och geografi.*

Ymer. Årg. 21 (1901): H. 4. 8:o.

— *Svenska trädgårdsföreningen.*

Tidskrift. Ny följd. 1901: N:r 9. 8:o.

— *Sveriges geologiska undersökning.*

Ser. Ba. Geologisk öfversiktskarta öfver Sveriges berggrund med beskrifning. N:o 6. 1901. 8:o & Fol.

Lund. *Skånska trädgårdsföreningen.*

Tidskr. Årg. 1 (1877)—10 (1886) & Suppl.—25 (1901). 8:o.

- Amsterdam.** *Wiskundig genootschap.*
 Nieuw archief voor wiskunde. (2) D. 5: St. 3. 1901. 8:o.
 Programma van jaarlijksche prijsvragen. Jaar 1902. 8:o.
 Revue semestrielle des publications mathématiques. T. 10: P. 1 (1901). 8:o.
- Australia.** *Australasian association for the advancement of science.*
 Report. Vol. 8 (1900, Melbourne). 8:o.
- Baltimore.** *Johns Hopkins university.*
 Circulars. Vol. 21 (1901/1902): N:o 154. 4:o.
- Batavia.** *R. Magnetical and Meteorological Observatory.*
 Observations. Vol. 22: P. 2 (1882/99). Fol.
 Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Jaarg. 22 (1900). 8:o.
- Bergen.** *Museum.*
 SABS, G. O., An account of the Crustacea of Norway. Vol. 4 (Copepoda, Calanoida): P. 3-4. 1902. 8:o.
- Berlin.** *K. Preussische Akademie der Wissenschaften.*
 Sitzungsberichte. 1901: 39-53. 8:o.
 — *K. Preussisches meteorologisches Institut.*
 Witterung. 1901: 1-12. 4:o.
 — *K. Sternwarte.*
 Bahnelemente, Oppositionsaugaben u. Oppositions-Ephemeriden der kleinen Planeten. 1902. 8:o.
- Bombay.** *Government observatory.*
 Brief sketch of the meteorology of Bombay presidency. 1900-1901. Fol.
- Boston.** *American academy of arts and sciences.*
 Proceedings. Vol. 37 (1901/1902): N:o 4-5. 8:o.
- Braunschweig.** *Verein für Naturwissenschaft.*
 Jahresbericht. 12 (1899/1901). 8:o.
- Bruxelles.** *Académie Royale de Belgique.*
 Classe des lettres... Bulletin. 1901: N:o 11. 8:o.
 > des sciences. Bulletin. 1901: N:o 11. 8:o.
 — *Musée du Congo.*
 Annales. Botanique. Sér. 3. Fasc. 2. 1901. Fol.
 DE WILDEMAN, É., Observations sur les Apocynacées à latex recueillies par M. L. Gentil. Bruxelles 1901. 8:o.
- Budapest.** *K. Ungarische Geologische Anstalt.*
 Földtani közlöny (Geolog. Mittheilungen). Kötet 31 (1901): Füz. 5-9. 8:o.
 Jahresbericht. 1899. 8:o.
- Buenos Aires.** *Museo Nacional.*
 Comunicaciones. T. 1 (1901): N:o 10. 8:o.
 — *Sociedad científica Argentina.*
 Anales. T. 52 (1901): Entr. 4-6. 8:o.
- Buitenzorg.** *Jardin botanique.*
 Bulletin. N:o 9-11. 1901. 8:o.

(Forts. à sid. 64.)

La capacité d'un conducteur pour l'unité de longueur.

Par K. R. JOHNSON.

(Communiqué le 12 Février par S. ARRHENIUS.)

Dans une communication précédente j'ai considéré la capacité d'un fil conducteur pour l'unité de longueur comme une constante en ajoutant la restriction que cette supposition ne possède qu'une validité approchée. Je crois que la recherche suivante doit présenter sur ce point un peu d'intérêt.

Le problème peut être limité à chercher une surface de révolution qui jouit de la propriété de rendre constante la capacité pour l'unité de longueur.

Soit

$$(1) \quad y = f(x)$$

l'équation de la courbe génératrice et l'abscisse son axe de révolution. Si l'on désigne par c la capacité pour l'unité de longueur, l'élément de la surface limitée par deux sections normales à l'axe de x dans les points x et $x + dx$ aura la capacité cdx et la quantité d'électricité qui est répandue sur cet élément est représentée par $cdxV$. Mais en désignant par ϱ la densité électrique au point (x, y) ou, ce qui revient au même, en tous les points de l'élément à considérer, la quantité d'électricité qui est distribuée sur cet élément peut être exprimée par

$$(2) \quad 2\pi\varrho y ds = 2\pi\varrho y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

d'où l'on tire

$$cVdx = 2\pi qy \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

ou

$$cV = 2\pi qy \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ainsi, il faut que deux conditions différentes soient remplies par la densité électrique, savoir:

1° que la distribution électrique donne à la surface de révolution le caractère d'une surface équipotentielle.

2° et que la densité est proportionnelle à l'inverse de la normale de la surface ou, ce qui revient au même, de la courbe génératrice, selon l'équation (2).

Or, c'est un théorème bien connu qu'une ellipsoïde de révolution constitue une surface équipotentielle, si la densité est proportionnelle en chaque point à la normale de l'ellipsoïde, ¹⁾ et ainsi, les deux conditions deviennent identiques pour une ellipsoïde de révolution. Si l'équation de la courbe génératrice de l'ellipsoïde est

$$(1 a) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la densité électrique est

$$(2 a) \quad q = \frac{Q}{4\pi ab^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}$$

formule, laquelle est identique à l'équation (2) pourvu que l'on ait

$$(3) \quad cV = \frac{Q}{2a}.$$

Comme le potentiel V prend la même valeur pour tous les points situés à la surface, nous pouvons évaluer ce potentiel par rapport à un point arbitraire p. ex. au sommet ($x = a$, $y = 0$), ce qui donne

¹⁾ Voir JAMIN et BOUTY, Cours de Physique, Tome I, Fascic 3, p. 113, 1882.

$$V = 2\pi \int_{-a}^{+a} \frac{y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = \frac{Q}{2a} \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ax + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x^2}}$$

et en éliminant le rapport $\frac{Q}{V}$ au moyen de la formule (3) on a

$$(4) \quad \frac{1}{c} = \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ax + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x^2}}.$$

Cas d'un sphéroïde. ($b > a$). Dans ce cas l'ellipse génératrice a ses foyers situés sur l'axe ordonné, et en introduisant l'excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$, on a

$$\frac{1}{c} = \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ax - \frac{b^2 e^2}{a^2} x^2}} = \frac{a}{be} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(1 - 2e^2) \right]$$

ou

$$(I) \quad c = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2} \cdot \arcsin 2e \sqrt{1 - e^2}}.$$

Si le sphéroïde diffère très-peu d'une sphère, la formule

$$c = \frac{1}{2[1 - \frac{10}{6}e^2]}$$

donne une valeur approchée de la capacité pour l'unité de longueur, si l'on appelle le plus petit axe la longueur.

Cas d'une sphère. ($b = a$). Si l'excentricité e tend vers zéro, on a pour limite

$$(II) \quad c = \frac{1}{2}$$

dans la formule (I), résultat que l'on peut obtenir aussi par l'intégration directe de la formule (4).

Cas d'un ellipsoïde prolongé. ($b < a$). Si l'on introduit l'excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ et que l'on fait effectuer ensuite l'intégration dans la formule (4), il vient

$$(III) \quad c = \frac{e}{\log \left(\frac{1+e}{1-e} \right)}.$$

Ainsi, la capacité d'un ellipsoïde de révolution pour l'unité de longueur est une constante dont la valeur dépend seulement de l'excentricité de l'ellipse génératrice.

Cas d'un fil mince. Si le fil a la forme d'un ellipsoïde extrêmement prolongé, l'axe $2a$ correspond à la longueur et l'axe $2b$ au diamètre maximal. En introduisant dans la formule (III)

$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ au lieu de e , elle peut s'écrire

$$c = \frac{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}}{2 \log \frac{a}{b} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)}$$

de quoi l'on tire la valeur approchée

$$(IV) \quad c = \frac{1}{2 \log \frac{a}{b}}.$$

Ainsi, il a été montré que l'on peut considérer la capacité d'un fil droit comme exactement constante, si la surface du fil prend la forme d'un ellipsoïde de révolution, c'est-à-dire que l'épaisseur du fil décroît vers les extrémités. Mais pour un fil conducteur ordinaire, qui a un rayon constant, la surface devient supérieure à celle demandée ci-dessus, et il s'ensuit que la capacité c sera augmentée un peu vers les extrémités.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1902. N:o 2.
Stockholm.

Zur Theorie der chemischen Reaktionsgeschwindigkeit.

VON HANS EULER.

(Mitgeteilt am 12. Februar 1902 von S. ARRHENIUS.)

Vor kurzer Zeit hat Herr R. WEGSCHEIDER meine Arbeiten¹⁾ über die Theorie katalytischer Reaktionen einer Kritik unterzogen,²⁾ die offenbar durch einige principielle Missverständnisse veranlasst ist.

Die betreffenden Punkte sollen in Folgendem klargelegt werden.

Herr WEGSCHEIDER sagt zu Beginn seiner Abhandlung:

»EULER . . . leitet . . . für die Geschwindigkeit der Esterverseifung unter Berücksichtigung der Gegenreaktion (Esterbildung) die Gleichung ab:

$$\frac{dE}{dt} = K \{ [\text{CH}_3\text{CO}][\text{C}_2\text{H}_5\text{O}] \times [\text{H}][\text{OH}] - [\text{C}_2\text{H}_5\text{O}][\text{H}] \times [\text{CH}_3\text{CO}][\text{OH}] \}$$

wo $[\text{CH}_3\text{CO}]$ u. s. w. die Concentration der CH_3CO -Ionen u. s. w. bedeuten.

Die erwähnten Concentrationen treten bei seiner Ableitung in die Gleichung dadurch ein, dass die Gleichungen für die Dissociationsgleichgewichte des Aethylalkohols, des Aethylacetats, der Essigsäure und des Wassers benutzt werden. Indem er diese

¹⁾ Ber. d. d. chem. Ges. 33, 3202, 1900. — Öfversigt af Svenska Vet. Akad. Förh. 1899 N:r 4. — Zeitschr. f. phys. Chemie 36, 641, 1901.

²⁾ Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Cl. CX, II a. — Zeitschr. f. phys. Chemie 39, 257, 1901.

Gleichgewichtsbedingungen in die Geschwindigkeitsgleichung für die Reaktion zwischen Wasser, Ester, Säure und Alkohol einführt, macht er die Annahme dass die Gleichgewichtsbedingungen für die vier Dissociationen in jedem Augenblicke erfüllt sind, dass also diese vier Gleichgewichte sich mit unendlich grosser Geschwindigkeit einstellen.»

»EULER scheint vorauszusetzen, dass beispielsweise das $[\text{CH}_3\text{CO}]$ links vom Minuszeichen in der Klammer *verschieden* sei von dem $[\text{CH}_3\text{CO}]$ rechts vom Minuszeichen, indem das eine die aus dem Ester, das andere die aus der Säure entstandenen CH_3CO -Jonen bedeuten soll. Diese Voraussetzung ist aber irrig; die $[\text{CH}_3\text{CO}]$ u. s. w. bedeuten links und rechts vom Minuszeichen in der Klammer die Gesamtconcentrationen der CH_3CO -Jonen u. s. w. in der Lösung und haben daher links und rechts vom Minuszeichen denselben Wert. Die Klammer ist also identisch Null und daher ergibt sich die Reaktionsgeschwindigkeit gleich Null.»

Diese ganze Bemerkung Herrn WEGSCHEIDERS wäre vollkommen berechtigt, falls ich wirklich jemals die Annahme gemacht hätte, dass die Dissociationsgleichgewichte sich mit unendlicher Geschwindigkeit einstellen. Dies ist aber keineswegs der Fall, wie aus Folgendem hervorgeht:

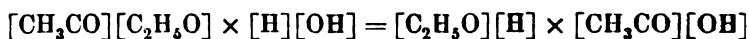
In der ersten der von WEGSCHEIDER citierten Abhandlungen habe ich (S. 3204) zunächst für das *Gleichgewicht*

$$\frac{\text{Ester} \times \text{Wasser}}{\text{Säure} \times \text{Alkohol}}$$

in Analogie mit dem Hydrolyisationsgleichgewicht eines teilweise hydrolysierten Salzes die Formel gegeben:

$$1 = \frac{K_1 [\text{Ester}] K_4}{K_2 [\text{Alkohol}] K_3 [\text{Essigsäure}]}.$$

Diese Gleichung kann in folgender Form geschrieben werden:



d. h. Gleichgewicht ist dann eingetreten, wenn das Ionenprodukt der in der einen Richtung reagirenden Körper gleich dem Ionenprodukt der in der anderen Richtung reagirenden Körper ist.

Also mit anderen Worten:

Ist die besprochene Reaktion vollständig abgelaufen, ist also das System der 4 Stoffe in die Gleichgewichtslage gekommen, dann sind auch die vier Dissociationsgleichgewichte

$$\begin{aligned}K_1 [\text{Ester}] &= [\text{CH}_3\text{CO}][\text{C}_2\text{H}_5\text{O}] \\K_2 [\text{Alkohol}] &= [\text{C}_2\text{H}_5\text{O}][\text{H}] \\K_3 [\text{Säure}] &= [\text{CH}_3\text{CO}][\text{OH}] \\K_4 &= [\text{H}][\text{OH}]\end{aligned}$$

erfüllt.¹⁾

Ich kann nicht sehen, inwiefern das bis jetzt gesagte bestritten werden kann, wenn die einfachsten und oft bestätigten Folgerungen der Dissociationstheorie bezüglich der Hydrolyse von Salzen zugegeben werden. Die Abhängigkeit des Hydrolysegrades der Ester von der Stärke der Säure habe ich experimentell nachgewiesen.²⁾

Wenn also WEGSCHEIDER in seiner Zusammenfassung (S. 54) sagt: »Die von EULER angenommene Analogie zwischen der Esterverseifung und der Hydrolyse von Salzen besteht nicht«, so wäre es sehr erwünscht dass diese Kritik exakter begründet wird.

2. Aus den gleichen Voraussetzungen, ohne Zuhülfenahme weiterer Annahmen ergibt sich ferner, dass *nur dann*, wenn das System ins Gleichgewicht gekommen ist, die 4 Dissociationsgleichungen erfüllt sind.

Nach der von mir l. c. gegebenen Ableitung ist gerade die Einstellung der 4 Dissociationsgleichgewichte dasjenige was die Reaktion veranlasst; oder, um die, wie mir schien sehr einfache Sache noch weiter zu zergliedern: Das System Ester-Wasser ist sowie dasjenige Alkohol-Säure instabil, weil die in demselben vorhandenen Ionen-konzentrationen den vier Dissociationsbedingungen *nicht* genügen. Löse ich ein *g*-Molekül Ester in Wasser

¹⁾ Bezw. die 4 entsprechenden: $K_1 [\text{Ester}] = [\text{CH}_3\text{COO}][\text{C}_2\text{H}_5]$
 $K_2 [\text{Alkohol}] = [\text{C}_2\text{H}_5][\text{OH}]$
 $K_3 [\text{Säure}] = [\text{CH}_3\text{COO}][\text{H}]$
 $K_4 = [\text{OH}][\text{H}].$

²⁾ Dass nicht nur Salze in dieser Weise behandelt werden können, giebt Herr WEGSCHEIDER S. 5 l. c. selbst zu.

so hat das Jonenprodukt, sagen wir zur Zeit $t = 0$, also bei der Auflösung den Wert A . Löse ich ein g -Molekül Säure und ein g -Molekül Alkohol in der gleichen Menge Wasser so kommt zur Zeit $t = 0$ dem Jonenprodukt $[H][OH][CH_3COO][C_2H_5]$ der Wert Z zu. Beide Werte verändern sich so lange, bis jedes der beiden den Wert G erreicht hat, und zwar dann wenn die ganze Reaktion zu Ende gegangen ist; dann, und nur dann, wird

$$-\frac{dE}{dt} = K\{G - G\} = 0.$$

In jedem Moment während des Reaktionsverlaufes hat $A - Z$ einen endlichen Wert und es ist

$$\frac{dE}{dt} = K\{A - Z\}$$

d. h. die Reaktionsgeschwindigkeit ist proportional der Differenz der Jonenprodukte der in den beiden entgegengesetzten Richtungen reagierenden Körper.

Aus der gegebenen Darstellung ergibt sich direkt die Wirkungsweise eines Katalysators.

Bei dem äusserst geringen Wert, welchen der Dissoziationsgrad eines Esters haben muss, und bei dem sehr kleinen Betrag des Produktes $[H] \times [OH]$ wird das gesammte Jonenprodukt ausserordentlich klein. Chlorwasserstoffsäure kann deshalb schon in sehr grosser Verdünnung einen enormen Zuwachs des Jonenproduktes bedingen.

Herrn WEGSCHEIDERS letzte Ergebnisse sind um so auffallender, als Herr WEGSCHEIDER einige Wochen vorher sich in vollständiger Übereinstimmung mit meinem Princip befand.¹⁾ Der Autor wollte in dieser Arbeit zeigen, dass der Zerfall des Ammoniumnitrits als Jonenreaktion aufgefasst werden kann. Die Spaltung des Salzes NH_4NO_2 in $N_2 + 2H_2O$ wird durch Zusatz eines gleichjonigen Salzes katalytisch beschleunigt. Es heisst in der erwähnten Notiz:

¹⁾ Zeitschr. f. phys. Chem. 36, 543, 1901.

Ist im Volum V ein Mol. Ammoniumnitrit aufgelöst und hat dieses den Dissociationsgrad α , so sind die beiden Ionenkonzentrationen $\frac{\alpha}{V}$ und die Reaktionsgeschwindigkeit unter der Annahme dass die Ionen reagiren $\frac{k\alpha^2}{V^2}$, wo k eine Konstante ist. Im Volum V wird dann ausserdem ein Mol. eines gleichjonigen Salzes gelöst, wodurch der Dissociationsgrad des NH_4NO_2 auf α' erniedrigt wird.

Die in Molen ausgedrückte Menge der NH_4 oder NO_2 -Ionen, welche aus dem zweiten Salze stammen, sei β . Dann ist die Konzentration jener Jonengattung welche nur vom Ammoniumnitrit geliefert wird $\frac{\alpha'}{V}$, die Konzentration jener Jonengattung, welche von beiden Salzen geliefert wird $\frac{\alpha' + \beta}{V}$. Daraus ergibt sich die Reaktionsgeschwindigkeit $\frac{k\alpha'(\alpha' + \beta)}{V^2}$. Die Reaktionsgeschwindigkeit wird daher durch den Zusatz des zweiten Salzes zunehmen, wenn $\alpha'(\alpha' + \beta) > \alpha^2$. Das trifft aber jedenfalls zu.

»Nimmt man Ionenreaktion an«, sagt WEGSCHEIDER, so ... »beruht die Beschleunigung wesentlich auf der Vermehrung der Konzentration des einen Jons, welche den verzögernden Einfluss des Rückganges des Dissociationsgrades mehr als aufwiegt.«

Dies deckt sich offenbar mit dem Satz, dass die Katalyse in der Vermehrung einer (oder mehrerer) derjenigen Molekülarten (Ionen) besteht, durch welche die (nicht beschleunigte) Reaktion vor sich geht.

Auf die übrigen Punkte der besprochenen Arbeit Herrn WEGSCHEIDERS habe ich hier keine Veranlassung einzugehen.

II.

In neuester Zeit ist mehrfach wieder versucht worden, die Katalyse durch Zwischenreaktionen zu erklären ¹⁾ und diese Erklärungsweise ist gelegentlich der obigen Beschreibung des Vor-

¹⁾ Siehe z. B. J. BROOK, Zeitschr. f. phys. Chem. 37, 257, 1901.

ganges gegenübergestellt worden.¹⁾ Dazu ist zunächst zu bemerken, dass es sich hier wohl um zwei Darstellungen handelt, die einander keineswegs ausschliessen. Die Frage kann nur sein, welche Darstellung die allgemeinere und die einfachere ist.

Das Gebiet der »negativen Katalyse« lässt sich nun nach OSTWALD durch Zwischenreaktionen nicht beschreiben. WEGSCHEIDER ist bei seiner Ableitung der katalytischen Reaktionen als »Nebenwirkungen« auf Widersprüche zwischen Thermodynamik und Kinetik gestossen und zu Formeln gelangt, die wirklich nicht praktisch genannt werden können.

Gewiss kann man bei Einführung hinreichender Vereinfachungen auch unter Annahme von Zwischenreaktionen zu Formeln gelangen, die sich mit den Thatsachen decken.

Kehren wir zu unserem obigen Beispiel der Esterzersetzung zurück.

Einer Normallösung von Ester sei 1 Mol. Salzsäure zugesetzt. Es reagieren dann mit den Ionen des sich dissociirenden Esters erstens die Ionen des Wassers; ausserdem reagieren mit den Ionen des Esters noch die Ionen der Salzsäure, unter Bildung von Essigsäure, Alkohol und der entsprechenden Chloride.

Nehmen wir nun an, dass diese beiden Vorgänge den zeitlichen Verlauf der Reaktion bestimmen (d. h. dass der *Zerfall* der Chloride relativ sehr schnell verläuft) so erhalten wir für den unbeschleunigten Vorgang:

$$-\frac{d[\text{Ester}]}{dt} = k[\text{Ester}][\text{Wasser}].$$

Für die Reaktion zwischen Salzsäure und Ester ergibt sich, wenn mit »diss.« der dissocierte Anteil bezeichnet wird:

$$-\frac{d[\text{Ester}]}{dt} = \kappa[\text{Ester}][\text{Salzsäure}_{\text{diss.}}].$$

Für den Verlauf der beschleunigten Reaktion erhalten wir dann

$$-\frac{d[\text{Ester}]}{dt} = k[\text{Ester}] \left\{ [\text{Wasser}_{\text{diss.}}] + \frac{\kappa}{k} [\text{Salzsäure}_{\text{diss.}}] \right\}$$

¹⁾ W. OSTWALD, Über Katalyse. Verhandl. d. deutschen Naturforscherversammlung, Hamburg 1901. Siehe Naturwissenschaftl. Rundschau XVI, 530, 1901.

und wenn $\frac{x}{k} = K$

$$-\frac{d[\text{Ester}]}{dt} = k[\text{Ester}] \{ [\text{Wasser}_{\text{diss.}}] + K[\text{Salzsäure}_{\text{diss.}}] \}.$$

Lassen sich in derartigen Fällen die drei Konstanten k , x und K bestimmen, so ist allerdings ein Beweis für die Existenz einer Zwischenreaktion geliefert. Ein solcher Beweis mag auch gelegentlich wertvolle Aufschlüsse bringen. In Fällen aber, wie der oben erwähnte dürfte ein solcher Beweis kaum etwas Neues sagen. Dass sich aus den Ionen des Esters und den Chlorjonen bei den Zusammenstößen intermediär Chloride bilden ist nach der kinetischen Theorie der Lösung anzunehmen. Die wesentliche Frage: Welche Stoffe können katalytisch wirken und wie stark beschleunigen sie, bleibt aber unbeantwortet.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademins bibliotek.

(Forts. från sid. 52.)

- Bucarest.** *Institut botanique.*
Bulletin de l'herbier. N:o 1. 1901. 8:o.
- Calcutta.** *Indian museum.*
Illustrations of the zoology of the R. Indian marine survey ship Investigator. Crustacea: P. 9; Mollusca: P. 3. 1901. 4:o.
- *Asiatic Society of Bengal.*
Proceedings. Year 1901: Nos 3—8. 8:o.
Journal. P. 1 (Philol.) Vol. 70 (1901): N:o 1. 8:o.
» P. 2 (Nat. Hist.) Vol. 70 (1901): N:o 1. 8:o.
» P. 3 (Anthropol.) Vol. 69 (1900). 8:o.
- Cambridge.** *Philosophical Society.*
Proceedings. Vol. 11: P. 4. 1901. 8:o.
- Cambridge, Mass.** *Astronomical Observatory of Harvard College.*
Annals. Vol. 41: No 7. 1901. 4:o.
Annual report. 56 (1900/1901). 8:o.
- Catania.** *R. Osservatorio.*
Småskrifter, 1 st. 1901. 8:o.
- Chambésy.** *Herbier Boissier.*
Bulletin. (2) T. 2 (1902): N:o 2. 8:o.
- Cincinnati.** *Society of natural history.*
Journal. Vol. 20: N:o 1. 1901. 8:o.
- Des Moines.** *Iowa Geological survey.*
Annual report. Vol. 11 (1900). 4:o.
- Genève.** *Institut national genevois.*
Mémoires. T. 18 (1893—1900). 4:o.
- Genova.** *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*
Atti. Vol. 12 (1901): N. 2. 8:o.
- Georgetown.** *College observatory.*
Supplementary notes to the Atlas stellarum variabilium. 1—2. 1901. 4:o.
- Greenwich.** *R. Observatory.*
Clock star list. 1902. 4:o.
- Groningen.** *Astronomical laboratory.*
Publications. N:o 5: P. 1; 8. 1900—1901. 4:o.
- Göttingen.** *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Philol.-hist. Klasse. N. F. Bd 4: N:o. 6. 1901. 4:o.
Nachrichten. Math.-phys. Klasse. 1901: H. 2. 8:o.
» Phil.-hist. Klasse. 1901: H. 3. 8:o.
- Habana.** *Observatorio del colegio de Belen de la compañía de Jesus.*
Observaciones magneticas y meteorologicas 1877—1878. 1901. Fol.
- Halle.** *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen u. Thüringen.*
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd 74 (1901/02): H. 3—4. 8:o.

(Forts. å sid. 75.)

Nytt fynd af Svarthalsade buskskvättan (*Saxicola rubicola*) i Sverige.

Af C. O. BOTHÉN.

(Meddeladt den 12 februari af F. SMITT.)

Ett exemplar af denna, veterligen blott en gång förr här i Sverige funna, fågelart blef den 18 januari 1902 skjutet strax söder om Göteborg, af en yngling, som inlemnade detsamma till uppstoppling.

Rörande fågeln, har jag gjort följande anteckningar:

Exemplaret, en hanne. Iris mörkbrun $3\frac{1}{2}$ m.m. Total-längd 133 m.m. Vingens längd 66 m.m.

Hufvudet ofvan, nacken och ryggen äro ganska lika tecknade som på vanliga buskskvättan; svartbruna med rostbruna fjäderkanter. Öfre stjerttäckarne äro äfven mörka, men med betydligt ljusare roströda fjäderkanter.

Strupen och kinderna äro svarta med gråaktiga fjäderkanter. Från näbbroten går en svart fläck genom ögat bakåt hufvudets sidor och förenar sig under ögat med det svarta på kinderna och strupen. Längre ner på halsen finnes en stor hvit fläck på hvarje sida om den svarta strupfläcken. Det hos vanliga buskskvättan befintliga ljusa strecket öfver ögat saknas helt och hållet.

Bröstet, magen och undergumpen äro roströda. I synnerhet är bröstet tecknad med en särdeles vacker roströd färg, som

dock längre bakut på magen och undergumpen är något blekare och mera oren.

Stjertpennorna äro helt och hållet svartbruna och sakna alldeles den hvita teckningen vid roten, som finnes hos den vanliga buskskvättan.

De större armtäckfjädrarne äro rent hvita, hvarigenom på den hoplagda vingen uppstår ett likadant hvitt band som på vanliga buskskvättans vinge.

Egendomligt är väl, att ett exemplar af denna art på så vis skulle påträffas här i Göteborgstrakten midt i vintern, och ändå egendomligare, att det enda exemplar, som veterligen förut blifvit funnet i Sverige, äfvenledes påträffades vintertiden, neml. vid julen 1851 i Malmö — enligt SUNDEVALL Svenska foglarne. sid. 56.

Då fågeln af Konservator GUSTAF KIHLEN härstädes uppstoppades, undersöktes densamma och befanns hafva magsäcken alldeles full af sönderplockade och halfsmälta larver. Fågeln var också otroligt fet, nästan som en dubbelbeckasin.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1902. N:o 2.
Stockholm.

Meddelande från Upsala Univ. Fysiska Institution.

Elektriska ledningsmotståndet hos stål och rent järn.

Af CARL BENEDICKS.

[Meddeladt den 12 februari af K. ÅNGSTRÖM.]

På *hårdheten* af en metall inverka hufvudsakligen de främmande beståndsdelar, som äro *lösta* i den ifrågavarande metallen; vidare är det sannolikt, att kemiskt ekvivalenta mängder af t. ex. väte, kol, kisel, krom, wolfram etc. förorsaka samma hårdhetsökning, när de förekomma homogent lösta i järn eller andra metaller. ¹⁾

Det har länge varit bekant, särskildt genom BARUS' och STROUHAL's arbeten, ²⁾ att *elektriska ledningsmotståndet* är nära förbundet med hårdheten och följer dennas förändringar.

Man kan därför vänta, att äfven ledningsmotståndet i hufvudsak skall vara en funktion af den ekvivalenta mängden löst substans.

De bestämningar af elektriskt ledningsmotstånd, som jag utfört å Gysinge elektrostål hafva fullständigt bekräftat denna slutsats.

Stål af 8 olika kolhalter undersöktes, af hvilka den lägsta motsvarar rent wallonjärn; analyserna angifvas i tab. 1 (i %).

¹⁾ Se författarens uppsats i Zeitschr. f. phys. Chem. 36, p. 529, 1901.

²⁾ C. BARUS, Wied. Ann. 7, p. 383, 1879; V. STROUHAL u. C. BARUS, Wied. Ann. 11, p. 930, 1880.

Tab. 1.

N:o.	C	Si	S	P	Mn	Analytiker:
1	0,08	0,03	0,005	0,009	0,13	C. G. SÄRNSTRÖM.
2	0,45	0,65	0,02	0,015	0,35	„
3	0,55	0,86	0,02	0,014	0,44	„
4	0,90	0,28	0,015	0,014	0,41	TH. NORELIUS.
5	1,20	0,30	0,01	0,014	0,44	C. G. SÄRNSTRÖM.
6	1,35	0,26	0,015	0,014	0,54	TH. NORELIUS.
7	1,50	0,12	0,02	0,013	0,29	C. G. SÄRNSTRÖM.
8	1,70	0,08	0,03	0,013	0,29	„

Ledningsmotståndet σ (mikrohm pr cm^3) bestämdes genom att mäta potentialen mellan tvänne eggjar (fästade på 5 cm afst.), som placerades på olika ställen utmed profstyckena (cylindrar, 200×8 mm), under det att en konstant ström genomgick dem.

Det visade sig att *urglödning* icke märkbart ändrade det ledningsmotstånd, som profverna hade efter utsmidningen.

I tab. 2 äro de olika profverna ordnade efter ledningsmotståndet (3:e kol. från slutet). Ett h efter ordningsnumret anger, att profvet var härdadt, hvilket för 1—5 skedde vid c:a 800° , för 6 och 7 vid golvärme.

Tab. 2.

N:o.	Karbid-kol C.	Beståndsdelar i lösning.				Ledningsmotstånd.		
		Härdningskol C.	C-värde af Si.	C-värde af Mn.	Sammanlagdt C-värde ΣC .	Funnet σ .	Ber. σ .	Skillnad.
1	—	0,08	0,013	0,028	0,121	10,5	10,8	— 0,3
1 h	—	0,08	0,013	0,028	0,121	10,9	10,8	+ 0,1
8	1,43	0,27	0,034	0,063	0,367	17,7	17,4	+ 0,3
7	1,23	0,27	0,051	0,063	0,384	17,9	17,9	0,0
4	0,63	0,27	0,118	0,089	0,477	20,2	20,4	— 0,2
5	0,93	0,27	0,127	0,096	0,493	20,9	20,8	+ 0,1
6	1,08	0,27	0,110	0,118	0,498	21,6	21,0	+ 0,6
2	0,18	0,27	0,274	0,076	0,620	23,9	24,2	— 0,3
3	0,28	0,27	0,363	0,096	0,729	27,6	27,2	+ 0,4
2 h	—	0,45	0,274	0,076	0,800	29,0	29,0	0,0
3 h	—	0,55	0,363	0,096	1,009	34,4	34,6	— 0,2
4 h	—	0,90	0,118	0,089	1,107	36,9	37,3	— 0,4
5 h	[0,14 ?]	1,20	0,127	0,096	1,423	[42,1]	45,7	[— 3,6]
6 h	—	1,35	0,110	0,118	1,578	49,6	49,9	— 0,3
7 h	—	1,50	0,051	0,063	1,614	50,6	50,8	— 0,2

För att utröna sammanhanget mellan ledningsmotstånd och kemisk sammansättning har jag utgått från följande synpunkter:

1:o. Det bör företrädesvis vara de i järnet *lösta* främmande ämnena, som influera på ledningsmotståndet.

2:o. Man kan vänta, att *ekvivalenta* mängder af de lösta främmande ämnena skola inverka lika mycket.

3:o. Såvidt man vet, förekomma *Si* och *Mn* alltid *lösta* i järnet; man har åtminstone vid de små halter, det här är fråga om, icke kunnat konstatera några utskilda föreningar med dessa ämnen.

4:o. I *hårdadt* stål förekommer *kolet* i *löst* tillstånd ¹⁾ (martensit).

Från *S* och *P*, som i föreliggande stål förekomma i minimala och föga varierande mängder, bör man kunna, åtminstone tillsvidare, totalt bortse.

Att börja med omräknades därför, för de *hårdade profverna*, *Si*- och *Mn*-halterna till deras motsvarande, *ekvivalenta »kolvärde»*, d. v. s. analysstalen dividerades med resp. ämnens atomvikter (28,4 och 55,0) och multiplicerades med kolets (12,0).

De så erhållna »kolvärdena» af *Si* och *Mn* adderades till kolhalten. Summan häraf uppfördes i vertikal led (se fig. 1; 1 *h*, 2 *h*, . . . 7 *h*), under det ledningsmotståndet afsattes i horisontal led.

Det visade sig, att de så erhållna punkterna ligga på en *rät linie*. Afvikelserna äro mycket obetydliga, nästan mindre än af de oundgängliga analysfelen kan väntas. ²⁾

Detta gifver otvetydigt vid handen, att de ofvan gjorda antagandena öfverensstämma med verkligheten.

Hvad vidare beträffar de *ohårdade profverna*, i hvilka man förut har antagit, att *kolet ej* förekommer i löst tillstånd, ³⁾ kan man sålunda ej på förhand säga, huru *kolet* där skall inverka.

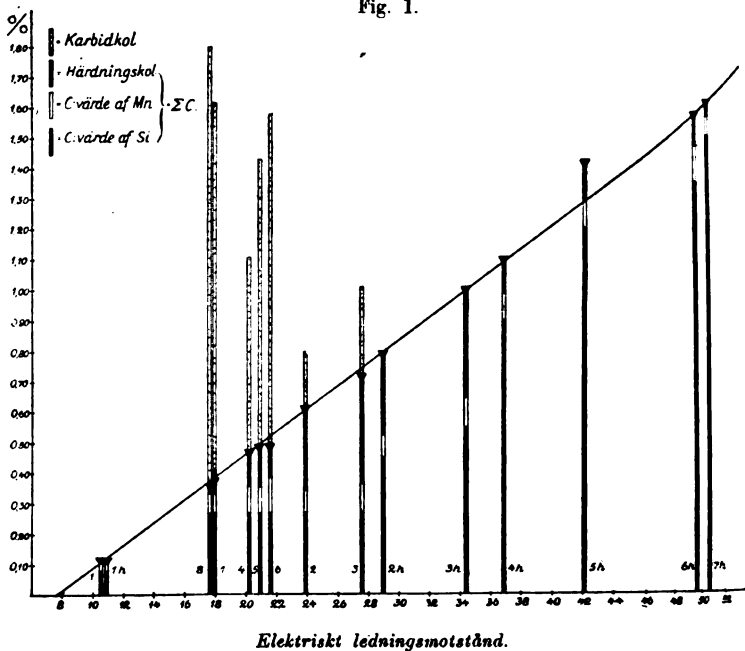
¹⁾ Se t. ex. förf. citerade afhandling.

²⁾ Att N:o 5 *h* afviker något mer, beror tydligen därpå, att dess hårdningstemperatur icke varit tillräckligt hög för att, åtminstone efter afkylning, hålla *hela* kolmängden, 1,20 %, i *löst* tillstånd. Då N:r 6 hårdats vid samma temp., var σ äfven för lågt, (= 44,4), men efter hårdning vid högre temp. fick σ det beräknade värdet.

³⁾ utan utskildt i form af karbid.

Si och Mn, hvilka äfven nu förekomma lösta, böra däremot spela samma roll som nyss. På försök afsattes därför sammanlagda kolvärdet af dessa ämnen enbart i vertikal led (ledningsmotståndet såsom förut i horisontal led).

Fig. 1.



Häraf visade sig, att de så erhållna punkterna lägo på konstant afstånd från den räta linien. Dessa vertikala afstånd voro nämligen följande:

Tab. 3.

N:o.	Total kolhalt.	Vertikala afst. från linien, motsvarande härdningskol.
	%	%
2	0,45	0,26
3	0,55	0,28
4	0,90	0,26
5	1,20	0,27
6	1,35	0,29
7	1,50	0,27
8	1,70	0,28

Medeltal 0,27 %.

Denna oväntade konstans kan ej förklaras på annat sätt, än att järnet i **urglödadt tillstånd**, så snart ett visst öfverskott af karbidkol finnes närvarande, *konstant upptar 0,27 % kol såsom härdningskol*, samt att den återstående kolhalten, *karbidkolet, icke utöfvar något märkbart inflytande på ledningsmotståndet*.

Dessa 0,27 % härdningskol, till hvilka vi strax återkomma, *motsvara alltså kolets löslighet i järn vid vanlig temperatur*.

Antages i enlighet härmed, att till de ohärdade profvernas ekvivalenta Si- och Mn-halt bör tillkomma 0,27 % härdningskol, så *komma samtliga stålprof, härdade eller ohärdade, att falla utefter en och samma räta linie* (fig. 1).

Stålets ledningsmotstånd kan alltså uttryckas såsom en lineär funktion af summan (ΣC) af ingående *lösta* ämnens »kolvärde» i %, enligt följande formel:

$$\sigma = 7,6 + 26,8 \Sigma C \text{ mikrohmm/cm}^2.$$

Med denna formel äro de beräknade värdena i näst sista kolumnen af tab. 2 erhållna. Då skillnaden mellan beräknade och funna värden är särdeles obetydlig, framgår det, att den uppställda formeln noga återger förändringarna i ledningsmotstånd. Omvänt kan man naturligtvis genom bestämning af ledningsmotståndet (i härdadt och ohärdadt tillstånd) noggrant *beräkna* såväl kolhalt som sammanlagd, ekvivalent Si- och Mn-halt.

Sättes i formeln $\Sigma C = 0$, d. v. s. antages järnet absolut rent, så erhålles det *absolut rena järnets ledningsmotstånd* (vid $+ 16^\circ$) $\sigma = 7,6$.

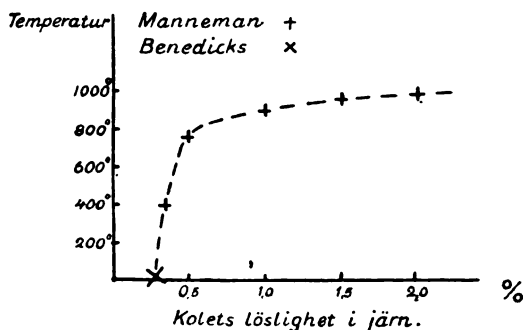
Detta värde ligger något lägre än det lägsta hittills för rent järn erhållna, $\sigma = 9$. (Se KOHLRAUSCH, Prakt. Physik, 9 Aufl. p. 595.) Man behöfvär emellertid, för att förklara denna afvikelse, i det järn, som lemnat detta värde, ej antaga mer än 0,05 % sammanlagdt »kolvärde», eller, då järnet förmodligen varit elektrolytiskt, icke mer än 0,004 % väte. Sålunda ett utomordentligt rent järn!

Denna metod att medels extrapolering bestämma ledningsmotståndet för absolut rena metaller torde kunna finna stor användning, då det väl knappast är troligt, att den genom det föregående funna lagen: *ekvivalenta mängder af olika lösta ämnen höja ledningsmotståndet med samma belopp*, endast skulle vara giltig för järnet.

De föregående ledningsmotståndsbestämningarna angäfvö, att i urglödgadt tillstånd finnes 0,27 % kol såsom härdningskol (ätminstone vid närvaro af ett visst karbidöfverskott). Detta resultat, som strider mot hvad man hittills antagit, har jag sökt stöd för genom att samla en del rent kemiskt-metallurgiska uppgifter. Dessa, hvilka icke här anges,¹⁾ visa att det i urglödgadt, kolrikt stål bör finnas 0,22—0,34, i medeltal 0,29 % kol i annat tillstånd än såsom karbidkol och grafit, och med stor sannolikhet just såsom härdningskol.

Äfven stå de värden, som MANNESMAN funnit för kolets löslighet i järn vid olika temperaturer, i god öfverensstämmelse med värdet 0,27 % vid vanlig temperatur, se fig. 2.

Fig. 2.



Flera skäl synas tala för att denna lösning med 0,27 % C. är identisk med den af OSMOND upptäckta strukturbeståndsdel i urglödgadt stål, som benämnes »sorbit», och att »perliten» i

¹⁾ Den intresserade hänvisas till en uppsats af förf. i Zeitschr. f. phys. Chemie 1902.

sådant, kolrikt stål icke, såsom man vanligen antager, består af lameller af karbid (cementit) och *rent* järn (ferrit), utan af cementit och sorbit.

Lösningen med 0,27 % C. är dock icke beständig, såvida ej ett visst öfverskott af kol förefinnes. Äfven vid låg kolhalt (t. ex. < 0,2 %) kan man nämligen mikroskopiskt iakttaga en utskild, kolrikare substans (cementit); grundmassan måste därför här bestå af ett mer eller mindre *rent* järn. Enligt hvad man finner vid granskning af de ledningsmotståndsbestämmningar som WEDDING¹⁾ meddelar, håller detta ej mer än (högst) 0,06—0,07 % C. i lösning.

Oaktadt ett temligen stort antal forskare ha sysselsatt sig med ledningsmotståndet hos järn och stål, lyckas man icke finna mer än temligen fåtaliga bestämningar, som hänföra sig till analyseradt material. De uppgifter jag kunnat finna, af W. H. JOHNSON, H. WEDDING och H. LE CHATELIER bekräfta emellertid det ofvan vunna resultatet på ett fullt tillfredsställande sätt.²⁾ Genom de bestämningar, som WEDDING publicerat, finner man, att äfven *fosfor* förhåller sig såsom härdningskol, kisel och mangan, något som ej kunnat framgå af det undersökta, svenska materialet. LE CHATELIER har redan funnit, att en atom kisel höjer ledningsmotståndet jämnt lika mycket som en atom härdningskol; det belopp, hvarmed ledningsmotståndet höjes af en löst atom på 100 atomer af lösningen, uppges af LE CHATELIER till 5—7 mikrohm/cm², i medeltal 6,3, hvilket kommer ganska nära det tal, 5,9, som beräknas ur mina bestämningar. — I det af denne forskare undersökta stålet, synes karbidkolet öka ledningsmotståndet, ehuru svagt. Det är ju icke otänkbart, att olika stålsorter möjligen kunna vara något olika i detta afseende. *Skenbart* kommer nog ofta ledningsmotståndet att stiga med karbidkolet, därför att *i regeln Si* och *Mn* ökas med kolhalten.

²⁾ Se förf. cit. afhandling i Zeitschr. f. phys. Chemie 1902.

Sammanfattning.

1:o. *Ekvivalenta mängder af olika ämnen, lösta i järnet, föröka dess ledningsmotstånd med samma belopp.* Detta är direkt uppvisadt för *C*, *Si*, *Mn*, samt äfven, genom bestämningar af WEDDING, för *P*.¹⁾ En löst atom på 100 atomer af lösningen höjer ledningsmotståndet med 5,9 mikrohm/cm², hvilket öfverensstämmer med LE CHATELIERS bestämningar.

2:o. I järnet *utskild karbid* har knappast märkbart inflytande på ledningsmotståndet. Detta gäller för den undersökta stålsorten, Gysinge elektrostål; i detta afseende förhålla sig möjligen olika stålsorter något olika.

3:o. *Ohärdadt stål* med 0,45—1,70 % *C* håller 0,27 % *C* i lösning (härtningskol). Perliten i sådant stål består därför icke, såsom vanligen antages, af karbid (cementit) och rent järn (ferrit), utan detta senare bör hålla 0,27 % härtningskol.

4:o. Denna lösning med 0,27 % *C*, för hvars existens åtskilliga kemiska grunder föreligga, är dock ej beständig såvida ej ett visst öfverskott af karbidkol förefinnes. Vid låg kolhalt förekommer knappast mer än omkr. 0,06—0,07 % *C* löst i järnet.

5:o. Lösningen med 0,27 % *C* är sannolikt identisk med OSMONDS »*sorbits*».

6:o. Ledningsmotståndet för *absolut rent järn* är i det närmaste 7,6 mikrohm/cm².

7:o. Ledningsmotståndet för stål uttryckes noggrant genom formeln

$$\sigma = 7,6 + 26,8 \Sigma C, \quad .$$

i hvilken ΣC anger i viktsprocent summan af härtningskol och »kolvärdet» af öfriga, i järnet *lösta* ämnen.

Upsala, Fysiska Institutionen, jan. 1902.

¹⁾ 1/3 1902. Att detta äfven gäller för *Al*, finner man särdeles tydligt vid beräkning af några uppgifter, som E. GÜMLICH omnämner i ett nyutkommet häfte af Elektrotechnische Zeitschr. (23, p. 101, 1902).

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 64.)

Harlem. *Musée Teyler.*

Archives. (2) Vol. 7: P. 4. 1901. 8:o.

Helsingfors. *Societas pro fauna et flora Fennica.*

Acta. Vol. 18 (1899/1900)—20 (1900/1901). 8:o.

Meddelanden. H. 24 (1897/98); 26 (1899/1900)—27 (1900/1901). 8:o.

— *Finska Vetenskaps-societeten.*

Öfversigt. 43 (1900/1901). 8:o.

— *Sällskapet för Finlands geografi.*

Fennia. 10; 16; 18. 1894—1901. 8:o.

Indianapolis. *Indiana academy of science.*

Proceedings. 1900. 8:o.

Kazan. *Société physico-mathématique.*

Bulletin. (2) T. 10: N:o 2—4. 8:o.

— *Kejsarl. universitetet.*

Godičnyi akt. 5 (1901). 8:o.

Obozrjenija prepodavnija. 1901/1902. 8:o.

Spisok knig postupivščich v tečenie 1900 i biblioteku. 8:o.

Učenyija Zapiski. 68 (1901): 7—11. 8:o.

Akademiskt tryck. 1901. 5 st. 8:o.

Kharkow. *Kejsarl. universitetet.*

Dissertationer. 1. 1901. 8:o.

Kiel. *Universität.*

Dissertationen 1900/1901. 141 st. 8:o & 4:o.

Kjöbenhavn. *Direktionen for Carlsbergfondet.*

THORODDSEN, TH., Geological map of Iceland. Survey in the years 1881—1898. Khvn 1901. Fol.

— *Det danske meteorologiske Institut.*

Maanedsoversigt. 1901: 1—12. Fol.

Krakau. *Académie des sciences.*

Bulletin international. Cl. des sc. math. et nat. 1901: Nr 8. 8:o.

Materyały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne. T. 5. 1901. 8:o.

Kristiania. *Den norske Nordhavs-Expedition 1876—1878.*

28. 1901. 4:o.

Leiden. *Sterrenwacht.*

STEIN, J., Beobachtungen zur Bestimmung der Breitenvariation in Leiden 1899/1900. Haarlem 1901. 4:o.

— *Nederlandsche botanische Vereeniging.*

Prodromus floræ Batavæ. Vol. 1: P. 1. 1901. 8:o.

Lima. *Sociedad geográfica.*

Boletin. Año 11: Trim. 1. 1901. 8:o.

London. *British association for the advancement of science.*

Hints to meteorological observers in tropical Africa. 1892. 8:o.

London. Meteorological Office.

Monthly pilot charts of the North Atlantic and Mediterranean. 1902: Sheet 10—11. Fol.

Weekly weather report. Vol. 17 (1900): N:o 1—52 & Append. 1—4. 4:o.

Summary of the observations . . . 1900: 1—12. 4:o.

Hourly means of the readings obtained from the self-recording instruments. 1898. 4:o.

— *Nautical almanac office.*

Nautical almanac. 1902: Append. 8:o.

— *Royal Astronomical society.*

Monthly notices. Vol. 62 (1901/02): N:o 2. 8:o.

— *Chemical society.*

Journal. Vols. 81—82 (1902): 2. 8:o.

Proceedings. Vol. 18 (1902): N:o 245. 8:o.

— *R. Meteorological society.*

The meteorological record. Vol. 20 (1900): N:o 78—80. 8:o.

— *Royal society.*

Proceedings. Vol. 69 (1901/02): No 454—455. 8:o.

London, Ontario. Entomological society.

The Canadian entomologist. Vol. 34 (1902): No 1. 8:o.

Madison. Washburn observatory of the univ. of Wisconsin.

Publications. Vol. 10: P. 2. 1901. 8:o.

— *Wisconsin geological and natural history survey.*

Bulletin. N:o 7: P. 1. 1901. 8:o.

Madrid. R. Academia de ciencias exactas, físicas y naturales.

Memorias. T. 14: Atlas: Fasc. 1. 1891—1900. 8:o.

Manchester. Conchological society of Great Britain and Ireland.

Journal of conchology. Vol. 10 (1901/1902): No 5. 8:o.

Manila. Observatorio de la compañía de Jesús.

Boletín mensual. Año 1899: Trim. 4; 1900: 1—2. Fol.

Mexico. Instituto médico nacional.

Anales. T. 5 (1901): Num. 2. 8:o.

— *Observatorio meteorológico central.*

Boletín mensual. 1901: 7. Fol.

— *Sociedad científica »Antonio Alzate».*

Memorias y revista. T. 15 (1900/1901): Núms. 11—12; 16 (1901): 1. 8:o.

Minneapolis. Minnesota academy of natural sciences.

Bulletin. Vol. 3 (1890/91): N:o 3. 8:o.

Montevideo. Museo nacional.

Anales. T. 4: Entr. 22. 1901. 8:o.

— *Observatorio del colegio Pío de Villa Co'on.*

El año meteorológico. 1898/1900. 8:o.

Montreal. Natural history society.

Canadian record of science. Vol. 8 (1901): N:o 6. 8:o.

Mount Hamilton. Lick observatory.

Bulletin. No 9—12. 1901. 4:o.

München. *Meteorologische Centralstation.*

Übersicht über die Witterungsverhältnisse. 1901: 10-11. 4:o.

Napoli. *Accademia di archeologia, lettere e belle arti.*

Rendiconto. N. S. Anno 15 (1901): 5-12. 8:o.

— *Accademia Pontaniana.*

Atti. Vol. 30 (1900). 8:o.

— *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*

Rendiconto. (3) Vol. 7 (1901): Fasc. 12. 8:o.

Nizza. *Société de médecine et de climatologie.*

Nice-médical. Année 25 (1900/1901): N:o 5-12; 26 (1901/02): 2-3. 8:o.

Palermo. *Società di scienze naturali ed economiche.*

Giornale. Vol. 23 (1901). 4:o.

Paris. *Société astronomique de France.*

Bulletin. 1902: 1. 8:o.

— *Société de géographie.*

La Géographie. Année 1902: N:o 1. 8:o.

— *Société météorologique de France.*

Annuaire. Année 49 (1901): 1-5, 7-12. 8:o.

Philadelphia. *Academy of Natural Sciences.*

Journal. (2) Vol. 11: P. 4. 1901. 4:o.

Proceedings. Vol. 53 (1901): P. 2. 8:o.

— *Franklin Institute.*

Journal. Vol. 153 (1902): No. 1. 8:o.

Plymouth. *Marine biological association of the United Kingdom.*

Journal. N. S. Vol. 6: N:o 3. 1902. 8:o.

Pola. *Hydrographisches Amt der k. u. k. Kriegs-Marine.*

Meteorologische Termin-Beobachtungen. 1901: 10-11. tv. Fol.

Ponta Delgada. *Observatoire météorologique.*

Resumé des observations. Année 1901: 1-12. Fol.

Variation diurne de la pression atmosphérique. Année 1901. Fol.

Portici. *Regio Scuola superiore de agricoltura.*

Annali. (2) Vol. 4: Fasc. 1. 1902. 8:o.

Portland. *Society of natural history.*

Proceedings. Vol. 2 (1901): P. 5. 8:o.

Potsdam. *Centralbureau der internationalen Erdmessung.*

Veröffentlichungen. N. F. N:o 4. 1902. 8:o.

Namen u. Adressen d. Bevollmächtigten f. d. intern. Erdmessung. 1901/12. Fol.

Rio de Janeiro. *Observatorio.*

Boletim mensal. 1901: 1-3. 8:o.

Riposto. *Osservatorio meteorologico del R. Istituto nautico.*

Bollettino mensile. 1901: Fasc. 1-12. 8:o.

Roma. *Reale accademia dei Lincei.*

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Rendiconti. (5) Vol. 11 (1902): Sem. 1: Fasc. 1-2. 8:o.

Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

Rendiconti. (5) Vol. 10: Fasc. 9-10. 1901. 8:o.

Roma. *Ufficio centrale di meteorologia e di geodinamica.*

Rivista meteorico-agraria. Anno 22 (1901): N. 1-11, 13-15, 17-26, 28-36. 8:o.

Saint Louis. *Academy of science.*

Transactions. Vol. 10 (1900/01): N:o 9-11; 11 (1901/02): 1-5. 8:o.

S:t Petersburg. *Comité géologique.*

Mémoires. Vol. 18: N:o 1-2. 1901. 4:o.

Bulletins. 20 (1901): N:o 1-10. 8:o.

Bibliothèque géologique de la Russie. 1897. 8:o.

— *Musée zoologique de l'académie imp. des sciences.*

Annuaire. T. 6 (1901): N:o 2-3. 8:o.

— *Observatoire physique central Nicolas.*

Bulletin météorologique. 1901. Fol.

— *Societas entomologica Rossica.*

Horæ. T. 33: N:o 3-4; 35: 1-2. 1901. 8:o.

— *Société Imp. Russe de géographie.*

Izvestija. T. 37 (1901): 4-6. 8:o.

— *K. Universitetet.*

Zapiski istoriko-filologičeskago fakulteta. 50: 2; 58-61. 1901. 8:o.

Spisok knig priobretennykh bibliotekoju. 1899: 1-2; 1900: 1-2; 1901: 1. 8:o.

Sbornik trudov kabineta fizičeskoi geografii. 1. 1899. 8:o.

Katalog biblioteki muszeja drevnostei. 1. 1901. 8:o.

San Francisco. *Astronomical society of the Pacific.*

Publications. Vol. 13 (1901): N. 81. 8:o.

Santiago de Chile. *Museo nacional.*

Anales. Entr. 15: Secc. 1 (Zool.). 1902. 4:o.

Sofia. *Station centrale météorologique de Bulgarie.*

WATZOF, S., Tremblements de terre en Bulgarie au 19^e siècle. Sofia 1902. 8:o.

— Narodna meteorologija. Sofia 1900. 8:o.

Sydney. *Linnean society of N. S. Wales.*

Proceedings. Vol. 26 (1901): P. 3. 8:o.

— *Royal society of New South Wales.*

Abstract of proceedings. 1900: 7-12; 1901: 5-9, 11. 8:o.

— *Department of mines.*

Annual report. Year 1900. Fol.

Tokyo. *Central meteorological observatory of Japan.*

Weather chart. 1901: 9-10. Fol.

— *Imperial geological survey of Japan.*

Geological map of Japan. 8 st. kartor m. beskrifn. Fol. & 8:o.

Tunis. *Institut de Carthage.*

Revue Tunisienne. Année 9 (1902): N:o 33. 8:o.

Utrecht. *Provinciaal Utrechtsch genootschap van kunsten en wetenschappen.*

Aanteekeningen van het verhandelnde in de Sectievergaderingen. 1901. 8:o.

Verslag van het verhandelnde in de algemeene Vergadering. 1901. 8:o.

Verona. *Accademia d'agricoltura, scienze, lettere, arti e commercio.*
Atti e memorie. (4) Vol. 1: Fasc. 2. 1901. 8:o.

Washington. *Academy of sciences.*

Proceedings. Vol. 3: pp. 601-612. 1901. 8:o.

— *Weather Bureau.*

Weather map. 1901: 7-10. Fol.

Monthly weather review. 1901: 10. 4:o.

— *U. S. Department of agriculture.*

Crop reporter. Vol. 3 (1901): No. 6-8. 4:o.

Bureau of animal industry. Bulletin. No. 30. 1901. 8:o.

Division of biological survey. Circular. No. 34. 1901. 8:o.

Division of chemistry. Bulletin. No. 64. 1901. 8:o.

— Circular. No. 8. 1901. 8:o.

Office of experiment stations. Bulletin. No. 105. 1901. 8:o.

— Experiment station record. Vol. 13: No. 3. 1901. 8:o.

Farmers' bulletin. No. 138-141. 1901. 8:o.

Library. Bulletin. No. 38. 1901. 8:o.

Bureau of plant industry. Bulletin. No. 2-3. 1901. 8:o.

Division of publications. Circular. No. 422, 425, 427. 1901. 8:o.

Public road inquiries. Bulletin. No. 21. 1901. 8:o.

Divison of statistics. Bulletin. Miscellaneous series. No. 23. 1901. 8:o.

— *Smithsonian Institution.*

Annual report. Year 1899/1900.

› › National Museum. 1896/97: P. 2. 8:o.

— *U. S. Naval observatory.*

Report of the superintendent. 1900/1901. 8:o.

Wellington. *New Zealand Institute.*

Transactions and proceedings. Vol. 33 (1900). 8:o.

Wien. *K. Akademie der Wissenschaften.*

Denkschriften. Math.-naturwiss. Classe. Bd 73. 1901. 4:o.

Sitzungsberichte. Math.-naturwiss. Classe.

Abth. 1. Bd 109: H. 8-10. 1900. 8:o.

› 2a. Bd 109: H. 10 1900. 8:o.

› 2b. Bd 110: H. 1. 1901. 8:o.

› 3. Bd 109: H. 8-10. 1900. 8:o.

— *Erdbeben-Commission d. K. Akademie der Wissenschaften.*

Mitteilungen. N. F. N:o 1. 1901. 8:o.

— *K. K. zoologisch-botanische Gesellschaft.*

Verhandlungen. Bd. 51 (1901): H. 9-10. 8:o.

— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*

Verhandlungen. 1901: N:o 11-16. 8:o.

Würzburg. *Physikalisch-medicinische Gesellschaft.*

Sitzungsberichte. 1900: N:o 5; 1901: 1-2. 8:o.

Verhandlungen. N. F. Bd 34: No. 7-9. 1901. 8:o.

Zürich. *Schweizerische meteorologische Central-Anstalt.*

Annalen. 1899. 4:o.

Af Madame Veuve Godin, Guise.

Le Devoir. T. 26 (1902): 1. 8:o.

Af Friherre C. J. A. Skogman:

BARROW, J., Abrégé chronologique ou histoire des découvertes faites par les Européens dans les différentes parties du monde. T. 1—12. Paris 1766. 8:o.

BLIGH, An account of the dangerous voyage performed by Captain Bligh, with a part of the crew of His Majesty's ship Bounty ... Dublin 1817. 12:o.

DE BROSSES, Histoire des navigations aux terres Australes. T. 1—2. Paris 1756. 4:o.

CHAMBERLAYNE, EDW., Angliæ Notitia; or the present state of England. P. 1—2. London 1671. 12:o.

COOK, J., Voyage au Pole Austral et autour du monde, 1772—1775. T. 1—6. Paris 1778. 8:o.

COXE, W., Account of the Russian discoveries between Asia and America. London 1780. 4:o.

DAMPIER, W., A collection of voyages. Vol. 1—4. London 1729. 8:o.

GLANTZBY, Les voyages de Glantzby dans les mers orientales de la Tartarie. Amsterdam 1730. 12:o.

HAWKESWORTH, J., Relation des voyages entrepris par ordre de Sa Majesté Britannique, pour faire de découvertes dans l'Hémisphère Méridional. T. 1—4. Paris 1774. 4:o.

HUMBOLDT, A. DE, Essai politique de la Nouvelle Espagne. T. 1—5. Paris 1811. 8:o.

NIEBUHR, Description de l'Arabie. Copenhague 1773. 4:o.

PHIPPS, C. J., Voyage au Pole Boréal faite en 1773. Paris 1775. 4:o.

ROGERS, W., Voyage autour du monde 1708—1711. T. 1—2. Amsterdam 1716. 12:o.

Af Herr Emanuel Öhlén.

Beskrifvande atlas öfver Vestra Canada. Ottawa 1900. 4:o.

Atlas of Western Canada. Ottawa 1901. 4:o.

Af utgifvarne:

Acta mathematica, hrsg. von G. MITTAG-LEFFLER. 25: 1—2. 1901. 4:o.

La feuille des jeunes naturalistes, publ. par A. DOLLFUS. (4) Année 32 (1901/02): N:o 375—376. 8:o.

Journal of school geography, ed. by R. E. DODGE. Vol. 5 (1901): No 9. 8:o.

SYMON's monthly meteorological magazine. 1901: 1—12. 8:o.

Botaniska notiser, utg. af O. NORDSTEDT, separater ur årg. 1901. 8:o.

Af författarne:

ADELSKÖLD, CL., Utdrag ur mitt dagsverks- och pro diverse-konto. Lefnadsminnen. Uppl. 2. D. 1—4. Sthlm 1899—1901. 8:o.

BERGSTRAND, Ö., Sur la parallaxe d'une étoile dans le voisinage de 61 eygne. Sthlm 1901. 8:o.

Af författarne:

- DUNÉR, N. C., Calculation of elliptic elements of the system of Y Cygni. Chicago 1900. 8:o.
 — 2 småskrifter. 8:o.
- HILDEBRANDSSON, H. H., & TEISSERENC DE BORT, L., Les bases de la météorologie dynamique. Livr. 5. Paris 1901. 8:o.
- JOHNSON, K. R., Über einige verwandte elektrische Erscheinungen. 1901. 4:o.
- LINDHAGEN, A., Om Newtons approximationsmetod. Kra 1901. 8:o.
- MALM, A. H., Berättelse öfver Göteborgs och Bohus läns hafsfisken under 1900—1901. Göteborg 1902. 8:o.
- ROSENBERG, O., Über die Pollenbildung von Zostera. Upsala 1901. 8:o.
- FRITSCHÉ, H., Die tägliche Periode der erdmagnetischen Elemente. St. Petersburg 1902. 8:o.
- GAUTIER, R., Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice pendant l'année 1899. Genève 1901. 8:o.
- RUSSEL, H. C., Current papers N:o 5. Sydney 1900. 8:o.
- VIRCHOW, R., Zur Erinnerung. Blätter des Dankes für meine Freunde. Berlin 1902. 8:o.
- WILLE, N., Bör der lægges mere vegt paa de biologiske fag. Kra 1901. 8:o.
- WEINBERG, B., † P. Passalsky. Anomalies magnétiques dans la région des mines de Krivoï-Rog. Odessa 1901. 4:o.

Utgifningsdag 11 mars 1902.

Stockholm 1902. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 59.

1902.

Nº 3.

Onsdagen den 12 Mars.

INNEHÅLL:

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 83.
SANDSTRÖM, J. W., Ueber die Beziehung zwischen Luftbewegung und Druck in der Atmosphäre unter stationären Verhältnissen	» 87.
Skänker till Akademiens Bibliotek	sidd. 85, 104.

Tillkännagafs, att Akademiens ledamöter professorerna NILS PETER HAMBERG, JOHAN ROBERT TOBIAS LANG och RAGNAR MAGNUS BRUZELIUS med döden afgått.

Med anledning af Kongl. Maj:ts remiss å en underdånig ansökan af »Kommittén för gradmätning å Spetsbergen» om ytterligare statsanslag afgåfvo Herrar LINDHAGEN och SKOGMAN infordradt utlåtande, som af Akademien godkändes.

Reseberättelser hade inkommit från Letterstedtska stipendiaten professor SAM WIDE samt från fil. kandidat E. WAHLGREN.

Annåldes, att Akademiens framl. ledamot professor N. P. HAMBERG genom testamentariskt förordnande till den under Akademiens förvaltning stående Scheelefonden skänkt ett belopp af 10,000 kronor.

Den *Fernerska* belöningen tilldelades docenten i matematik vid Upsala Universitet E. HOLMGREN för hans båda i Öfversigten af Akademiens förhandlingar införda afhandlingar.

Den *Lindbomska* belöningen tilldelades Fil. Dr. ASTRID CLEVE för hennes likaledes i Öfversigten intagna afhandling: »Bidrag till kännedomen om ytterbium».

Den *Flormanska* belöningen tillerkändes docenten L. A. JÄGERSKIÖLD för hans i Akademiens Handlingar intagna afhandling: »Weitere Beiträge zur Kenntniss der Nematoden».

Såsom understöd för naturhistoriska forskningsresor inom landet utdelade Akademien:

åt filos. kandidaten R. HÄGG 175 kr. för att i Bohuslän och angränsande delar af Dalsland, Vestergötland och Halland undersöka glaciala och postglaciala marina skalbankar;

åt amanuensen H. MÖLLER 250 kr. för bryologiska studier i trakten omkring Torneå träsk;

åt medic. stud. S. BIRGER 250 kr. för studier af Nymphæa-former inom Torneå och Muonio elfdalar.

åt redaktör W. BÜLOW 150 kr. för fortsatta studier öfver hymenomyceter i Skåne;

åt amanuensen T. WESTERGREN 150 kr. för att i Skåne studera parasitsvampar;

åt docenten E. LÖNNBERG 150 kr. för idkande af biologiska studier vid Kristinebergs zoologiska station;

åt filos. kandidat H. BRUNANDER 175 kr. för att i Skåne och på Gotland insamla och studera Oligochæter.

Statsanslaget till instrumentmakeriernas uppmuntran beslöt Akademien lika fördela mellan matematiske och fysiske instrumentmakarne P. M. SÖRENSEN och G. SÖRENSEN.

Genom anställda val kallade Akademien till inländske ledamöter professorn vid Stockholms högskola friherre GERHARD JAKOB DE GEER, professorn i zoologi vid Upsala universitet AXEL WIRÉN samt professorn i oftalmiatrik vid Karolinska Mediko-kirurgiska institutet ERIK JOHAN WIDMARK.

På tillstyrkan af kommitterade antogos följande afhandlingar till införande i Akademiens skrifter:

i Bihanget till Akademiens Handlingar: 1:a) »Iakttagelser rörande fogelfaunan i Göteborgs och Bohuslän» af Herr C. O. BOTHÉN; 2:a) »Zur Kenntniss der saprophytischen Gentianaceen» af Dr. N. SVEDELIUS; 3:e) »Beiträge zur Kenntniss der schwedischen Acaridenfauna. 1. Lappländische Trombidiiden und Ori-

batiden» af filos. kandidat IVAR TRÄGÅRDH; 4:e) »Om vegetationen i några småländska sjöar» af filos. kandidat G. W. F. CARLSON;

i Öfversigten: den i innehållsförteckningen upptagna afhandlingen.

Herr RETZIUS höll ett föredrag om kanaler, som under senare tid uppdagats inuti körtel- och nervceller hos såväl lägre som högre djur.

Herr THEEL redogjorde för åtskilliga mindre beaktade egendomligheter hos Echinodermägget äfvensom för verksamheten hos vissa vandrande celler, hvarigenom ägg och väfnader resorberas inom Holoturiernas kroppar.

Herr HASSELBERG föredrog om ett fall af personlig eqvation vid mätning af spektroskopiska fotogrammer.

Herr MITTAG-LEFFLER redogjorde för de åtgärder, som i Norge och andra länder hittills vidtagits för att värdigt begå minnet deraf, att i år 100 år förflutit sedan den store norske matematikern Niels Henrik Abels födelse.

Följande skänker anmälades:

Till Riksmuseets Entomologiska Afdelning:

En samling dagfjärilar från Darjeeling i Ostindien skänkta af danske undersåten F. A. MÖLLER.

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *K. Statistiska Centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. D: 1900; P: 42; S: 29. 1900—1901. 4:o.

— *Geologiska Byrån.*

Carte géologique internationale de l'Europe 1 : 1,500,000. Livr. 4. Fol.

— *Geologiska föreningen.*

Förhandlingar. Bd 23 (1901). 8:o.

Uppsala. *Studentkåren.*

Katalog. 1902: Vårtermin. 8:o.

Angers. *Société d'études scientifiques.*

Bulletin. N. S. Année 30 (1900). 8:o.

Baltimore. *Johns Hopkins university.*

Circulars. Vol. 21 (1901/1902): N:o 155. 4:o.

Berlin. *K. Akademie der Wissenschaften.*

Politische Correspondenz Friedrich's des Grossen. Bd 27. 1902. 8:o.

— *Entomologischer Verein.*

Berliner entomologische Zeitschrift. Bd 46 (1901): H. 4. 8:o.

Bern. *Hydrometrische Abteilung des eidgenössischen Oberbauinspektors.*

Tabellarische Zusammenstellung der Haupt-Ergebnisse d. Schweiz. hydrometr. Beobachtungen. Jahr 1894. Fol.

Besançon. *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*

Procès-verbaux et mémoires. Année 1900. 8:o.

— *Société d'émulation du Doubs.*

Mémoires. (7) Vol. 5 (1900). 8:o.

Bombay. *Government Observatory.*

Magnetical, meteorological and seismological observations. 1898—99. Fol.

Brünn. *Meteorologische Commission d. naturforsch. Verein.*

Bericht. 19 (1899). 8:o.

— *Naturforschender Verein.*

Verhandlungen. Bd 39 (1900). 8:o.

Bruxelles. *Académie Royale de Belgique.*

Classe des lettres . . . Bulletin. 1901: N:o 12. 8:o.

» des sciences. Bulletin. 1901: N:o 12. 8:o.

— *Musée du Congo.*

Annales. Botanique. Sér. 4: Fasc. 1. 1902. Fol.

— *Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie.*

Bulletin. T. 15 (1901): Fasc. 6. 8:o.

Budapest. *Statistisches Bureau der Haupt- u. Residenzstadt Budapest.*

Publicationen. 19. 1894. 8:o.

Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*

Anales. T. 53 (1902): Entr. 1—2. 8:o.

Buitenzorg. *Jardin botanique.*

Annales. (2) Vol. 3: P. 1. 1901. 8:o.

Mededeelingen. 52. 1902. 8:o.

Calcutta. *Geological survey of India.*

Memoirs. Vol. 30: P. 3—4; 31: 2—3; 32: 1; 34: 1. 1901. 8:o.

Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoology.*

Bulletin. Vol. 38: No 5—6. 1902. 8:o.

Cape Town. *Meteorological Commission.*

Report. Year 1900. Fol.

Chambésy. *Herbier Boissier.*

Bulletin. (2) T. 2 (1902): N:o 3. 8:o.

Dresden. *Statistisches Bureau des Ministeriums des Innern.*

Zeitschrift. Jahrg. 47 (1901): H. 3—4. 4:o.

Genève. *Observatoire.*

Résumé météorologique. Année 1896. 8:o.

Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice.

Année 1898. 8:o.

(Forts. à sid. 104.)

Ueber die Beziehung zwischen Luftbewegung und Druck in der Atmosphäre unter stationären Verhältnissen.

Von J. W. SANDSTRÖM.

[Mitgetheilt am 12. Mars 1902 durch S. ARRHENIUS.]

In einer eben erschienenen Abhandlung ¹⁾ habe ich gezeigt, dass eine einfache Beziehung zwischen Temperatur und Luftbewegung in der Atmosphäre unter stationären Verhältnissen besteht. Ist aber die Temperaturverteilung bekannt, so kann man daraus die Druckverteilung mit Hilfe der statischen Barometerformel ableiten. Von diesem Gedanken ausgehend, nahm ich die folgenden Untersuchungen vor.

1. Qualitative Gesetze über die Druckverteilung.

Wenn man sich nur daran erinnert, dass der vertikale Abstand zweier isobaren Flächen unter sonst gleichen Umständen proportional den durchschnittlichen absoluten Temperaturen der Vertikalen ist und dass also, je höher die Temperatur ist, die vertikalen Abstände der isobaren Flächen auch um so grösser sind, so kann man die in der angeführten Abhandlung gegebenen qualitativen Regeln unmittelbar durch die folgenden ersetzen:

I. Wenn sich die Wolken schneller als der Wind an der Erdoberfläche bewegen und man sich in der Richtung der Wolken-

¹⁾ J. W. SANDSTRÖM, Ueber die Beziehung zwischen Temperatur und Luftbewegung in der Atmosphäre unter stationären Verhältnissen. Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förhandl. 1901, N:o 10.

bewegung einstellt, so sind die vertikalen Abstände der isobaren Flächen rechts grösser als links.

II. Wenn sich die Wolken langsamer als der Wind an der Erdoberfläche bewegen und man sich gegen die Richtung des Windes einstellt, so sind die vertikalen Abstände der isobaren Flächen ebenfalls rechts grösser als links.

III. Bewegen sich die Wolken schneller als der Wind an der Erdoberfläche, so sind die vertikalen Abstände der isobaren Flächen in den Cyklonen kleiner im Centrum als in dem Aussenrande und in den Anticyklonen grösser im Centrum als in dem Aussenrande; bewegen sich dagegen die Wolken langsamer als der Wind, so sind die vertikalen Abstände der isobaren Flächen in den Cyklonen grösser im Centrum als in dem Aussenrande und in den Anticyklonen kleiner im Centrum als in dem Aussenrande.

2. Quantitatives Gesetz über die Druckverteilung.

Um die obigen Resultate in quantitative Form zu kleiden, gehen wir von Prof. V. BJERKNES' allgemeinem hydrodynamischen Cirkulationssatze

$$\frac{dC}{dt} = - \int v dp - 2\omega \frac{ds}{dt} - R \quad (1)$$

aus. Wie in der vorigen Abhandlung specialisieren wir, indem wir die Reibung nicht berücksichtigen und die Bewegung stationär annehmen. Dadurch geht die Gleichung (1) in die folgende über

$$- \int v dp = 2\omega \frac{ds}{dt}. \quad (2)$$

Es ist v das spezifische Volumen und p der Druck der Luft. Die Integration muss längs einer beliebigen, geschlossenen, aus Luftpartikeln zusammengesetzten Kurve ausgeführt werden. Es ist s der Flächeninhalt der Projektion der geschlossenen Kurve in der Aequatorebene und ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde.

Wie in der vorigen Abhandlung setzen wir auch hier die geschlossene Kurve aus zwei vertikalen a und b und zwei isobaren Linien $p = p_0$ und $p = p_1$ in der Atmosphäre zusammen. Wir brauchen dann die Integration nur längs den Vertikalen auszuführen, denn dp und also auch das Integral ist Null längs den Isobaren. Das Integral für die ganze geschlossene Kurve wird dann

$$-\int vdp = \left(\int_{p_1}^{p_0} vdp \right)_a - \left(\int_{p_1}^{p_0} vdp \right)_b. \quad (3)$$

Nun ist aber infolge der Differentialformel für barometrische Höhenmessung

$$vdp = -gdz.$$

Wenn wir die beiden Seiten dieser Formel längs der Vertikalen a integrieren, so ergibt sich

$$\left(\int_{p_1}^{p_0} vdp \right)_a = \left(\int_{z_0}^{z_1} g dz \right)_a$$

wo z_0 die Meereshöhe des unteren Endpunktes und z_1 die Meereshöhe des oberen Endpunktes der Vertikalen a bedeuten. Im Integrale rechts setzen wir für die Schwerkraft g einen mittleren Wert g_a ein und führen die Integration aus. Dadurch bekommen wir

$$\left(\int_{p_1}^{p_0} vdp \right)_a = g_a(z_1 - z_0).$$

Es ist $z_1 - z_0$ die Länge der Vertikalen a . Wenn wir diese Länge mit L_a bezeichnen, so wird

$$\left(\int_{p_1}^{p_0} vdp \right)_a = g_a L_a.$$

In derselben Weise bekommen wir für die Vertikale b

$$\left(\int_{p_1}^{p_0} vdp \right)_b = g_b L_b.$$

Wird dies in (3) eingesetzt, so ergibt sich

$$-\int vdp = g_a L_a - g_b L_b$$

und wenn wir diese Formel mit (2) vergleichen

$$g_a L_a - g_b L_b = 2\omega \frac{ds}{dt}.$$

Für Vertikalen, die nicht allzuweit von einander entfernt sind, genügt es, für g_a und g_b den mittleren Wert g_{ab} anzuwenden. Die Formel (3) kann also für diesen Fall folgendermassen geschrieben werden

$$L_a - L_b = \frac{2\omega}{g_{ab}} \cdot \frac{ds}{dt}. \quad (4)$$

Hier sind ω und g_{ab} bekannte Grössen. $\frac{ds}{dt}$ kann aus der bekannten Luftbewegung berechnet werden. Somit sind alle Grössen gegeben, welche für die Berechnung von $L_a - L_b$ nötig sind. Um die Bedeutung der Formel zu sehen, können wir uns denken, dass die Isobarfläche $p = p_0$ mit der Meeresoberfläche zusammenfällt. Die Differenz $L_a - L_b$ giebt dann die Topographie der Isobarfläche $p = p_1$, bezogen auf eine Fläche von der konstanten Seehöhe L_b . Weiter sieht man ein, dass wenn allgemeiner die Isobarfläche $p = p_0$ nicht mehr mit der Meeresoberfläche zusammenfällt, aber doch ihre Topographie bekannt ist, so wird man mit der Kenntnis der Grösse $L_a - L_b$ die Topographie der Isobarfläche $p = p_1$ ermitteln können.

3. Beispiel für die Anwendung der Formel (4).

Bei den wissenschaftlichen Ballonfahrten zu Berlin hat man in cyklonischer Wetterlage in 5000 Meter Höhe durchschnittlich 4,3 mal grössere Luftgeschwindigkeiten als in der Nähe der Erdoberfläche gefunden. In den Cyklonen in Mittel-Europa sind also, infolge des qualitativen Gesetzes III, die vertikalen Abstände der isobaren Flächen im Centrum kleiner als in dem Aussenrande. Die mittlere Windgeschwindigkeit in der Nähe der Erdoberfläche für alle Fahrten, welche bei cyklonischer Wetterlage bewerkstelligt wurden, betrug 4,6 m/sec. In 5000

Meter Höhe kann danach die durchschnittliche Luftgeschwindigkeit zu 19,8 m/sec gesetzt werden.

Wenn man nun die Vertikale a in das Centrum der Cyklone und die Vertikale b in 1000 km Entfernung davon errichtet und die beiden Vertikalen mit Linien in den isobaren Flächen $p=740$ mm und $p=400$ mm verbindet, so erhält man eine geschlossene Kurve, welche aus zwei vertikalen und zwei isobaren Linien zusammengesetzt ist, und es liegt dabei die isobare Linie $p=400$ mm in etwa 5000 Meter Höhe oberhalb der Erdoberfläche. Nun wird die isobare Kurve $p=740$ mm vom Winde in jeder Sekunde 4,6 Meter, und die isobare Kurve $p=400$ mm von der Luftgeschwindigkeit in 5000 Meter Höhe in jeder Sekunde 19,8 Meter zur Seite geführt. Die Aenderung des Flächeninhaltes der Projektion der geschlossenen Kurve auf der Aequatorebene ist dann durch ein Rechteck gegeben, dessen Länge $\sin \lambda \cdot 1000$ km und dessen Breite $19,8 - 4,6 = 15,2$ Meter beträgt. Wenn wir für die geographische Breite $\lambda = 53^\circ$ setzen, so ist $\sin \lambda = 0,8$, und der Flächeninhalt des Rechtecks wird somit $800\,000 \cdot 15,2 = 12\,160\,000$ Meter², d. h. $\frac{ds}{dt}$ hat den Wert $12\,160\,000$ m²/sec. Nun ist $\omega = 0,0000729$ 1/sec., $g_{ab} = 9,805$ m/sec² und also zufolge (4)

$$I_a - L_b = \frac{2 \cdot 0,0000729 \cdot 12\,160\,000}{9,805} = 181 \text{ Metern.}$$

Der vertikale Abstand der isobaren Flächen $p=740$ mm und $p=400$ mm ist also im Centrum 181 Meter kleiner als in 1000 km Entfernung davon, und zwar unter der oben gemachten Annahme, dass die Luftgeschwindigkeit in 5000 Meter Höhe 15,2 m/sec grösser als in der Nähe der Erdoberfläche ist.

Wenn man von Schicht zu Schicht rechnet, so findet man, dass die Isobarflächen im Centrum mit der Höhe immer grössere Vertiefungen erhalten, solange die Geschwindigkeit mit der Höhe zunimmt. Oberhalb der Schicht der stärksten cyklonischen Circulation, welche bei den wissenschaftlichen Ballonfahrten noch nicht erreicht wurde, müssen sie sich wieder ausgleichen, und in

diesem oberen Teil muss die Cyklone, wie in der vorigen Abhandlung gezeigt wurde, warmes Centrum haben, während es im unteren Teil kalt ist.

In den Anticyklonen hat man ebenfalls in der Höhe grössere Luftgeschwindigkeiten als in der Nähe der Erdoberfläche gefunden, es müssen also infolge des qualitativen Gesetzes III im Centrum einer solchen die vertikalen Abstände der isobaren Flächen grösser als in dem Aussenrande sein. In 5000 Meter Höhe war die Luftgeschwindigkeit durchschnittlich 3,6 mal grösser als in der Nähe der Erdoberfläche, und das Mittel der Windgeschwindigkeit in der Nähe der Erdoberfläche für alle Fahrten, welche bei anticyklonischer Wetterlage ausgeführt wurden, betrug 4,4 m/sec. Die durchschnittliche Luftgeschwindigkeit in 5000 Meter Höhe in einer Anticyklone wird danach 15,8 m/sec. Wenn man aus diesen Daten $L_a - L_b$ in derselben Weise wie für die Cyklone berechnet, so ergibt sich, dass die vertikalen Abstände der 760 mm und der 400 mm isobaren Flächen im Centrum 144 Meter grösser sind als in 1000 km Entfernung davon. In den Anticyklonencentra haben die Isobarflächen mit der Höhe immer grössere Erhebungen, solange die anticyklonische Cirkulation mit der Höhe zunimmt, und oberhalb der Schicht der stärksten anticyklonischen Cirkulation müssen sie sich wieder ausgleichen. Diese Schicht trennt zugleich den oberen kalten und den unteren warmen Teil der Anticyklone von einander ab.

Diese Resultate sind, wegen der in der Barometerformel enthaltenen Beziehung zwischen Temperatur und Druck, schon in derselben Weise verificiert wie die Resultate über die Temperaturen, die wir in der vorigen Abhandlung abgeleitet haben, soweit es sich um die unteren Teile der Cyklonen und der Anticyklonen handelt. Eine genauere Prüfung der Resultate wird erst möglich sein, wenn simultane Ballon- und Drachenfahrten, sowie Wolken- und Windmessungen in den Cyklonen und Anticyklonen vorgenommen werden.

4. Ueber die Neigung der isobaren Flächen gegen einander in der Umgebung einer Wolkenmessungsstation.

Ihre grösste Bedeutung wird, wie schon hervorgehoben, die Formel (4) dadurch erhalten, dass sie uns die Mittel in die Hand giebt, die Isobarkarten in den höheren Luftschichten, auf Grundlage von simultanen Wolken- und Windbeobachtungen zeichnen zu können. Wir wollen nun die Grundzüge der Methode geben, welche dabei zur Anwendung kommen wird. Gleichzeitig werden wir einige naheliegende Bemerkungen über die mit der Druckverteilung so nahe verwandten Temperaturverteilung machen.

Wir fangen damit an, zu untersuchen, wie viel man auf einer Wolkenmessungsstation aus den eigenen Beobachtungen über die Druck- und Temperaturverteilung in der nächsten Umgebung schliessen kann.

Wir stellen uns eine aus Luftpartikeln zusammengesetzte Vertikale bei der Wolkenmessungsstation vor, welche von der Erdoberfläche bis zu der Höhe der beobachteten Wolke reicht. Das untere Ende dieser Vertikale wird vom Winde und das obere Ende von der horizontal angenommenen Wolkenbewegung fortgeführt, so dass die anfangs vertikale Linie bald in eine geneigte Lage kommt. Sobald die Linie aus der vertikalen Lage gekommen ist, wird eine bestimmte Vertikalebene durch den unteren und den oberen Endpunkt der Linie definiert. Diese Vertikalebene wird für die folgenden Untersuchungen sehr wichtig sein, und wir wollen sie deshalb der Kürze wegen die Hauptvertikalebene durch die Wolkenmessungsstation nennen.

Eine fundamentale Eigenschaft dieser Ebene findet man durch die folgende Ueberlegung. Die anfangs vertikale Linie durch die Wolkenmessungsstation wird sich nur so neigen, dass der untere und der obere Endpunkt während ihrer fortgesetzten Bewegung entweder in der Hauptvertikalebene bleiben, oder doch so, dass die Abstände der beiden Punkte von der Vertikalebene

unter einander gleich bleiben. Eine geschlossene Kurve, welche aus zwei Vertikalen in der Hauptvertikalebene sowie aus isobaren Kurven in der Nähe der Erdoberfläche und in der Höhe der gemessenen Wolke zusammengesetzt ist, verändert deshalb den Flächeninhalt ihrer Projektion in der Aequatorebene nicht.

Die Grösse $\frac{ds}{dt}$ ist somit für die geschlossene Kurve gleich Null und also infolge (4) auch $L_a - L_b = 0$.

In der Hauptvertikalebene verlaufen also die isobaren Linien unter einander parallel. Um den Sinn der Neigung der isobaren Flächen gegen einander ausserhalb der Hauptvertikalebene zu bekommen, denken wir uns eine geschlossene Kurve in einer Vertikalebene senkrecht zu der Hauptvertikalebene. Wenn wir uns in der Hauptvertikalebene so einstellen, dass diese Kurve, infolge der Luftbewegung vorwärts fällt, so vergrössert sich der Flächeninhalt ihrer Projektion auf der Erdoberfläche, und diese Projektion bekommt dann, nach dem von Prof. BJERKNES gegebene qualitativen Satz,¹⁾ anticyklonische Cirkulation. Wird diese anticyklonische Cirkulation auf die geschlossene Kurve zurückprojiziert, so findet man, dass die Luft rechts von der Hauptvertikalebene heruntergepresst und links emporgesaugt wird. Die Luft wird also infolge der Luftbewegung rechts dynamisch erwärmt und links dynamisch abgekühlt. Daraus folgt, dass die vertikalen Abstände der isobaren Flächen rechts grösser und links kleiner sind als in der Hauptvertikalebene selbst.

Die Lage der Hauptvertikalebene wird am bequemsten durch die folgende Konstruktion gefunden. Man setzt auf einer Karte zwei Vektoren aus, welche die Grösse und Richtung der Wolken- bzw. der Windbewegung darstellen und macht eine Parallelogramm-konstruktion, indem man den Wolkenbewegungsvektor als Resultante und den Windbewegungsvektor als die eine Komponente betrachtet. Die Richtung der zweiten Komponente giebt dann die Schnitthlinie zwischen der Hauptvertikalebene und der

¹⁾ V. BJERKNES, Cirkulation relativ zu der Erde, Satz IV. Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1901, N:o 10.

Erdoberfläche an. Die Grösse der zweiten Komponente, welche wir im folgenden mit n m/sec bezeichnen werden, ist für den Betrag der Neigung der isobaren Flächen gegen einander ausserhalb der Hauptvertikalebene entscheidend.

Wenn wir nun eine geschlossene Kurve betrachten, welche aus einer Vertikalen b in der Hauptvertikalebene und einer anderen Vertikalen a in α km Entfernung von der Hauptvertikalebene, sowie Kurven in den isobaren Flächen in der Nähe der Erdoberfläche und in der Höhe der gemessenen Wolke zusammengesetzt ist, so ist die Veränderung des Flächeninhaltes der Projektion dieser geschlossenen Kurve auf der Aequatorebene in der Sekunde durch ein Rechteck gegeben, dessen Länge $\alpha \sin \lambda$ km und dessen Breite n Meter beträgt. Wir haben also

$$\frac{ds}{dt} = 1000 \alpha n \sin \lambda \text{ m}^2/\text{sec} \text{ und mithin zufolge (4)}$$

$$L_a - L_b = \alpha n \frac{1000 \cdot 2\omega \sin \lambda}{g_{ab}} \text{ Metern.}$$

Hier genügt es g_{ab} durch die Schwerkraft in 1000 Meter Höhe bei der Wolkenbeobachtungsstation zu ersetzen. Diese beträgt

$$g_{1000} = 9,803 (1 - 0,00259 \cos 2\lambda).$$

Wird dies in der obigen Formel anstatt g_{ab} eingesetzt, so ergibt sich

$$L_a - L_b = \alpha n \frac{1000 \cdot 2\omega \sin \lambda}{9,803 (1 - 0,00259 \cos 2\lambda)}. \quad (5)$$

Wenn wir hier der Kürze wegen

$$\delta = \frac{1000 \cdot 2\omega \sin \lambda}{9,803 (1 - 0,00259 \cos 2\lambda)}$$

setzen, so geht die Formel (5) in die folgende über

$$L_a - L_b = \alpha n \delta \quad (6)$$

δ hängt nur von der geographischen Breite λ ab. Die Tabelle 1 enthält sie für jeden Breitengrad.

Tabelle 1.

$$\delta = \frac{1000 \cdot 2\omega \cdot \sin \lambda}{9,803 (1 - 0,00259 \cos 2\lambda)}$$

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0°	0	0,00026	0,00052	0,00078	0,00104	0,00130	0,00156	0,00182	0,00208	0,00233
10	0,00259	0,00285	0,00310	0,00335	0,00361	0,00386	0,00411	0,00436	0,00461	0,00485
20	0,00510	0,00534	0,00558	0,00582	0,00606	0,00630	0,00653	0,00676	0,00700	0,00722
30	0,00745	0,00767	0,00789	0,00811	0,00833	0,00854	0,00875	0,00896	0,00917	0,00937
40	0,00957	0,00976	0,00996	0,01015	0,01034	0,01052	0,01070	0,01088	0,01105	0,01122
50	0,01139	0,01155	0,01171	0,01187	0,01202	0,01218	0,01232	0,01246	0,01260	0,01274
60	0,01287	0,01301	0,01312	0,01323	0,01335	0,01346	0,01357	0,01367	0,01377	0,01386
70	0,01395	0,01404	0,01412	0,01420	0,01427	0,01434	0,01440	0,01446	0,01452	0,01457
80	0,01462	0,01466	0,01470	0,01473	0,01476	0,01478	0,01480	0,01482	0,01483	0,01484

Mit Hilfe der Tabelle 1 ist es sehr leicht die Grösse $L_a - L_b$ zu berechnen. Wir nehmen an, dass man aus einer Wolken- und Windbeobachtung in Wisby, $\lambda = 57^\circ 39'$, die Hauptvertikalebene konstruiert und $n = 24,1$ m/sec gefunden hat. Wir bezeichnen mit L_b den vertikalen Abstand der isobaren Flächen in der Hauptvertikalebene, und es soll L_a für einen Ort a berechnet werden, welcher in 100 km Entfernung von der Hauptvertikalebene auf der linken Seite derselben liegt. Wir haben also $\delta = 0,01255$ und $n = 24,1$. Wird dies in (6) eingesetzt, so bekommen wir $L_a - L_b = -30,2$ Meter.

Aus der Formel (6) sehen wir, dass $L_a - L_b$ proportional dem Abstände α von der Hauptvertikalebene ist. Die Neigung der isobaren Flächen gegen einander in der Umgebung der Wolkenmessungsstation kann dann auf der Karte durch ein System von aequidistanten Geraden repräsentiert werden, welche parallel der Hauptvertikalebene verlaufen. Man wählt diese Geraden zweckmässig so, dass sie die Orte geben, wo $L_a - L_b$ 1, 2, 3, etc. Meter beträgt. Die Abstände α_L in km der Geraden von einander bekommt man, wenn man in (6) $L_a - L_b = 1$ Meter setzt und α auslöst. Dabei ergibt sich

$$\alpha_L = \frac{1}{n\delta} \quad (7)$$

δ ist für jeden Ort konstant, und man kann deshalb für jede Wolkenmessungsstation α_L durch eine kleine Tabelle als Funktion von n darstellen. Die Tabelle 2 enthält α_L für Wisby.

Tabelle 2.

$\alpha_L = \frac{1}{0,01255 \cdot n}$										
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	∞	79,7	39,8	26,6	19,9	15,9	13,8	11,4	10,0	8,9
10	7,97	7,25	6,64	6,14	5,69	5,32	4,98	4,69	4,43	4,19
20	3,98	3,80	3,63	3,48	3,32	3,19	3,07	2,96	2,85	2,75
30	2,66	2,58	2,50	2,42	2,35	2,28	2,21	2,15	2,10	2,05
40	1,99	1,94	1,91	1,86	1,81	1,77	1,73	1,70	1,66	1,63
50	1,59	1,56	1,53	1,50	1,48	1,45	1,42	1,40	1,37	1,35
60	1,33	1,31	1,29	1,27	1,25	1,23	1,21	1,19	1,17	1,16
70	1,14	1,12	1,11	1,09	1,08	1,06	1,05	1,04	1,02	1,01
80	1,00	0,99	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90
90	0,89	0,88	0,87	0,86	0,85	0,84	0,83	0,82	0,81	0,81

5. Ueber die Temperaturverteilung in der Umgebung der Wolkenmessungsstation.

Wird die Gleichung (4) in der vorigen Abhandlung

$$t_a - t_b = \frac{2\omega \frac{ds}{dt}}{2,30259 \cdot c \log \frac{p_0}{p_1}}$$

mit der Gleichung (4) in dieser verglichen, so findet man die folgende Beziehung

$$t_a - t_b = \frac{g_{ab}}{2,30259 \cdot c \log \frac{p_0}{p_1}} (L_a - L_b).$$

Hier genügt es, anstatt g_{ab} den Wert g_b für die Vertikale an der Wolkenmessungsstation zu benützen, also

$$t_a - t_b = \frac{g_b}{2,30259 \cdot c \log \frac{p_0}{p_1}} (L_a - L_b). \quad (8)$$

Diese Gleichung vereinfacht sich etwas, wenn man p_0 und p_1 mit Hilfe der Barometerformel eliminiert. Die Barometerformel lautet

$$-vdp = g dz.$$

Nun ist aber nach dem MARIOTTE-GAY-LUSSAC'schen Gesetze

$$v = \frac{cT}{p}.$$

Wird dieser Wert in die Barometerformel eingesetzt, so ergibt sich

$$-\frac{cdp}{gp} = \frac{dz}{T},$$

und wenn wir die beiden Seiten dieser Gleichung längs der Vertikalen b zwischen p_0 und p_1 integrieren, so bekommen wir

$$-\frac{2,30259}{g_b} c \log \frac{p_0}{p_1} = \frac{L_b}{T_b}.$$

Die Gleichung (8) kann also folgendermassen geschrieben werden

$$t_a - t_b = \frac{T_b}{L_b} (L_a - L_b). \quad (9)$$

Es sind t_a und t_b die mittleren Temperaturen der Vertikalen a bzw. b . Die Grösse $t_a - t_b$ ist infolge der Formel (9) der Grösse $L_a - L_b$ proportional. In der Hauptvertikalebene, wo $L_a - L_b$ verschwindet, ist auch $t_a - t_b = 0$. Rechts von der Hauptvertikalebene ist $t_a - t_b$ positiv und links negativ. Die Grösse $t_a - t_b$ kann auch durch ein System von aequidistanten Geraden, welche mit der Hauptvertikalebene parallel laufen, dargestellt werden. Sollen diese für jeden Grad Cels. gezeichnet werden, so findet man ihre Abstände α_i von einander, wenn man in (9), infolge der Formel (6), $L_a - L_b$ mit $\alpha n d$ vertauscht und $t_a - t_b = 1$ setzt. Dabei ergibt sich

$$\alpha_i = \frac{L_b}{n d T}. \quad (10)$$

Zwischen den Abständen α_L der Linien gleicher $L_a - L_b$ Werte und den Abständen α_t der Linien gleicher $t_a - t_b$ Werte besteht infolge (7) und (10) die folgende Beziehung

$$\alpha_i = \frac{L_b}{T_b} \alpha_L. \quad (11)$$

Bei der Berechnung von α_i nach dieser Formel, bekommt man T_b genügend genau, wenn man von der beobachteten Lufttemperatur an der Wolkenmessungsstation $2,5^\circ$ C. für jeden 1000 Meter Wolkenhöhe abzieht und 273° hinzufügt. L_b ist die gemessene Wolkenhöhe. Wir nehmen an, dass man in Wisby $n = 24,1$, $L_b = 3950$ und $T_b = 279$ einmal gefunden hat. Die Tabelle 2 giebt $\alpha_L = 3,31$ km für $n = 24,1$ und die Formel (11) giebt

$$\alpha_i = \frac{3950}{279} \cdot 3,31 = 46,9 \text{ km.}$$

Die Linien, welche in diesem Abstände von einander und parallel der Hauptvertikalebene gezeichnet werden, sind eine Art von Isothermen, dürfen aber mit den Isothermen auf der Erdoberfläche nicht verwechselt werden. Sie verbinden die Fusspunkte aller Vertikalen, welche gleiche durchschnittliche Temperatur haben.

6. Bemerkung über die Einwirkung der Feuchtigkeit der Luft auf die eben berechneten Grössen.

Es mag hier eine Bemerkung über die Einwirkung der Feuchtigkeit der Luft auf die vorher berechneten Grössen gemacht werden. Feuchte Luft ist bekanntlich etwas leichter als trockene Luft von demselben Druck und derselben Temperatur. Das MARIOTTE-GAY-LUSSAC'sche Gesetz gilt demnach nicht für feuchte Luft. Unter den vorher berechneten Grössen $L_a - L_b$ und $t_a - t_b$ ist jene ohne Beihülfe des MARIOTTE-GAY-LUSSAC'schen Gesetzes abgeleitet. Der Betrag von $L_a - L_b$ ist nur von der Luftbewegung abhängig und hat nichts mit der Zustandsbedingung des Gases, für welche sie berechnet ist, zu thun. Bei der Berechnung der Grösse $t_a - t_b$ dagegen muss man die Beziehung zwischen der Temperatur und dem specifischen Volumen des Gases benützen. Bei der Ableitung dieser Grösse haben wir das

MARIOTTE-GAY-LUSSAC'sche Gesetz benützt. Die vorher berechneten Werte von $t_a - t_b$ gelten demnach nur für trockene Luft.

Mit Hilfe der Beziehung zwischen der Temperatur und dem spezifischen Volumen für feuchte Luft kann man $t_a - t_b$ auch für feuchte Luft finden. Der folgende Weg kann auch eingeschlagen werden. Man fügt zur beobachteten Temperatur eine solche Korrektur hinzu, dass trockene Luft von der korrigierten Temperatur dieselbe Dichte wie die wirklich vorhandene feuchte Luft bekommt. Die in dieser Weise korrigierte Temperatur ist von GULDBERG und MOHN »virtuelle Temperatur« genannt worden. Rechnet man nun überall mit der virtuellen Temperatur anstatt mit der thermometrisch beobachteten, so ist das MARIOTTE-GAY-LUSSAC'sche Gesetz auch für feuchte Luft gültig. Wenn man also unter t_a und t_b die durchschnittliche virtuelle Temperatur der Vertikalen a und b versteht, so sind die vorher berechneten Beträge von $t_a - t_b$ auch für feuchte Luft gültig. Die Differenz zwischen der virtuellen $t_a - t_b$ und der thermometrischen $t_a - t_b$ ist indessen sehr gering.

7. Ueber die Anwendung von Wolkenbeobachtungen bei der Konstruktion von Karten, welche die Topographie der isobaren Flächen in den höheren Luftschichten darstellen.

Wir haben gesehen, dass man aus einer einzigen Wolken- und Windbeobachtung die Neigung der isobaren Flächen gegen einander in der Umgebung der Wolkenmessungsstation ableiten kann, und dass diese Neigung durch eine kleine Karte graphisch dargestellt werden kann. Diese kleine Karte kann auf jeder einzelnen Station für die Stellung lokaler Wetterprognosen ihre Bedeutung haben. Die wichtigste Anwendung wird aber, wie ich schon mehrmals angedeutet habe, die sein, dass man durch synoptische Bearbeitung des gesammten Materiales vollständige Isobarkarten für die höheren Luftschichten konstruieren kann. Zu diesem Zwecke müssen die Wind- und Wolkenbeobachtungen nach einem Central-Bureau telegraphiert werden. Wie dieses Material in den Einzelheiten zu bearbeiten ist, werde ich bei

einer späteren Gelegenheit ausführlich auseinandersetzen. Hier sollen nur die Grundzüge der Methode angeführt werden.

Um die Aufgabe konkreter zu machen, beschränken wir uns auf die Isobarflächen, welche in etwa 5000 Meter Höhe liegen. Die Luftgeschwindigkeit in diesen Isobarflächen bekommt man durch Messung der Wolken, welche in dieser Höhe, also etwa zwischen 4000 und 6000 Meter Höhe schweben. Die Wolken, welche unterhalb 4000 und oberhalb 6000 Meter liegen, werden zweckmässig zur Konstruktion von Isobarkarten in den niedrigeren bezw. höheren Schichten verwendet. Sind nun die Wolken- und Windgeschwindigkeiten als Vektoren auf der Karte eingetragen, so kann man die Grösse $\frac{ds}{dt}$ und danach $L_a - L_b$ infolge der Formel (4), für die geschlossenen Kurven, welche aus einer Vertikalen b beim Central-Bureau, den Vertikalen a bei jeder der Wolkenmessungsstationen, und aus isobaren Linien in der Nähe der Erdoberfläche und in 5000 Meter Höhe zusammengesetzt sind, berechnen. Der Betrag von $L_a - L_b$ kann auch für beliebige Orte a , welche zwischen den Wolkenmessungsstationen liegen, berechnet werden. In dieser Weise bekommt man die Grösse $L_a - L_b$ für mehrere Orten. Wenn man danach Linien zeichnet, welche die Punkte gleicher $L_a - L_b$ -Werte verbinden, so hat man eine Karte, welche die Grösse $L_a - L_b$ synoptisch darstellt.

Die $L_a - L_b$ -Karte wird viel genauer gezeichnet, wenn man ausser der direkt berechneten $L_a - L_b$ -Werte für jede Wolkenmessungsstation noch die Hauptvertikalebene und die mit dieser parallelen Geraden in den Abständen α_L konstruiert. Die Linien gleicher $L_a - L_b$ -Werte müssen nämlich bei jeder Wolkenmessungsstation in der Richtung der Hauptvertikalebene und in den Abständen α_L von einander verlaufen. Man wird also in dieser Weise viele Details in der Form der Linien gleicher $L_a - L_b$ -Werte finden, welche sonst nur durch eine sehr grosse Anzahl direkt berechneter $L_a - L_b$ -Werte gefunden werden könnten. Man wird m. a. W. bei der Konstruktion der $L_a - L_b$ -

Karte eine viel geringere Anzahl von $L_a - L_b$ -Werte direkt berechnen müssen, wenn man die Hauptvertikalebene und die mit dieser parallelen Geraden für jede Station zeichnet, als es sonst nötig ist.

Mit Hilfe der in dieser Weise konstruierten $L_a - L_b$ -Karte, kann man eine Karte zeichnen, welche die Topographie der Isobarflächen in etwa 5000 Meter Höhe darstellt. Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, dass die untere Isobarfläche mit der Meeresoberfläche über das ganze Gebiet der Karte zusammenfällt. Es soll z. B. unter dieser Annahme eine Karte gezeichnet werden, welche die Topographie der Isobarfläche giebt, die im Central-Bureau in genau 5000 Meter Höhe über dem Meer sich befindet. Dann hat man nur die Zahl 5000 zu den $L_a - L_b$ -Werten auf der $L_a - L_b$ -Karte hinzuzufügen, und die dadurch erhaltene Karte stellt die Höhe über dem Meeresniveau in Metern von jedem Punkte der fraglichen Isobarfläche synoptisch dar. Das Liniensystem auf der $L_a - L_b$ -Karte braucht also in diesem Falle keiner Aenderung unterworfen zu werden, sondern nur die Zahlen.

Im allgemeinen Falle, wenn die untere Isobarfläche nicht mehr mit dem Meeresniveau zusammenfällt, kann man die Topographie einer isobaren Fläche, welche in der Nähe der Erdoberfläche liegt, z. B. $p = 750$ aus den direkten Barometerbeobachtungen oder aus der Isobarkarte im Meeresniveau ableiten. Die Höhe der Isobarfläche $p = 750$ mm über den Meeresniveau mag im Central-Bureau h Meter betragen. Durch Superposition dieser Karte auf der $L_a - L_b$ -Karte erhält man eine Karte, welche die Topographie der isobaren Flächen in etwa 5000 Meter Höhe giebt, bezogen auf die geometrische Fläche, welche in der konstanten Seehöhe L_b sich befindet. Es soll z. B. wieder die Karte gezeichnet werden, welche die Topographie der Isobarfläche darstellt, die beim Central-Bureau sich in genau 5000 Meter Höhe über dem Meer befindet. Dann haben wir nur die Zahl $5000 - h$ zu jeder Zahl auf der durch Superposition erhaltenen Karte hinzuzufügen, und die dadurch erhaltene Karte giebt da-

bei die Höhe in Metern über dem Meeresniveau jedes Punktes der fraglichen Isobarfläche an.

So weit kann man mit nur Wolken- und Windbeobachtungen kommen. Hat man aber durch eine Drachen- oder Ballonfahrt beim Central-Bureau z. B. die Meereshöhe 5094 Meter der Isobarfläche $p = 400$ mm gefunden, so braucht man dann nur die Zahl 5094 — h zu den Zahlen auf der durch Superposition erhaltenen Karte hinzuzufügen, um die Karte zu bekommen, welche die Meereshöhe der 400 mm Isobarfläche in Metern synoptisch giebt. Durch eine einzige Drachen- oder Ballonfahrt und mehrere Wolkenbeobachtungen bekommt man also die vollständige Form der Isobarflächen in den höheren Luftschichten.

Diese Methode ist nun unter der Voraussetzung stationärer und reibungsloser Bewegung abgeleitet und gilt also nur annäherungsweise für die thatsächlichen Verhältnisse. Wenn man aber eine geringe Anzahl Drachen- oder Ballonstationen in grosser Entfernung von einander errichtet, so kann man mit Hilfe einer grossen Anzahl Wolkenmessungsstationen in der oben beschriebenen Weise interpolieren und bekommt dadurch die Topographie der Isobarflächen in der Höhe, selbst wenn die Bewegung nicht vollkommen stationär und reibungslos ist.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademins Bibliotek.

(Forts. från sid. 86.)

Genève. *Société de physique et d'histoire naturelle.*

Mémoires. T. 34: Fasc. 1. 1902. 4:o.

Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*

Nachrichten. Geschäftliche Mittheilungen. 1901: H. 2. 8:o.

› Math.-phys. Klasse. 1901: H. 3. 8:o.

› Phil.-hist. Klasse. 1901: H. 4. 8:o.

Halle. *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen u. Thüringen.*

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd 74 (1901/02): H. 5-6. 8:o.

Hamburg. *Deutsche Seewarte.*

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an 10 Stationen 2.

Ordnung ... Jahrg. 23 (1900). 4:o.

Heidelberg. *Grossherzogl. Sternwarte.*

Mittheilungen. 1. 1901. 8:o.

Helsingfors. *Société Finno-Ougrienne.*

Mémoires. 17. 1902. 8:o.

Karlsruhe. *Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogthum Baden.*

Übersicht d. Ergebnisse der ... Beobacht. 1901: 1-6, 8-12. Fol.

Kew. *Royal botanic gardens.*

Bulletin of miscellaneous information. 1902: Append. 2. 8:o.

Kjöbenhavn. *Det danske meteorologiske Institut.*

Meteorologisk Aarbog. 1900: D. 1. Fol.

— *K. danske Videnskaberne Selskab.*

Oversigt over Forhandlinger. 1901: No. 6. 8:o.

Skrifter. Naturvid.-math. Afd. (6) T. 9: 8; 10: 3. 1901. 4:o.

› Hist.-filos. Afd. (6) T. 5: 2. 1902. 4:o.

Kristiania. *Universitets-Biblioteket.*

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd 23: H. 2-4. 1901. 8:o.

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd 39: H. 1-3. 1901. 8:o.

Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*

Bulletin. (4) Vol. 37: No. 142. 1901. 8:o.

Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*

Abhandlungen. Math.-phys. Classe. Bd 27: N:o 2-3. 1901. 8:o.

› Philol.-hist. Classe. Bd 19: N:o 3; 20: 4; 21: 2. 1901. 8:o.

Berichte über die Verhandlungen. Math.-phys. Classe. 1901: 4-6. 8:o.

› › › › Philol.-hist. Classe. 1901: 2-3. 8:o.

Antrag ... auf Ernennung einer Fachcommission für Erforschung d. Anatomie des Gehirnes eingesandt d. R. Soc. in London ... Febr. 1902. 8:o.

Leon. *Observatorio meteorologico.*

Boletin mensual. 1901: 1-12. 8:o.

London. Meteorological Office.

Monthly pilot charts of the North Atlantic and Mediterranean. 1902:
Sheet 12. Fol.

Report of the Meteorological Council to the R. Society. 1898/99:
Append. 13; 1900/01. 8:o.

— *Royal Astronomical society.*

Monthly notices. Vol. 62 (1901/02): No 3 & Append. 1. 8:o.

— *Chemical society.*

Journal. Vols. 79—80 (1901): Suppl. P. 1—2; 81—82 (1902): 3. 8:o.

Proceedings. Vol. 18 (1902): No 246—248. 8:o.

— *Geological society.*

Quarterly journal. Vol. 58 (1902): P. 1. 8:o.

— *R. Meteorological society.*

Quarterly Journal. Vol. 27 (1901): No 119—120. 8:o.

— *R. Microscopical Society.*

Journal. 1902: P. 1. 8:o.

— *Royal society.*

Reports to the Malaria Committee. Ser. 6. 1902. 8:o.

London, Ontario. Entomological society.

The Canadian entomologist. Vol. 34 (1902): No 2. 8:o.

Lyon. Société d'anthropologie.

Bulletin. T. 19 (1900). 8:o.

Manchester. Literary and philosophical society.

Memoirs and proceedings. Vol. 46 (1901/02): P. 2. 8:o.

Mexico. Observatorio astronómico nacional.

Anuario. Año 1902. 12:o.

Milano. Società Italiana di scienze naturali.

Atti. Vol. 40 (1901): Fasc. 4. 8:o.

Montpellier. Académie des sciences et lettres.

Mémoires. Section des sciences. (2) T. 3: N:o 1. 1901. 8:o.

— *Université.*

Rentrée solennelle des facultés et de l'école supérieure de pharmacie.
1901/02. 8:o.

Mount Hamilton. Lick observatory.

Bulletin. No 13—18. 1901—1902. 4:o.

Publications. Vol. 5 (1901). 4:o.

München. K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.

Sitzungsberichte. Math.-phys. Classe. 1901: H. 4. 8:o.

Philos.-philol. u. hist. Classe. 1901: H. 5. 8:o.

— *Bayerische botanische Gesellschaft.*

Berichte. Bd 8 (1902): Abt. 1. 8:o.

Nancy. Académie de Stanislas.

Mémoires. (5) T. 18 (1900/1901). 8:o.

— *Société des sciences.*

Bulletin des séances (3) T. 2 (1901): Fasc. 2—3. 8:o.

Nantes. Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France.

Bulletin. (2) T. 1 (1901): Trim. 1—2. 8:o.

New York. *Academy of sciences.*

Annals. Vol. 14 (1901/02): P. 1. 8:o.

— *Meteorological observatory of the department of public parks.*

Report. Year 1901: 1—12. 4:o.

O'-Gyalla. *K. Ung. meteorologisch-magnet. Central-Observatorium.*

Beobachtungen. 1901: 1—12. 4:o.

Ottawa. *Field-naturalists' club.*

The Ottawa Naturalist. Vol. 15 (1901/02): No 11. 8:o.

— *Geological survey of Canada.*

Annual report. General index 1863—1884. 1900. 8:o.

Paris. *Bureau central météorologique.*

Bulletin mensuel. Année 1901: 1—12. 4:o.

— *Bureau des longitudes.*

Connaissance des temps. Année 1904. 1901. 8:o.

— *Comité des travaux historiques et scientifiques.*

Bulletin de géographie historique et descriptive. Année 1901: N:o 1—2. 8:o.

Comptes rendus du congrès des sociétés savantes de Paris et des départements 1901: Section des sciences. 8:o.

— *École des mines.*

Annales. (9) T. 19(1901): Livr. 4—6; 20(1901): 7—8. 8:o.

— *École des hautes études.*

Bulletin des sciences mathématiques. (2) T. 25 (1901): 4—9. 8:o.

— *Muséum d'histoire naturelle.*

Bulletin. Année 1901: N:o 4—6. 8:o.

Nouvelles Archives. (4) T. 2: Fasc. 2; 3: 1. 1900—1901. 4:o.

— *Observatoire.*

Annales. *Observations* 1897. 1899. 4:o.

Carte photographique du Ciel. 23 st. kartblad. Fol.

— *Société astronomique de France.*

Bulletin. 1902: 2—3. 8:o.

— *Société de géographie.*

La Géographie. Année 1902: N:o 2. 8:o.

— *Société météorologique de France.*

Annuaire. Année 49 (1901): 6. 8:o.

Philadelphia. *Geographical Society.*

Bulletin. Vol. 3 (1901): No 3. 8:o.

Pisa. *Società Toscana di scienze naturali.*

Processi verbali. Vol. 12 (1901): p. 231—266; 13 (1902/03): 1—8. 8:o.

Pola. *Hydrographisches Amt der k. u. k. Kriegs-Marine.*

Meteorologische Termin-Beobachtungen. 1901: 12 & Monats- u. Jahres-übers. tv. Fol.

Prag. *K. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*

Sitzungsberichte. Math.-naturw. Cl. Jahrg. 1901. 8:o.

„ Cl. f. Philos., Gesch. u. Philol. Jahrg. 1901. 8:o.

Jahresbericht. Jahr 1901. 8:o.

Spisův počtěných jubilejní cenou. Číslo 12—13. 1901. 8:o.

- Prag.** *K. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
 Bericht über die Saecularfeier der Erinnerung an das vor 300 Jahren erfolgte Ableben des Reformators der beobachtenden Astronomie, Tycho Brahe ... am 24 Oct. 1901. Prag 1902. 8:o.
- *Spolek chemiků Českých.*
 Listy chemické. Ročník 25 (1901): Číslo 6—10. 8:o.
- Rio de Janeiro.** *Repartição da carta marítima, Directoria de meteorologia.*
 Boletim das observações meteorologicas e dos resultados magneticos Anno 6 (1901): N. 4—6. Fol.
- Roma.** *Reale accademia dei Lincei.*
 Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.
 Rendiconti. (5) Vol. 11 (1902): Sem. 1: Fasc. 3—4. 8:o.
 Classe di scienze morali, storiche e filologiche.
 Atti. (5) P. 2: Notizie degli Scavi. 1901: 11. 4:o.
 Annuario. 1902. 12:o.
- *R. Comitato geologico d'Italia.*
 Bollettino. Anno 1901: N. 3. 8:o.
- St. Pétersbourg.** *Observatoire physique central.*
 Ежемѣсячныхъ метеорологическихъ бжллетен. 1901: 1—12. 4:o.
- *Hortus Imp. Petropolitanae.*
 Scripta Botanica. Fasc. 17. 1901. 8:o.
- Sofia.** *Station Centrale météorologique de Bulgarie.*
 Extrait du bulletin météorologique et agricol. 1901: 1—12. 4:o.
- Strassburg.** *K. Hauptstation für Erdbebenforschung.*
 Monatsbericht. 1901: 9. 8:o.
- Sydney.** *Australian museum.*
 Records. Vol. 4: No 2, 5. 1901, 1902. 8:o.
- Tokyo.** *Geographical Society.*
 Journal of geography. Vol. 13 (1901): N:o 151—156. 8:o.
- *Imperial university. College of science.*
 Journal. Vol. 16: P. 1; 17: 1. 1901. 8:o.
- Torino.** *Società meteorologica Italiana.*
 Atti del congresso meteorologico Italiano, 4 (1898, Torino). 8:o.
- Toronto.** *University.*
 Studies. Physiol. Ser. No. 3. 1901. 8:o.
- Toulouse.** *Observatoire astronomique.*
 Annales. T. 4. 1901. 4:o.
- Washington.** *U. S. Weather Bureau.*
 Monthly weather review. 1901: 11. 4:o.
- *Smithsonian institution.*
 Smithsonian miscellaneous collections. Vol. 42—43. 1901. 8:o.
- *U. S. National museum.*
 Bulletin. N:o 50. 1901. 8:o.
 Proceedings. Vol. 22. 1900. 8:o.
- *Philosophical Society.*
 Bulletin. Vol. 14 (1899/02): pp. 167—178. 8:o.

Wien. *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.*

Verhandlungen. Bd. 52 (1902): H. 1. 8:o.

— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*

Jahrbuch. Bd 51 (1901): H. 2. 8:o.

Verhandlungen. 1901: No 17—18. 8:o.

Abhandlungen. Bd 17: H. 5. 1901. Fol.

Zi-ka-wei. *Observatory.*

FROC, L., The »De Witter« typhoon Aug. 1—6, 1901. Shanghai 1901. 4:o.

Zürich. *Schweizerische meteorologische Central-Anstalt.*

Meteorologische Beobachtungen. 1900: Sem. 2. 4:o.

Af Madame Veuve Godin, Guise.

Le Devoir. T. 26 (1902): 2. 8:o.

Af Herrar Wahlström & Widstrand.

Bilder ur Nordens flora. Efter Palmstruch m. fl. Svensk Botanik af C. A. M. LINDMAN. H. 5. 1902. 8:o.

Af utgifvarne:

Travaux du laboratoire de l'université de Liège de L. FREDERICQ. T. 6. 1901. 8:o.

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen, hrsg. von A. SEIDEL. Jahrg. 6: H. 1. 1902. 8:o.

Af författarne:

ANDERSSON, G., Zur Pflanzengeographie der Arktis. Lpz. 1902. 8:o.

HILDEBRANDSSON, H. H., & TEISSERENC DE BORT, L., Les bases de la météorologie dynamique. Livr. 5. Paris 1901. 8:o.

AGAMENNONE, G., Il microsismometrografo a tre componenti. Roma 1901. 8:o.

BASCHIN, O., Die deutsche Südpol-Expedition. Berlin 1901. 8:o.

BRÉDIKHINE, TH., Sur la comète 1901 I. St. Pétersb. 1901. 8:o.

DÉESY, K., A pály és dagály. Lőcse 1901. 8:o.

FRITSCHÉ, H., Über die Bestimmung der Coefficienten der Gaussischen allg. Theorie d. Erdmagnetismus f. das Jahr 1885. St. Pétersb. 1897. 8:o.

HENSGEN, C., Zur Dissociation d. Elektrolyte. Lpz. 1901. 8:o.

ROSENBUSCH, H., Studien im Gneissgebirge des Schwarzwaldes. 2. Heidelberg 1901. 8:o.

ROSSETTI, G., I grandi errori del mondo medico, ecclesiastico, astronomico... Libr. 2. Torino 1901. 8:o.

Utgifningsdag 9 april 1902.

Stockholm 1902. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 59.

1902.

N:o 4.

Onsdagen den 9 april.

INNEHÅLL.

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 109.
EULER, HANS, Ueber die Reaktion zwischen Aminen und salpetriger Säure	> 111.
Sekreterarens årsberättelse	> 125.
Skänker till Riksmuseum och Akademiens Bibliotek	sidd. 110, 124, 163.

Herr GILLJAM lämnade en redogörelse för den af professor SAM WIDE såsom Letterstedtsk stipendiat afgifna reseberättelsen.

Anmäldes, att de föreskrifna inspektionsberättelserna för de under Akademien lydande institutioner i vederbörlig ordning blifvit afgifna.

Till revisorer af Akademiens räkenskaper utsågos Herrar J. P. KLASON, O. MONTELIUS och J. G. W. ZANDER.

På tillstyrkan af kommitterade antogos till införande i Akademiens skrifter följande inlämnade afhandlingar:

i Bihanget till Handlingarne: 1:o) Teratologiska iakttagelser å gotländska exemplar af *Juglans regia* af stud. O. W. WENNERSTEN; 2:o) Om fågellifvet i och omkring sjön Tåkern af kollega V. A. ENGHOLM; 3:o) Om korrektionerna för refraktion vid uppmätning af stellarfotografiska plåtar af amanuensen A. NEANDER samt 4:o) Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre et du second degré af fil. kandidat AGNE WAHLGREN;

i Öfversigten: den i innehållsförteckningen upptagna afhandling.

Genom anställt val utsågs professorn och intendenten för riksmuseets afdelning för lägre evertetrater **HJALMAR THÉEL** till præsæs för det nya akademiska året, hvarefter afgående præsæs riksarkivarien **ODHNER** nedlade præsidiets med ett föredrag »om nyare forskningar rörande Anjalaförbundets».

Följande skänker anmälades:

Till Riksmuseets afdelning för arkegoniater.

Framl. presidenten **HANS FORSELL**'s mossherbarium, skänkt af enkefru **Z. FORSELL**.

Till Vetenskaps-Akademien's Bibliotek.

Stockholm. *Svenska sällskapet för antropologi och geografi.*

Ymer. Årg. 22 (1902): H. 1. 8:o.

— *Svenska turistföreningen.*

Cirkulär. N:o 21. 1902. 8:o.

Årsskrift. 1902. 8:o.

— *Sveriges geologiska undersökning.*

Ser. C. Afhandlingar och uppsatser. N:o 189. 1902. 8:o.

Upsala. *Universitets-Biblioteket.*

JOUBIN, L., La faculté des sciences de Rennes. 1900. 8:o.

Association géodésique internationale.

Comptes-rendus. Conf. 13 (Paris, 1900): Vol. 2. 4:o.

Adelaide. *Public library, museum, and art gallery.*

Report. 1900/1901. Fol.

Baltimore. *Johns Hopkins university.*

Circulars. Vol. 21 (1901/1902): N:o 156. 4:o.

Belfast. *Natural history and philosophical society.*

Report and proceedings. Sess. 1900/1901. 8:o.

Bergen. *Museum.*

Aarbog. 1901: H. 2. 8:o.

Aarsberetning. 1901. 8:o.

Berlin. *K. botanischer Garten und Museum.*

Notizblatt. N:o 28. 1902. 8:o.

— *Botanischer Verein der Provinz Brandenburg.*

Verhandlungen. Jahrg. 43 (1901). 8:o.

— *K. Preussisches meteorologisches Institut.*

Abhandlungen. Bd 2: No. 1. 1901. 4:o.

Ergebnisse d. meteorologischen Beobachtungen in Potsdam. Jahr 1899. 4:o.

Ergebnisse d. Niederschlags-Beobachtungen. 1897—1898. 4:o.

Deutsches meteorolog. Jahrbuch. 1901: H. 1. 4:o.

— *K. Sternwarte.*

Beobachtungs-Ergebnisse. H. 10. 1902. 4:o.

(Forts. i sid. 124.)

Über die Reaktion zwischen Aminen und salpetriger Säure.

VON HANS EULER.

Seit der Entdeckung der Diazoverbindungen durch P. GRIESS sind die Versuche nie aufgegeben worden, analoge Verbindungen auch aus aliphatischen Aminen darzustellen. Alle in dieser Hinsicht misslungenen Versuche haben dazu geführt, die Diazotirbarkeit als ein charakteristisches Merkmal der aromatischen Amine anzusehen.

Fette Diazoverbindungen sind später allerdings durch CURTIUS bekannt geworden; indessen kommt diesen Körpern eine von den aromatischen abweichende Konstitution zu. Aliphatische Körper von der Struktur des ursprünglichen »Diazobenzols«, also Diazoniumverbindungen nach der jetzigen Bezeichnungsweise, sind nicht bekannt.

Diese Thatsache kann auf zweierlei Umständen beruhen.

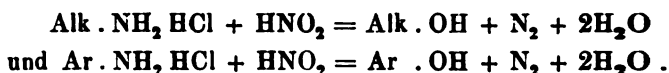
Entweder es können sich fette Diazoniumverbindungen bilden, die aber wegen der relativen Grösse der Zersetzungs- und Bildungsgeschwindigkeit instabil sind.

Oder aber die Einwirkung der salpetrigen Säure ist zufolge von konstitutiven Unterschieden zwischen aromatischen und fetten Aminen eine in beiden Fällen generell verschiedene.¹⁾

¹⁾ Nach den Darstellungen in den chemischen Lehr- und Handbüchern scheint die letztere Möglichkeit nicht in Erwägung gezogen worden zu sein. Es wird gewöhnlich angegeben, dass aus den aliphatischen Aminen durch salpetrige Säure Alkohole gebildet werden ohne dass ein Zwischenprodukt entsteht, während bei den aromatischen Aminen die Diazoverbindungen als Zwischenprodukte auftreten.

Die nächstliegende Frage in dieser Hinsicht ist offenbar die: Verläuft die Reaktion zwischen einem aromatischen Amin und salpetriger Säure nach derselben Reaktionsgleichung wie der entsprechende Vorgang bei einem fetten Amin.

Es handelt sich also zunächst um einen Vergleich des Verlaufs der beiden Vorgänge:



1. **Aromatische Amine und salpetrige Säure.** Wir betrachten als typische Substanz das Anilin. Bei etwa 30° lässt sich die Stickstoffentwicklung bequem verfolgen. Gemäss der obigen Reaktionsgleichung wäre der zeitliche Verlauf, wenn a die ursprüngliche Konzentration von Amin und salpetriger Säure und x die zur Zeit t umgesetzte Menge bedeutet durch die Formel für Reaktionen 2. Ordnung auszudrücken:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2.$$

Hierbei wird auf Zwischenprodukte keine Rücksicht genommen.

Berücksichtigt man hingegen die intermediäre Bildung von Diazoniumsalz, so ist ohne weiteres ersichtlich, dass die Geschwindigkeit mit welcher Stickstoff entwickelt wird von der Bildungsgeschwindigkeit und der Zersetzungsgeschwindigkeit des Diazoniumsalzes abhängt. Diese beiden Reaktionen sind aber einzeln messbar.

Die Menge Diazoniumsalz, welche im Zeitteil dt zersetzt wird, ist offenbar proportional mit der Menge Diazoniumsalz, welche zu Beginn dieses Zeitteils, also zur Zeit t , vorhanden war, vermehrt um die Menge Diazoniumsalz, welche im Zeitteil dt gebildet wird.

Diese letztere Menge ist aber proportional der noch vorhandenen Konzentration des Anilins und der salpetrigen Säure. Wird also die Geschwindigkeit der Gasentwicklung mit $\frac{dN_2}{dt}$ bezeichnet, so ist dieselbe zur Zeit t

$$\frac{dN_2}{dt} = K \{ [\text{Diaz.}]_t + K [\text{Anilin}]_t [\text{HNO}_2]_t \},$$

wenn mit $[\]_t$ die Konzentration der entsprechenden Substanzen zur Zeit t bezeichnet wird, und K die Geschwindigkeitskonstante der Zersetzung des Diazoniumsalzes bedeutet.

Ist die Geschwindigkeit, mit welcher das Diazoniumsalz gebildet wird, sehr gross im Verhältnis zur Zersetzungsgeschwindigkeit, so ist nach einem unbedeutenden Bruchteil der Zersetzungsgeschwindigkeit die gesammte Diazotierung vollständig verlaufen, die Konzentration des Anilins und der salpetrigen Säure ist dann $= 0$ und das zweite Glied in obiger Gleichung wird dann $= 0$. *Der zeitliche Verlauf der Stickstoffentwicklung aus Anilin und salpetriger Säure muss von da an ganz derselbe sein wie wenn man die entsprechenden Menge Diazoniumsalz durch Wasser zersetzt.*

Wir haben also zunächst die beiden Konstanten der Diazoniumsalzbildung und der Diazoniumsalzzersetzung zu betrachten.

Die Diazotierungsgeschwindigkeit ist für verschiedene Amine von HANTZSCH und SCHÜMANN ¹⁾ gemessen worden.

Die Diazotierungsgeschwindigkeit erwies sich so gross, dass z. B. in einer $\frac{1}{1000}$ normalen Lösung von p Bromanilinchlorhydrat und salpetriger Säure bei 20° bereits nach 15 Minuten 90 % der Komponenten umgesetzt waren.

Die Reaktion ist eine solche 2. Ordnung.

Die nach der Formel $K = \frac{x}{(a-x)a} \cdot \frac{1}{t}$ berechneten Kon-

stanten erwiesen sich für die 4 untersuchten Amine: Anilin, p Toluidin, m Xylidin, p Bromanilin ungefähr gleich gross, so dass HANTZSCH behauptet: Alle Anilinbasen werden annähernd gleich schnell diazotiert. Die Konstanten sind:

	Anilin.	p Toluidin.	m Xylidin.	p Bromanilin.
$K =$	36	38	41	45

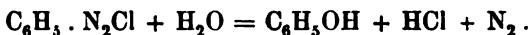
Bezüglich des Zersetzung der Diazoniumsalze in verdünnter wässriger Lösung hat HANTZSCH ¹⁾ festgestellt, dass dieser Prozess

¹⁾ Ber. d. d. chem. Ges. 32, 1691, 1899.

¹⁾ Ber. d. d. chem. Ges. 33, 2529, 1900.

eine Reaktion 1. Ordnung ist, ferner dass ein Überschuss von Säure die Geschwindigkeit nur unwesentlich beeinflusst. Ich habe für eine grössere Reihe von Salzen die Zersetzungsgeschwindigkeit, und zwar in etwas konzentrierteren Lösungen als HANTZSCH, welcher ca $1/40$ — $1/100$ norm. Lösungen anwendete, untersucht.

Die Messungen wurden teils so ausgeführt, dass mit Alkali die Säure titriert wurde, welche bei der Zersetzung gemäss der Gleichung entsteht:



Teils wurde die Stickstoffentwicklung verfolgt, indem das sich entwickelnde Gas aus dem vollkommen mit Flüssigkeit gefüllten Reaktionsgefäss mittels einer Kapillarröhre in ein Nitrometer übergeführt wurde.

Ich sehe hier von der Mitteilung der einzelnen Versuche ab und führe nur einen an, um zu zeigen, eine wie befriedigende Konstanz der K Werte erzielt werden kann, wenn nicht zu kleine Gasvolumina gemessen werden.

Der Versuch bezieht sich auf Diazoniumchlorid, welches nach den Vorschriften von KNOEVENAGEL¹⁾ und HANTZSCH²⁾ mit Amylnitrit und zwar bei Anwesenheit von Eisessig dargestellt und als rein weisses neutrales Präparat erhalten wurde.

Etwa 1,4 g dieses Salzes wurden in ein fast vollkommen mit destilliertem Wasser gefülltes Jenaerkölbchen von 100 cc Inhalt so schnell als möglich eingetragen, ohne dass letzteres aus dem Thermostaten entfernt wurde. Der mit Kapillarröhre versehene Kautschukstopfen wurde eingesetzt und das Nitrometer geöffnet. Die Reaktionszeit wurde, wie üblich, nicht von der Mischung, sondern von der ersten Ablesung an gerechnet.

In der folgenden Tabelle enthält die erste Tabelle die Zeit in Minuten, die zweite die Anzahl cm^3 Stickstoff, reduciert auf 15° , die dritte die daraus berechneten Werte $a - x$, die vierte die Konstanten.

¹⁾ Ber. d. d. chem. Ges. 23, 2995, 1890.

²⁾ Ber. d. d. chem. Ges. 34, 3337, 1901.

$$v = \text{ca } 10.$$

$$T = 25^\circ.$$

t	$x \text{ cm}^3$	$a - x$	K
0	7,69	226,74	0,00122
14	16,42	218,00	0,00122
40	31,11	203,32	0,00118
50	37,01	197,42	0,00120
113	68,08	166,35	0,00119
123	72,61	161,82	0,00119
188	98,19	136,24	0,00118
289	180,21	104,22	0,00120
∞	234,48		
			0,001195

Der Mittelwert der Konstante aus diesem und 4 anderen Versuchen beträgt für 25° : $K_{25} = 0,00122$.

Die gleiche Konstante¹⁾ beträgt für 20° und die gleiche Verdünnung (die Konstante ist übrigens, wie zu erwarten, von der Verdünnung nur wenig abhängig)

$$K_{20} = 0,00058$$

und für 30° :

$$K_{30} = 0,0025.$$

Der Temperaturkoeffizient, welcher sich hieraus berechnet, variiert, wie bald in einer ausführlicheren Abhandlung über die Zersetzung von Diazoniumsalzen gezeigt werden soll mit der Natur der Diazoniumsalze nur wenig.

Da nun also die eingangs gemachte Vermutung zutrifft, dass die Diazotierungsgeschwindigkeit im Vergleich zur Zersetzungsgeschwindigkeit sehr gross ist, so muss gemäss der oben angestellten Überlegung sich nahezu die gleiche Konstante ergeben, wenn (in etwa der gleichen Verdünnung) aequimolekulare Mengen von Anilinchlorhydrat und salpetriger Säure auf einander einwirken.

Es sei ein derartiger Versuch angeführt:

¹⁾ Die Zersetzung von Diazoniumsalzen wird durch die BREDIE'sche Platinflüssigkeit erheblich beschleunigt.

50 cc einer $\frac{1}{5}$ normalen Anilinchlorhydratlösung und 25 cc einer $\frac{4}{5}$ normalen Salzsäurelösung¹⁾ wurden in einem genau 100 cc fassenden Jenaerkölbchen im Thermostaten auf die Versuchtemperatur gebracht und hierauf mit 25 ccm einer $\frac{2}{5}$ norm. Natriumnitritlösung versetzt, worauf sofort das Kölbchen an das Nitrometer angeschlossen wurde.

Der Mittelwert der Konstante aus 3 Versuchen beträgt $K'_{30} = 0,0023$.

Die Konstante für die Zersetzung des Diazoniumsalzes bei der gleichen Temperatur beträgt $K_{30} = 0,0025$.

Wodurch dieser, allerdings nicht bedeutende Unterschied kommt kann ich noch nicht angeben; zu vermuten ist Bildung der Diazoamidoverbindung.

Immerhin kann diesen Resultaten zufolge gesagt werden:

Der Verlauf der Einwirkung von salpetriger Säure auf ein aromatisches Amin ist derjenige einer Reaktion erster Ordnung und die Geschwindigkeitskonstante ist (nahezu) gleich derjenigen der Zersetzung des entsprechenden Diazoniumsalzes.

Hierfür ein paar weitere Belege:

1) Für die Zersetzungsgeschwindigkeit von *o* Toluoldiazoniumchlorid wurde gefunden: $K_{25} = 0,0035$. Die Reaktion zwischen *o* Toluidinchlorhydrat und salpetriger Säure ergab: $K_{25} = 0,0030$, also einen sehr naheliegenden Wert.

2) Für die Zersetzungsgeschwindigkeit von Bromdiazoniumchlorid bei 40° wurde gefunden: $K_{40} = 0,000057$. Die Reaktion zwischen dem betreffenden Amin und der salpetrigen Säure ergab: $K_{40} = 0,000054$.

In vielen Fällen kann also die Zersetzungsgeschwindigkeit von Diazoniumsalzen einfach dadurch mit meist ausreichender Genauigkeit bestimmt werden, dass man die Geschwindigkeit misst, mit welcher die entsprechenden Aminchlorhydrate mit salpetriger Säure Stickstoff entwickeln.²⁾

¹⁾ Ein Überschuss von Salzsäure erwies sich als notwendig, um die Bildung einer Diazoamidoverbindung zu vermeiden.

²⁾ Bei sehr schwachen Basen wie den Nitranilinen oder Aminophenolen lässt sich jedoch diese Reaktion nicht, oder doch nur bei bedeutendem Überschuss an

2. **Aliphatische Amine und salpetrige Säure.** Das Ergebnis der diesbezüglichen Versuche, die in einem anderen Zusammenhang ausführlicher mitgeteilt werden sollen, lässt sich dahin zusammenfassen, dass

1) die Einwirkung von salpetriger Säure auf fette Amine (gesättigter Kohlenwasserstoffe) eine Reaktion 2. Ordnung ist;

2) die Geschwindigkeit dieses Vorganges von einer ganz anderen viel geringeren Grössenordnung ist als die der entsprechenden Reaktion bei den aromatischen Aminen.

Während zum Beispiel die Konstante des ebenfalls bimolekularen Diazotierungsprocesses (nach Extrapolation aus den Werten von HANTZSCH und SCHÜMANN [Ber. 32, 1691]) bei 30° etwa $1,4 \cdot 10^5$ betragen würde, ist diejenige für die Einwirkung von *salpetriger Säure auf Methylamin* etwa 10^7 mal kleiner, also

$$K_{30} = \text{ca } 0,01.$$

Dieser Wert ist aus denjenigen für 50° und 70° extrapoliert. (Es soll hervorgehoben werden, dass diesen Werten bei weitem nicht der gleiche Grad von Genauigkeit zukommt wie den für aromatische Amine mitgeteilten. Da sich ein Entweichen der salpetrigen Säure nicht vollkommen vermeiden lässt, so nimmt die Konstante mit der Dauer des Versuches ab, wofür korrigiert werden muss.)

Es ist nun zu untersuchen, in wiefern dieser wesentliche Unterschied zwischen aliphatischen und aromatischen Aminen in ihrer Konstitution begründet ist, und ob dieser Unterschied in ihren Formeln zum Ausdruck kommt.

Ein solcher Unterschied in der Konstitution der beiden Arten von Aminen besteht nun wirklich. Bei den (meisten) aromatischen

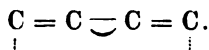
Säure studieren. — Als z. B. 50 cc $\frac{1}{10}$ norm. Lösung von m Nitranilin mit 50 ccm einer $\frac{1}{10}$ norm. Lösung von HNO_2 gemischt wurden, welche so viel Chlorwasserstoffsäure enthielt, dass die Mischung bez. überschüssiger Chlorwasserstoffsäure $\frac{1}{5}$ normal war, begann nach wenigen Sekunden die Abscheidung eines flockigen Niederschlages. Derselbe wurde in warmem Alkohol gelöst und schied sich aus diesem Lösungsmittel in der Kälte in Krystallen aus. Das nochmals umkrystallisierte Produkt wurde durch seinen Schmelzpunkt 196°—197° als Dinitrodiazoamidobenzol charakterisiert.

Aminen ist die Aminogruppe an ein doppelt gebundenes Kohlenstoffatom gebunden ($=\text{CH}-\text{NH}_2$), was bei den bis jetzt bekannten fetten Aminen nicht der Fall ist.

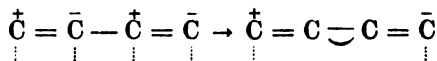
Bekanntlich hat THIELE¹⁾ vor einiger Zeit Ansichten über die doppelte Bindung geäußert, durch welche sich eine grosse Reihe von Erscheinungen einheitlich zusammenfassen lässt.

Nach THIELE werden bei den Körpern, welchen eine Doppelbindung zugeschrieben wird thatsächlich zwei Affinitäten von jedem der beteiligten Atome zur Bindung derselben verwendet, die Affinitätskraft ist aber dadurch nicht völlig verbraucht und an jedem der Atome ist noch ein Affinitätsrest oder eine Partialvalenz vorhanden.

Das System benachbarter Doppelbindungen $\text{C}=\text{C}-\text{C}=\text{C}$ addirt nun Wasserstoff an den Enden, indem $\text{CH}-\text{C}=\text{C}=\text{CH}$ entsteht. Es hat also die Additionsfähigkeit der mittleren Kohlenstoffatome aufgehört. — Da die mittleren Kohlenstoffatome nicht addiren, haben sie keine Partialvalenzen mehr, die Partialvalenzen müssen sich also ausgeglichen haben, was THIELE durch das Schema ausdrückt:

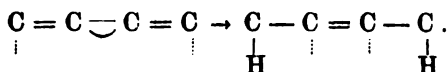



Es ist eine neue Doppelbindung entstanden, die keine Partialvalenzen trägt und daher als inaktive Doppelbindung bezeichnet wird. Einen solchen Ausgleich kann man sich nach THIELE so vorstellen, dass die Atome einer Doppelbindung entgegengesetzt positiv und negativ geladen seien, $\overset{+}{\text{C}} = \bar{\text{C}}$. Bei benachbarten Doppelbildungen würden sich dann die inneren Ladungen ausgleichen:



Wenn an den Enden des Systems Additionen eintreten, so werden an den mittleren Kohlenstoffatomen Affinitätsbeträge frei, wodurch die inaktive Doppelbindung Partialvalenzen erhält und in eine gewöhnliche aktive übergeht:

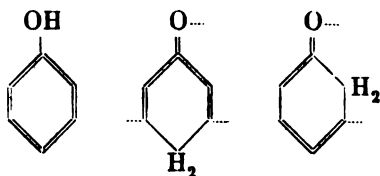
¹⁾ Lieb. Ann. 306, 87, 1899.



Aus diesen Voraussetzungen leitet THIELE die Bindungsverhältnisse im Benzolkern ab, bezüglichlichen welcher auf die citirte Arbeit verwiesen sei. Wie leicht ersichtlich ist das Benzol gemäss der Formel  eine gesättigte Verbindung.

Hingegen muss etwas näher auf das Phenol eingegangen werden.

Nach THIELE ist die Hydroxylform die beständigste von den drei möglichen Formen



weil sie ebenso gesättigt ist wie das Benzol selbst, im Gegensatz zu den beiden anderen, welche noch Partialvalenzen enthalten. »Wenn die Hydroxylform des Phenols durch Aethylierung oder Acetylierung festgelegt ist, so schwinden auch die charakteristischen Eigenschaften, Leichtsubstituierbarkeit und Leichtoxydierbarkeit des Benzolkerns. Daraus muss man schliessen, dass im *freien* Phenol resp. den Salzen bei den Schwingungen innerhalb des Moleküls vorübergehend auch die Ketoformen auftreten, dann gerade sie lassen die vom Benzol so abweichenden Phenolreaktionen als möglich erscheinen. Die Leichtsubstituierbarkeit wäre dabei auf eine Anflockerung zurückzuführen.»

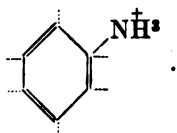
Hier scheint mir nun eine Lücke in der Theorie zu sein. Gerade die charakteristischen Eigenschaften folgen nicht aus den Voraussetzungen und um dieselben zu erklären müssen Schwingungen im Molekül zu Hülfe genommen werden, welche doch sehr wenig definiert und quantitativen Versuchen gar nicht erreichbar sind. Indessen können diese Schwierigkeiten leicht umgangen werden.

Im Benzol, welches absolut symmetrisch gebaut ist, haben wir keine freien Partialvalenzen, weder positive noch negative, da dieselben sich gegenseitig gerade neutralisieren. Dissociirt sich nun das Phenol elektrolytisch, so nimmt das Sauerstoffatom eine freie negative Ladung auf. Dass dadurch das elektrische Gleichgewicht der Partialvalenzen gestört wird ist ein Schluss, welcher sich auf die durch OSTWALD bekannt gewordenen Dissociationsverhältnisse bei substituirten Säuren stützt.

Die positiven und negativen Partialvalenzen, welche sich im neutralen Molekül gerade neutralisierten, werden im Phenol-Ion sich nicht mehr ausgleichen können, wodurch freie Partialvalenzen entstehen. Mit dieser Konsequenz stehen alle Thatsachen in bestem Einklang. In Übereinstimmung mit THIELE, welcher annimmt, dass nur ein kleiner Bruchteil aller Phenolmoleküle die charakteristische Leichtoxydierbarkeit und Leichtsubstituierbarkeit zeigt, folgt aus obigem dass nur der sehr kleine und jetzt quantitativ bestimmbare dissocierte Anteil des Phenols leicht zu addiren vermag. Durch Aethylierung und Acetylierung wird die elektrolytische Dissociation aufgehoben — die Reaktionsfähigkeit des Benzolkerns verschwindet. Das sehr bedeutend stärker dissocierte Phenolat zeigt eine ausserordentlich erhöhte Reaktionsfähigkeit.

Ganz analog liegen die Verhältnisse beim Anilin. Auch bei diesem Körper ist, durch den Eintritt der Amino-Gruppe, die Reaktionsfähigkeit des Benzolkerns bedeutend vergrössert worden; es braucht nur an die bekannten Thatsachen erinnert zu werden, wie viel leichter der Benzolkern im Anilin von Halogenen substituiert wird, wie viel leichter NO_2 -gruppen eintreten u. s. w. Auch finden sich dieselben Verhältnisse bei den Partialvalenzen des Anilins wie bei denen des Phenols: Wird die Dissociationsfähigkeit der Aminogruppe aufgehoben, so wird die Reaktionsfähigkeit vermindert — man »schützt« das Anilin, indem man es in die Acetyl- oder Oxalylverbindung überführt. Bei den Salzen finden wir wiederum die grösste Additions- und Substitutionsfähigkeit des Benzolkernes. Dies kann durch das Schema zum

Ausdruck gebracht werden:

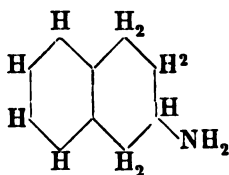


Diese Fähigkeit des Anilins und aromatischer Amine überhaupt andere Moleküle, besonders salpetrige Säure zu addiren, eine Fähigkeit, welche den fetten Aminen fehlt, erweist sich als die nächstliegende Ursache der wesentlichen Verschiedenheit im Verhalten der beiden Körperklassen.

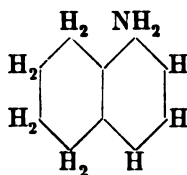
Die Richtigkeit dieser Behauptung kann auf zweierlei Weise geprüft werden.

1) Werden die Partialvalenzen in dem Kern, an welchem die Amingruppe sitzt, gesättigt, so muss die Diazotirungsfähigkeit aufgehoben sein.

Das von BAEYER ¹⁾ dargestellte Amino-hexahydrobenzol $C_6H_5 \cdot NH_2 \cdot H_6$ ist in dieser Hinsicht noch nicht untersucht. Hingegen bildet das Verhalten der Tetrahydronaphtylamine eine vorzügliche Bestätigung. Während nämlich das Tetrahydro- α -naphtylamin wie das Naphtylamin selbst diazotiert werden kann, wird nach den Untersuchungen von BAMBERGER ²⁾ das Tetrahydro- β -naphtylamin bei welchem der die Amingruppe tragende Kern hydriert ist, von salpetriger Säure nicht diazotiert sondern in ein beständiges Nitrit verwandelt.



Tetrahydro- β -naphtylamin.



Tetrahydro- α -naphtylamin.

2) Die andere Konsequenz ist die, dass auch solche *fette* Amine die gleiche Reaktionsfähigkeit gegenüber salpetriger Säure

¹⁾ Sieb. Ann. 278, 103.

²⁾ Ber. d. deutsch. chem. Ges. 21, 847, 1112.

zeigen sollen, bei welchen, wie bei den aromatischen die Amingruppe an einem doppelt gebundenen Kohlenstoffatom sitzt. Der einfachste derartige Körper ist das Vinylamin, $\text{CH}_2 = \text{CHNH}_2$.

Eine wässrige Lösung dieser Base wurde nach den Vorschriften von GABRIEL¹⁾ dargestellt.

Phtalimidkalium wurde mit Aethylenbromid bei 160° digerirt. Aus dem Reaktionsprodukt wurde mit Alkohol rohes β -Bromäthylphtalimid extrahiert und im Einschlussrohr bei 180° durch Bromwasserstoffsäure gespalten. Das gebildete Bromäthylaminbromhydrat wurde mit Wasser ausgezogen und zur Trockene eingedampft, und in Alkohol wieder gelöst um unorganische Salze zu entfernen. Die alkoholische Lösung wurde wieder eingedampft und das Produkt mit der berechneten Menge Kali bei 48° eine Viertelstunde digerirt. Diese Lösung wurde mit Kali übersättigt und destilliert. Das Destillat ergab den von GABRIEL erwähnten Niederschlag mit Jodwismuthkaliumlösung. Hingegen wurde eine Fällung mit einer 1 procentigen Lösung von Pikrinsäure nicht erhalten was nach GABRIEL die Abwesenheit fremder Amine versichert.

Das Destillat wurde mit titrierter Salzsäure genau neutralisiert. Die Lösung wurde auf $\frac{1}{5}$ Normalität verdünnt und 50 cc davon mit 50 cc $\frac{1}{5}$ HNO_2 in einem 100 cc fassenden Kölbchen vermischt. *Bei 30° trat im Thermostaten sofort eine lebhafte Stickstoffentwicklung ein.*

Die Ordnung der Reaktion war infolge eines Gasverlustes während der Reaktion noch nicht festzustellen, soll aber demnächst näher untersucht werden. *Sichergestellt ist, dass Vinylamin gegenüber salpetriger Säure bedeutend reaktionsfähiger ist als die gesättigten fetten Amine: Methylamin, Aethylamin, Benzylamin, Dimethylkarbamid und Harnstoff.*

Die Besprechung der Konsequenzen der mitgetheilten Hypothese bezüglich der Konstitution der Diazonium- und Diazoverbindungen möchte ich mir vorbehalten bis zur Mitteilung meiner Versuche über die Zersetzungsgeschwindigkeit dieser Körper.

¹⁾ Ber. d. d. chem. Ges. 21 A und B.

Folgende Konstanten der Zersetzungsgeschwindigkeiten möchte ich schon jetzt mitteilen, da sie einen Punkt berühren, welcher in der neuesten Litteratur wieder besprochen worden ist.

Temp.	S a l z.	K
25°	Diazoniumchlorid	0,00122
	Diazoniumnitrat ¹⁾	0,00115
	Diazoniumbromid	0,00105
50°	p-Bromdiazoniumchlorid . .	0,00028
	p-Bromdiazoniumbromid . .	0,00020

Aus diesen Zahlen scheint hervorzugehen, dass die Zersetzungsgeschwindigkeit der Diazoniumsalze von der Natur des Anions nahezu unabhängig ist.²⁾ Dies würde dafür sprechen, dass es das betreffende *Diazoniumion* ist, welches die Spaltung erleidet. Die Frage, welcher Diazoverbindung die Reaktion der Stickstoffabspaltung zukommt, dürfte noch unentschieden sein; in welcher Weise die Natur des Diazoniumradikals die betreffende Reaktionsgeschwindigkeit, also die Stabilität der Verbindung beeinflusst soll bald ausführlicher behandelt werden. Meine diesbezüglichen Resultate lassen sich dahin zusammenfassen, dass *Substitution in der o-Stellung die Stabilität der Diazoniumsalze erheblich vermindert, in der p-Stellung sehr stark erhöht*, während Substitution in der m-Stellung nur von geringerem Einfluss ist.

Stockholms Högskola, April 1902.

¹⁾ In $\frac{1}{2}$ norm. HNO_3 gelöst.

²⁾ Die Abweichungen der Konstanten der 4 Diazoniumsalze von einander sind zwar grösser als die Versuchsfehler bei ein und derselben Versuchsreihe; indessen können zwischen verschiedenen Versuchsreihen bei einem Salz derartige Abweichungen vorkommen.

Skänker till Vetenskaps-Akademins bibliotek.

(Forts. från sid. 110.)

- Boston.** *American academy of arts and sciences.*
 Proceedings. Vol. 37 (1901/1902): N:o 6—8. 8:o.
- Bruxelles.** *Musée du Congo.*
 Annales. Zoologie. Sér. 1. T. 2: Fasc. 2. 1902. Fol.
 — *Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie.*
 Bulletin. T. 16 (1902): Fasc. 1. 8:o.
- Budapest.** *Statistisches Bureau der Haupt- u. Residenzstadt Budapest.*
 Publicationen. 29: 2. 1901. 8:o.
- Buenos Aires.** *Observatorio Mons. Lasagna del Colegio Pio IX de artes y oficios.*
 Boletín meteorológico. Año 2 (1899/1900): N:o 5—6. 8:o.
- Cambridge, Mass.** *Museum of comparative zoology.*
 Memoirs. Vol. 26: No. 1—3. 1902. 4:o.
- Chambésy.** *Herbier Boissier.*
 Bulletin. (2) T. 2 (1902): N:o 4. 8:o.
- Chicago.** *Newberry Library.*
 Report of the trustees. Year 1901. 8:o.
- Cincinnati.** *Lloyd library.*
 Bulletin. N:o 3. 1902. 8:o.
 Mycological notes. N:o 5—8. 1900—1901. 8:o.
- Columbus.** *Ohio state university.*
 Annual report. 31 (1900 1901): P. 1—2. 8:o.
- Coimbra.** *Sociedade Broteriana.*
 Boletim. 18 (1901): Fasc. 1—2. 8:o.
- Dublin.** *Royal Dublin Society.*
 Economic proceedings. Vol. 1 (1899): P. 2. 8:o.
 Scientific proceedings. N. S. Vol. 9 (1900/1901): P. 2—4. 8:o.
 Scientific transactions. (2) Vol. 7 (1900/1901): 8—13. 4:o.
- Genova.** *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*
 Atti. Vol. 12 (1901): N. 3. 8:o.
- Halle a. S.** *K. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.*
 Nova Acta. T. 79. 1901. 4:o.
- Karlsruhe.** *Centralbureau f. Meteorologie u. Hydrographie im Grossherzogthum Baden.*
 Niederschlagsbeobachtungen. Jahrg. 1901: 1—2. 4:o.
- Kazan.** *Observatoire météorologique de l'univ.*
 Bulletin. 1900: 1—12. Fol.
- Kew.** *Royal botanic gardens.*
 Bulletin of miscellaneous information. 1902: Append. 3. 8:o.
- Kjöbenhavn.** *Dansk geologisk Forening.*
 Meddelelser. Nr. 6—8. 1900—1901. 8:o.
 — *K. danske Videnskabernes Selskab.*
 Oversigt over Forhandlinger. 1902: No. 1. 8:o.

*Sekreterarens Årsberättelse för 1901—1902, afgifven
på högtidsdagen den 31 Mars 1902.*

Äfven under det nu gångna året har intresset för naturvetenskaplig forskning i vårt land i främsta rummet fått sig ett uttryck genom de många svenska forskningsfärder, som både med offentligt och enskildt understöd företagits till olika delar af jorden.

Främst bland dessa bör nämnas den gemensamt med Ryssland företagna gradmätningen å Spetsbergen. Under frih. GERHARD DE GEER's ledning har det sommaren 1901 lyckats svenskarne att trots ogynsamma isförhållanden utföra det väsentligaste af de planlagda mätningarne, så att numera endast de nordligaste punkterna i triangelnätet återstå. Ryska expeditionen har deremot gynnad af goda isförhållanden redan fullständigt kunnat avsluta sina undersökningar.

Den af Akademiens kommitterade utsedde Regnellske botaniske stipendiaten Dr G. O. MALME har i september 1901 anträdt sin resa till södra Amerika för att derstädes under två år göra vidtomfattande botaniska studier och insamlingar så väl i de Argentinska Andernas högfjäll som i det inre af södra Brasilien, hufvudsakligen inom provinsen Matto grosso. De från honom ingångna underrättelserna hafva hittills varit gynsamma utom i det hänseende, att han på grund af det spända förhållandet mellan Argentina och Chili tillsvidare nödgats uppskjuta sin resa till gränstrakterna mellan dessa båda länder.

Äfven en annan svensk expedition, den af kand. **ERLAND NORDENSKIÖLD** ledda zoologiskt-botaniska och arkeologiska expeditionen, som till någon del erhållit sin utrustning från det naturhistoriska riksmuseet, vistas samtidigt i denna del af södra Amerika.

Till Amerikas sydspets och det derutanför liggande polarhafvet har en annan med enskilda medel understödd expedition afgått under ledning af docenten **OTTO NORDENSKIÖLD**. Äfven till dennas utrustning har Akademien i sin mån bidragit genom utlåning af några för de vetenskapliga undersökningarne behöfliga instrument.

En fjerde expedition, bestående af docenten **L. JÄGERSKIÖLD** såsom chef samt kandidaterna **TH. ODHNER** och **I. TRÄGÅRDH**, har för zoologiska studier besökt nedre delen af Hvita Nilen och derifrån hemfört rika skördar, som till största delen såsom gåfva blifvit öfverlemnade till det naturhistoriska riksmuseets afdelning för lägre evertebrater.

Till sist bör ock erinras om de lysande geografiska upptäckter, som vår landsman **SVEN HEDIN** lyckats göra under sin senaste resa i Central-Asiens öknar och i Tibets svårtillgängliga högfjäll.

Det år, som förflutit sedan Vetenskaps-Akademien förra gången firade sin högtidsdag, har i flere hänseenden varit ett för henne betydelsefullt år.

Sedan Akademien ej utan stor tvekan åtagit sig det ansvarsfulla uppdrag, som Dr **ALFRED NOBEL** genom sitt storslagna testamente velat tilldela henne, samt bestämmelser för Nobelstiftelsen och Akademien såsom utdelare af Nobelpris blifvit af Kungl. Maj:t fastställda, har Akademien vid sitt sammanträde den 12 november 1901 för första gången fattat beslut om utdelande af Nobelpris och dervid till pristagare i fysik utsett professorn vid universitetet i München **KONRAD VILHELM RÖNTGEN** samt till pristagare i kemi professorn vid universitetet

i Berlin JAKOB HENRIK VAN T'HOFF. Ehuru Akademien denna gång haft glädjen finna, att hennes val vunnit ett nästan odeladt erkännande, bör dock vid detta tillfälle särskildt framhållas, att alla till buds stående medel blifvit vidtagna för att försäkra Akademien om goda förslag från fullt kompetenta fackmän i alla kulturländer och för att de inkomna förslagen må underkastas en så allsidig och uttömmande granskning som möjligt. Ännu bättre bör Akademiens ställning i det senare hänseendet blifva, när det Nobelinstitut, som hon enligt Nobelstiftelsens grundstadgar eger att upprätta, hunnit blifva färdigt.

Äfven i ett annat hänseende har det varit af vikt att väl ordna Akademiens förhållande till Nobelstiftelsen. Akademien har varit skyldig tillse, att hennes vida anspråkslösare, men dock, såsom hon vågar tro, viktigare, ursprungliga verksamhet i den svenska forskningens och odlingens tjänst ej på något sätt komme att lida inträng genom den nya uppgift, hon erhållit. Detta har hon sökt vinna genom att fullständigt skilja sin verksamhet såsom utdelare af Nobelpris från sin hufvuduppgift. Nobelärendena behandlas derföre på särskilda sammanträden och de dervid förda protokollen sammanföras ej med protokollen för Akademiens öfriga sammankomster.

Under det förflutna året hafva betydande förändringar skett bland Akademiens och Riksmuseets tjänstemän.

Akademiens förre sekreterare professor DANIEL GEORG LINDHAGEN har efter uppnådda 82 år nedlagt det embete, som han under 35 år med outtröttlig flit och sällsamt intresse förvaltadt; intendenten för riksmuseets palæontologiska afdelning, den mångsidigt lärde zoologen professor GUSTAF LINDSTRÖM samt intendenten för den mineralogiska afdelningen, vårt lands mest frejdade polarforskare, friherre ADOLF ERIK NORDENSKIÖLD hafva båda helt oväntadt och midt under rastlöst arbete i vetenskapens tjänst slutat sina dagar.

Till professor LINDSTRÖMS efterträdare såsom intendent för den palæontologiska afdelningen har Akademien kallat geologen vid Sveriges geologiska undersökning doktor EDVARD JOHAN GER-

HARD HOLM samt till professor NORDENSKIÖLD'S efterträdare såsom intendent för den mineralogiska afdelningen f. d. professorn vid universitetet i Upsala HJALMAR SJÖGREN. Dessutom har assistenten vid statens entomologiska anstalt doktor BROR YNGVE SJÖSTEDT kallats till intendent för riksmuseets entomologiska afdelning, sedan denna plats blifvit ledig derigenom, att Akademien kallat dess förre innehafvare till sin sekreterare.

Akademien har i öfrigt på vanligt sätt kunnat fullfölja sin verksamhet och äfven under det gångna året haft att glädja sig åt erkännande och uppmuntran så väl af statsmakterna som af enskilda.

Statsanslag.

Förutom de extra anslag, som Riksdagen på Kungl. Maj:ts framställning nu liksom under flere föregående år beviljat Riksmuseum och den Meteorologiska Centralanstalten samt tidskriften »Acta Mathematica», hafva af 1901 års riksdag anslagits:

dels 2,000 kronor för inlösen under 1902 af fullständiga exemplar och enstaka delar af den internationella katalog öfver naturvetenskaplig litteratur, som från och med det nya århundradets början genom Royal Society i London kommer att utgifvas;

dels 2,000 kronor för upprätthållande under samma tid af den regionalbyrå, som genom Akademiens försorg skall anordnas för att ombesörja Sveriges andel i nyssnämnda katalogsarbete;

dels 4,000 kronor för inlösen af fyra etnografiska samlingar för riksmuseets etnografiska afdelning;

dels 2,500 kronor till inköp åt riksmuseets entomologiska afdelning af framl. professor T. THORELL's stora samling af spindeldjur.

Donationer till Akademien.

Af enskilda personer har Akademien haft glädjen mottaga följande gåfvor:

af framl. läroverksadjunkten Dr K. O. E. STENSTRÖM en testamentarisk disposition af ännu ej känt belopp med bestämmelse, att räntan skall användas till stipendier för vetenskapliga botaniska undersökningar särskildt i hieraciologi och växtbiologi;

af enkefru professorskan EMILIA RETZIUS, f. WAHLBERG, 3,000 kronor, hvilka under namn af JOHAN AUGUST WAHLBERGS minnesmedaljfond skola af Akademien förvaltas så, att räntan minst hvar femte år på Akademiens högtidsdag i form af en guldmedalj öfver den berömda afrikaresanden och naturforskaren J. A. WAHLBERG utdelas åt personer, i främsta rummet svenskar, som på ett utmärkt sätt främjat de naturhistoriska vetenskaperna;

af lärjungar och vänner till professor G. LINDSTRÖM 1,500 kronor för att under namn af GUSTAF LINDSTRÖMS minnesfond utgöra ett kapital, hvars ränta skall utgå såsom ett mindre resestipendium, afsedt att för yngre forskare underlätta resor inom landet i syfte att studera de lägre evertebrerade djuren, fossila eller lefvande;

af framl. professor N. P. HAMBERG 10,000 kronor, som skola läggas till den af Akademien förvaltade Scheelefonden. Denna fond bildades 1892 af det öfverskott, stort 3,000 kronor, som uppstod af de för Scheele-stodens uppförande insamlade medel. Räntan utdelas vexelvis af Akademien och af Farmaceutiska institutets styrelse såsom understöd för någon maktpåliggande undersökning i experimental kemi eller i farmaceutisk kemi.

Dessutom må erinras derom att godsegaren och kommandören H. RÖHSS till Akademiens förfogande ställt en summa af 3,000 kronor, för att framl. doktor CARL JOHAN EMIL HAGLUNDS berömda hemiptersamling skulle kunna inköpas för Riksmuseets räkning, samt att professor HJALMAR SJÖGREN genom gåfvobref af den 1 januari 1902 till Riksmuseets mineralogiska afdelning öfverlämnat sin stora mineralsamling, uppskattad till ett värde af betydligt mer än 100,000 kronor.

Minnesfest.

Den 24 november 1901 firade Akademien i sin hörsal en enkel minnesfest med anledning deraf, att då 300 år förflutit sedan den frejdade astronomen TYCHO BRAHES död. Minnetalet hölls af Akademiens ledamot professor N. C. DUNÉR, och såväl före som efter talet afsjüngos verser författade af doktor C. D. AF WIRSÉN med musik, komponerad af direktör E. AKERBERG. Till festen hade Akademiens fysiker professor HASSELBERG med Akademiens begifvande utgifvit en facsimile-upplaga i 200 ex. af TYCHO BRAHES berömda och numera ytterst sällsynta arbete: »Astronomiæ instauratæ mechanica» efter ett i Akademiens bibliotek förvaradt originalexemplar.

Afgifna utlåstanden.

På grund af Kungl. Maj:ts nådiga befallning har Akademien under året afgifvit underdåniga utlåstanden i sex allmänna ärenden, som kräft en vetenskaplig utredning, nämligen:

öfver en hemställan från Kejserliga Tyska regeringen om meteorologiska och jordmagnetiska observationers anställande vid de meteorologiska observatorierna i Stockholm och Upsala samtidigt med de motsvarande observationer, som komma att anställas af den under åren 1901 och 1902 pågående tyska sydpolarexpeditionen;

öfver en underdånig ansökan af doktor A. HAMBERG om ett anslag af 10,000 kronor för fortsatta undersökningar i Luleå Lappmarks fjällområde;

öfver en underdånig ansökan af professor G. MITTAG-LEFFLER om ett anslag af 3,000 kronor för utgifvande under år 1903 af tidskriften: »Acta Mathematica»;

öfver en af riksdagen begärd utredning, huruvida ett af framl. doktor A. M. LINDBLAD författadt arbete öfver våra ätliga svampar vore fullt ändamålsenligt såsom folkbok, samt öfver en underdånig ansökan af fil. kandidat L. ROMELL om inlösen för statens räkning af ett visst antal exemplar af nämnda arbete;

öfver en underdånig ansökan af kommittén för gradmätning å Spetsbergen om ett ytterligare statsanslag af 13,000 kronor för afslutandet af gradmätningsarbetena å Spetsbergen samt af 49,000 kronor för dessa arbetens offentliggörande;

öfver en underdånig ansökan af docenten R. SERNANDER om inlösen för statsmedel af 100 ex. af hans arbete: »Den skandinaviska vegetationens spridningsbiologi».

Reseberättelser.

För resor, som utförts med understöd från Akademien, hafva i vederbörlig ordning berättelser blifvit afgifna:

af docenten vid Upsala universitet H. O. JUEL, hvilken såsom Letterstedtsk stipendiat för botaniska studier vistats i Tyskland och Österrike april—september 1899 samt i Tyskland, Frankrike, Algier, Tunis och Italien från september 1900 till mars 1901;

af doktor A. G. KELLGREN, som i Torneå Lappmark studerat granens utbredning, särskildt med afseende på WAHLENBERGS »regio subsylvatica»;

af fil. licentiaten J. ARWIDSSON, som i Bohuslän idkat studier öfver maskgruppen Maldanidæ;

af fil. kandidat C. SKOTTSBERG, som i Stockholms skärgård studerat insekternas betydelse för växternas pollinering;

af fil. kandidat K. A. ANDERSSON, som vid Kristinebergs zoologiska station varit sysselsatt med studier öfver Bryozoa;

af fil. kandidat N. HOLMGREN, som gjort anatomiska och biologiska studier öfver insekterna i Stockholms skärgård;

af docenten vid Upsala universitet R. SERNÄNDER, som idkat biologiska studier öfver vegetationen i Uplands yttersta skärgård;

af fil. licentiaten H. HESSELMAN, som varit sysselsatt med biologiskt-fysiologiska forskningar i Stockholms norra skärgård;

af fil. kandidat EINAR WAHLGREN, som i Skåne studerat de apterygota insekternas förekomst och utbredning;

af professorn vid Upsala universitet SAM WIDE, hvilken såsom Letterstedtsk stipendiat företagit arkeologiska studier och gräfningar i Grekland och på Kreta.

Akademiens skrifter.

Af Akademiens skrifter hafva under året banden 33 och 34 af *Handlingarne*, bandet 26 af »Bihaget till Akademiens Handlingar», årgången 58 af »Öfversigten af Akademiens förhandlingar» samt 38:e bandet af »Meteorologiska iakttagelser i Sverige» fullständigt utkommit. Dessa band innehålla 108 olika afhandlingar, som tillsammans omfatta 1,263 sidor med 109

taflor i 4:o samt 2,474 sidor och 64 taflor i 8:o. Fördelar man afhandlingarne på de olika vetenskaperna visar det sig, att 24 behandla matematiska och astronomiska ämnen, 16 fysik och meteorologi, 18 kemi och mineralogi, 29 botanik samt 21 zoologi.

Dessutom har Akademien på sin bekostnad låtit utgifva »Själfbiografiska anteckningar af JÖNS JAKOB BERZELIUS». Dessa anteckningar hafva ej allenast stor betydelse för kemiens historia i vårt land utan innehålla äfven synnerligt viktiga och intressanta bidrag till Akademiens egen och (det Naturhistoriska Riksmuseets historia. Arbetet har på ett i allo förtjenstfullt sätt redigerats af Akademiens ledamot professor H. G. SÖDERBAUM, som efter professor NILSONS oväntade frånfälle åtog sig detta mödosamma uppdrag.

Af »Lefnadsteckningar öfver Akademiens ledamöter» har fjärde bandets andra häfte lämnat pressen.

På uppdrag af Akademien har professor SEVERIN JOLIN utarbetat en beskrifning öfver den minnesfest öfver BERZELIUS, som hölls härstädes den 7 oktober 1898. Deruti ingår äfven en redogörelse för Akademiens Berzelius-museum. Akademien står i förbindelse till firman P. A. NORSTEDT & SÖNER för utgifningen af detta arbete.

Akademiens institutioner.

På *Observatorium* har verksamheten under året företrädesvis varit egnad dels åt de fortlöpande observationerna med meridiancirkeln och dithörande reduktionsarbeten, dels åt astrofotografiska och fotometriska undersökningar, hvilka förnämligast afsett den nya stjerna, som i februari månad 1901 upptäcktes i stjernbilden Perseus. Så hafva ett antal fotogram af denna stjerna erhållits, hvilka förete de märkliga töckenbildningar, som uppstått i omgifningen af den samma och i vissa delar befinna sig i rörelse med hastigheter, som vida öfverträffa allt hvad man förut haft sig bekant beträffande de stellära objekten. — Fotometriska observationer af denna nya stjerna hafva erhållits till

ett antal af 141 och äro de samma enligt hvad som från det Astrofysikaliska Observatoriet i Potsdam blifvit delgifvet i remarkabel öfverensstämmelse med de derstädes utförda observationerna af liknande art. — Pendelobservationer hafva i sammanhang med Gradmätningsexpeditionen i det härför anordnade källarhvalfvet blifvit utförda. — I Observatoriets instrumentförråd har under året ingen tillökning skett. Men med afseende härpå skall med tacksamhet erinras om den donation, som af Bryggaren A. BJURHOLM och f. d. Presidenten H. LOVÉN till Observatorium öfverlemnats i och för anskaffande af ett astrofografiskt objektiv af nyare konstruktion. — Under förliden sommar har Observatoriet undergått en fullständig och välbehöflig reparation till dess yttre, hvarigenom det nu framstår i ett värdigt och tillfredsställande skick. — Beträffande den från Observatorium utgående publikationen må nämnas, att med hänsyn till vidlyftiga ännu oafslutade förarbeten med offentliggörandet af meridianobservationerna ännu fått anstå. Ett större teoretiskt arbete, som under året i manuskript afslutats, är deremot för närvarande under tryckning. — Såsom biträdande astronom har under året Docenten, Filos. D:r K. G. OLSSON fortfarande varit anställd och Filos. Kandidaten E. A. NEANDER har innehaft befattning såsom Assistent vid de astrofografiska arbetena. Såsom räknebiträden tjenstgjorde kortare tider studerandena G. STOLTZ och P. A. BUCHT. — Regelbundna tids signaler hafva i likhet med föregående år på elektrisk väg afsändts dels till Kongl. Flottans station i Karlskrona, dels till härvarande Centraltelegrafstation. — Almanackor och kalendrier hafva i behörig tid hållits allmänheten tillhanda.

Vid den *fysiska institutionen* hafva de spektroskopiska undersökningarna af metaller tillhörande jerngruppen under året fortgått enligt samma plan som förut. Undersökningen af *Molybdens* elektriska bågsppektrum har sålunda fullständigt afslutats och föreligger nu färdig till publikation. Derjemte ha dylika undersökningar för *Wolfram* påbörjats och redan fortskridit så

långt, att för hela spektret alla mikrometermätningar af de fotografiska clichéerna afslutats och delvis reducerats. Under instundande sommar torde detta arbete i hufvudsak hinna afslutas, ehuru den vid så linierika spektra som dessa synnerligen svåra elimineringen af föroreningar medför betydlig tidsförbrukning.

Under förra sommaren har liksom föregående år lektor FORSLING från Nyköping varit sysselsatt med spektroskopiska arbeten å institutionen. Med understöd dels af dennas medel dels af sådana från riksmuseets mineralogiska institution har lektor FORSLING dervid utfört spektroskopisk analys af en del gadonilitjordar, hvilka för detta ändamål af framlidne Frih. NORDENSKIÖLD ställts till förfogande. För bearbetningen af det sålunda insamlade observationsmaterialet har detta år Akademien lemnat lektor FORSLING ett understöd från Edlundska donationen. Lektor FORSLINGS förut i Institutionen utförda undersökningar öfver metallen Holmium och dess spektroskopi befinna sig f. n. under tryckning i Bihanget till Akademiens Handlingar.

Liksom förra året har Akademiens fysiker i egenskap af ledamot af internationella meterkomitén äfven i år deltagit i denna komités sammanträde i Paris sistlidne september, och dervid tillika af Kongl. Majestät förordnats att såsom delegerad för Sverige deltaga i den allmänna internationella konferens, som vid samma tid i enlighet med den internationella meterkonventionens föreskrift derstädes afhölls.

Till den af Akademien d. 24 oktober sistlidna år afhållna sekularfesten till Tycho Brahes minne har af Akademiens fysiker såsom festskrift utgifvits en ny facsimile-edition af Tycho's »Astronomiæ instauratæ Mechanica» Wandesburgi 1598, föregången af ett företal, innehållande bibliografiskt-historiska undersökningar öfver de få exemplar af detta verk, som ännu förefinnas. Under vintermånaderna har detta verk utdelats till de astronomiska institutionerna inom och utom Europa, som genom subskription möjliggjort dess utgivande.

Under året har monteringen af det stora institutionen tillhöriga Rowlandska concavgittret afslutats, hvadan denna mäktiga spektralapparat numera är till begagnande färdig. I öfrigt har instrumentsamlingen ökats, dels med en laboratoriiheliostat dels med en kvicksilfver-strömbrytare och en extraström-apparat af Erneske för spektroskopiskt ändamål.

De Thamiska föreläsningarne öfver vissa delar af den stellära astronomen ha under febr. och mars månader i vanlig ordning hållits.

Vid *Bergianska stiftelsens* trädgårdsskola har antalet elever under året varit 18. Undervisningen har omfattat hortikulturens olika grenar samt botanik, geografi, fysik, kemi, aritmetik, fältmätning, trädgårdsritning, bokföring och svenska skriföfningar. — I trädgårdens botaniska afdelning har blifvit uppförd en musei-paviljong, för förvaring af frö- och fruktsamlingarne. Bland nyanläggningar må nämnas en betydande utvidgning af vårväxt-partiet, samt en afdelning innehållande cement-bassiner för odling uti det fria af intressantare och ömtäligare vattenväxter. Med anledning af sommarens oerhörda brist på nederbörd — under de enligt regeln regnrikaste månaderna, juli och augusti, föllo sammanlagdt ej fullt sex millimeter — har en mindre vattenledning utförts, hufvudsakligen afsedd att reglera vattenståndet i den största af växtodlingsdammarne. — Stiftelsen har under året hågkommit med talrika gåfvor. Lefvande växter hafva lemnats af Mr. R. H. BEAMISH (från Irland), Ingeniör C. O. BOIJE AF GENNÄS, Kandidat C. G. DAHL, Jägmästare W. DAHL, Fröken A. DANIELSSON, Lektor K. F. DUSÉN, Jägmästare A. EGERSTRÖM, Kyrkoherde S. J. ENANDER, Jägmästare D. FRYKMAN, Öfverintendent A. T. GELLERSTEDT, Professor F. HILDEBRAND (från Baden), Adjunkt K. JOHANSSON, Possessionat P. A. LARSSON, Doktor K. LJUNGSTEDT, Jägmästare E. LUNDMAN, Possessionat C. MÖLLERBERG, Doktor C. F. O. NORDSTEDT, Direktör L. A. RINGIUS, Kyrkoherde A. TORSSANDER, Enkefru G. ÖRTENBLAD och Öfverjägmästare V. TH. ÖR-

TENBLAD. Frön hafva erhållits af Konservator E. AUTRAN (från Patagonien), Kandidat C. G. DAHL, Amanuens H. DAHLSTEDT, Konservator K. EDWALL (från Brasilien), Doktor R. FRIES (från Argentina), Docent T. HVAASS (från Norge), Lektor C. A. M. LINDMAN, Doktor K. LJUNGSTEDT och Professor M. SONDÉN (från Norge). Morfologiska föremål hafva skänkts af Bergsinjör J. DANIELSSON och Herr O. JODAHL. — Till stiftelsens botaniska tafvelsamling hafva gåfvor lemnats af Herr H. HYL-TÉN-CAVALLIUS, Arkitekt J. O. LINDBERG, Landtbruksinspektör A. LYTTKENS, Professor A. G. NATHORST och Professor Bergianus. — Vid det internationela frö- och fruktbyte, som årligen eger rum, har trädgården utsändt frö till och mottagit frö ifrån mer än 90 botaniska trädgårdar och likartade institutioner.

Akademiens Bibliotek har under året hållits tillgängligt på stadgade tider. Statistiken öfver dess begagnande utvisar, att under 255 tjenstgöringsdagar de besökandes antal varit 3,002, att till begagnande framtagits 4,799 volymer, af hvilka 2,119 utlemnats till hemlån, samt att 2,191 låntagna volymer blifvit återställda. Vid årets slut voro omkring 10,900 band och häften utlånta. Genom inköp, gåfvor och byten har boksamlingen tillväxt med 7,085 band, häften och småskrifter. — Akademiens egna skrifter utdelas för närvarande till 960 institutioner och personer, af hvilka 277 inom och 683 utom landet.

Akademiens Zoologiska Station Kristineberg har under året för studier och vetenskapliga undersökningar varit begagnad, utom af föreståndaren, af Professorerna G. RETZIUS, T. TULLBERG, F. R. KJELLMAN och D. BERGENDAL, Docenterna O. CARLGREN och A. OHLIN, Fil. Licentiaten I. ARWIDSSON och Fil. Kandidaterna A. TULLGREN, K. A. ANDERSSON, E. ÖVERGAARD, H. I. M. BRUNNANDER, A. BERGSTRAND och L. RIBBING.

De ämnen, som i hufvudsak utgjort föremål för vetenskapliga undersökningar, hafva varit: nervändningar i huden hos evertetrater, algernas organisationsförhållanden, vissa borstmas-

kars anatomi och systematik, bryozoernas systematik och utveckling, actiniernas byggnad och utveckling, vissa Nemertiners organisation, högre kräftdjurs utveckling, konserverings-metoder m. m.

Tack vare den frikostiga gåfvan af 40,000 kronor, som Akademiens zool. Station fått mottaga af Konsul G. E. BROMS den 5 januari 1901, är det att hoppas, att stationen inom kort skall vara försedd med en ny till alla delar tidsenlig laboratoriebyggnad. der arbeten kunna utföras under alla tider af året. Bristen på ett sådant laboratorium har under åren gjort sig mycket kännbar. Emellertid är uppförandet af en dylik byggnad vid Kristineberg förbundet med flera viktiga förarbeten, som nu delvis äro fullbordade, delvis under utförande. Sålunda har stenkajen förlängts 1,5 meter ut mot djupet, så att större fartyg kunna lägga till, hvilket är af synnerligen stor betydelse vid det blifvande byggnadsföretaget, när en mängd granitblock m. fl. tyngande saker skola ilandföras. Tillika var den gamla kajen mycket bristfällig. Ett mindre hus af sten har uppförts och står nu färdigt att mottaga den motor, som skall drifva pumpverket. Dessa båda byggnadsföretag hafva kräft en summa af 1,680: 10 kronor. Under uppförande på dertill lämplig plats är ett envåningshus med frontespis afsedt att inrymma utom verkstad, bryggghus med mangelbod, 2 rum och kök för den nye vaktmästaren samt dertill 4 smärre boningsrum för studerande — antalet boningsrum var förut otillräckligt. Byggmästaren HENRIK HANSSON, som från april månad öfvertager vaktmästarebefattningen vid stationen och som är en i hela trakten erkänt skicklig snickare och byggmästare, har åtagit sig utförandet af detta arbete för en summa af 3,400 kronor, dock med det vilkoret, att det brukbara timmer och virke, som kan erhållas från det gamla odugliga verkstadshuset och från det stora likaledes odugliga uthuset, måtte få användas. Det är nämligen af behofvet påkalladt, att dessa båda byggnader rifvas ej blott från den synpunkt, att de äro odugliga och otidsenliga, men framför allt därför, att de stå i vägen för det blifvande laboratoriet.

Utom den förut omnämnda storartade donationen har stationen under året fått mottaga flera värdefulla skänker. Professor GUSTAF RETZIUS har öfverlemnatsitt stora arbete »Biologische Untersuchungen» Neue Folge, Bd IX samt ett för stationen synnerligen kärkommet porträtt af ANDERS RETZIUS, hvilken vid Kristineberg utfört flera af sina glänsande undersökningar. En annan person har öfverlemnats ett större antal zoologiska skrifter. Af synnerligen stor betydelse är, att stationen utaf en person, som önskar förblifva okänd, fått mottaga ett gåfvobref, deri han förbinder sig att, när helst det för stationen är lägligt, öfverlemnas en petroleum-motor om 4,6 hästkrafter med dertill passande centrifugalpump samt dessutom ett acetylen-gasverk om 50 lågor. Redan i april innevarande år skall maskinen och pumpen uppsättas i det nya maskinhuset, genom hvilken anordning man kan motse, att ingen vattenbrist skall uppstå under nästkommande sommar.

Slutligen har såsom vanligt arbetsmaterial insamlats, behörligen konserverats och öfverlemnats till Riksmuseum samt till rikets zootomiska institutioner och museer.

Det Naturhistoriska Riksmuseet.

I vanlig ordning och i enlighet med Akademiens beslut har Naturhistoriska Riksmuseum hållits tillgängligt för allmänheten onsdagar och söndagar afgiftsfritt, lördagar mot en personlig afgift af 25 öre. Under de 7 månader för hvilka denna redogörelse gäller, från och med april till och med oktober 1901, hafva 231 inträdesbiljetter blifvit sålda, ett märkbart mindre antal än under föregående året, då under motsvarande tid 329 dylika biljetter såldes. Deremot har antalet skolelever, som under lärares eller lärarinnors tillsyn fått afgiftsfritt besöka museet, varit nästan detsamma som under föregående året, eller 1,303 motsvarande 1,305 under samma månader 1900. Såsom vanligt hafva rekryterna vid Svea Lifgarde, till ett antal af 200, under juldagarna haft fritt tillträde. Frekvensen på de afgiftsfria da-

garne, synnerligen söndagarne, har fortfarande varit ganska stor.

Vertebrat-afdelningen har emottagit gåfvor från Konservator G. KOLTHOFF, Herr Fröhandlaren C. G. TJÄDER, Tullförvaltaren O. EKBOHRN, Artisten A. ÖSTERBERG, Trädgårdseleven P. SÖRLING, Hofjägmästaren N. M. EKSTAM, Ingeniören G. RYSTEDT, Trädgårdsmästaren A. WAHLBERG och Herr I. W. LINDSTRÖM. Från British Museum har museet genom Professor A. NEWTON till skänks erhållit exemplar af tre fogelarter (*Hemignathus procerus*, *Palmeria Dolei* och *Lacops coccinea*) från Sandwichs-öarne, hvilka arter liksom åtskilliga andra på dessa öar tyckas dömda att snart gå sin utrotning till mötes.

Intendenten har under året fortsatt och, såsom han hoppas, snart avslutat ett omfattande arbete öfver museets Gobier, i samband hvarmed den talrika samling exemplar och arter af detta släkte, hvilka museet eger, katalogiserats. Från Konservatorsverkstaden hafva åtskilliga större arbeten kunnat uppställas i museets förevisningssamling. Så har den stora Grönländska skälgruppen, hvilken i föregående årsberättelse omnämndes, blifvit fullbordad och fått sin plats. I Hvalmuseet, hvilket af brist på anslag ej ännu kan hållas tillgängligt för allmänheten, hafva två färdiguppställda Näbbhval-skelett inflyttats. Dessutom hafva skelett af ett ovanligt stort tamsvin och af den tämligen sällsynta Glansfisken uppställts färdiga, hvarjemte såsom vanligt en del exemplar af däggdjurs- och fogel-arter, för hvilka plats i museet f. n. ej kunnat beredas, blifvit skinnlagda eller rå-skeletterade att bevaras för framtida färdigberedning.

Afdelningens samlingar hafva för studier varit anlitade af bl. a. Cand. Mag. A. S. JENSEN från Köpenhamn, Doktor TORSTEN RENWALL från Finland, Mr. R. BOWDLER SHARPE från British Museum i London, Mr. GRAHAM RENSHAW i Manchester och Mr. R. F. SCHARFF i Dublin.

Den entomologiska *afdelningen* har under 1901 fått mottaga följande gåfvor.

Från *muséet i Bruxelles* en af 33 arter bestående samling afrikanska fjärilar; från Mr. E. FLEUTIAUX några afrikanska coleoptera; från Museum GODMAN & SALVIN i London sex arter hemiptera; från G. A. K. MARSHALL i Salisbury en af omkring 109 arter i öfver 300 ex. bestående coleoptersamling från Mashunalandet; af Kand. A. TULLGREN ett par (♂, ♀) *Pieris cheiranthi* från Teneriffa; från G. W. KIRKALDY i London några Notonectider, Hydrometrider, Capsider och Flatider från Jamaica och Ceylon; från G. A. K. MARSHALL i Salisbury en af omkring 70 arter i öfver ett hundra ex. bestående samling lepidoptera från Mashunalandet; från H. MARSHALL Corsica, några arter coleoptera; från G. A. K. MARSHALL i Salisbury en af c. 30 arter i 49 ex. bestående samling lepidoptera från Mashunalandet; från A. ROMAN flera ex. af *Hapalus bimaculatus*, tagna vid Upsala den 22 april 1901; af H. L. ÖBERG några nattflyn från Gotland och en mätarfjäril från Stockholm; från W. L. DISTANT i London tre ex. af *Sphenorrhina Biolleyi*; från *muséet i Berlin* genom Prof. KARSCH 13 sp. lepidoptera; från G. A. K. MARSHALL en samling Curculionider, 30 arter, 31 ex. från Mashunalandet; från L. PERINGUEY i Capstaden en samling af 36 arter, 50 ex., coleoptera från Sydafrika; af Hofjägmästare F. EDELSTAM en mindre samling dagfjärilar från Asien och Afrika; från Dr. E. BERGROTH i Tammerfors en mindre samling Longicorner och några Lucanider från N. Syd-Wales; af Hr HOFFSTEIN, Runmarö, några svenska lepidoptera och hemiptera; af Konservator H. MUCHARDT i Helsingborg 5 ex. af *Phaleria cadaverina*, tagna vid Engelholm den 23 maj; från L. de NICÉVILLE vid Zool. Garden i Calcutta 3 ex. *Euplœa Kinbergi*; af Med. Kand. JOHN PEYRON några sällsyntare svenska fjärilar samt uppblåsta larver; från L. PERINGUEY i Capstaden en af 41 arter i 63 ex. bestående samling sydafrikanska coleoptera; från J. DESBROCHERS DES LOGES i Tours några Curculionider; af Studeranden E. MJÖBERG några sällsyntare svenska coleoptera

samt af Docenten Dr CARL AURIVILLII sterbhus, genom Prof. AURIVILLIUS ett insektskåp, innehållande 54 lådor.

Genom köp och byte har afdelningen erhållit: en af 53 arter bestående samling Curculionider från Prof. JOHN SAHLBERG i Helsingfors; en större samling lepidoptera från Herrar STAUDINGER och BANG-HAAS i Blasewitz vid Dresden; tolf arter lepidoptera från K. DIETZE i Plauen; fyra termitdrottningar från Ceylon af Konservator H. MUCHARDT i Helsingborg; en podurid, *Actaetes Neptuni*, från V. WILLEM i Gand, Belgien (byte); en större samling palearktiska hemipterer från Prof. JOHN SAHLBERG i Helsingfors; en samling termiter från J. DESNEUX i Bruxelles (byte); samt en af 44 arter bestående samling bestämda termiter från S. Amerika af Dr F. SILVESTRI (byte).

Af museets dupletter hafva under året samlingar utdelats till följande museer, skola och entomologer, för hvilka samlingar ofta andra för Riksmuseet värdefullare erhållits i byte:

till Prof. N. V. NASSONOW, Warschau, en af 18 arter bestående samling afrikanska termiter; till *museet i Berlin*, Prof. KARSCH, två sändningar lepidoptera; till *museet i Tromsø*, Konservator SPARRE SCHNEIDER, en samling kamerunska dagfjärilar representerande omkring 60 arter i c. 100 exemplar; till Landbruksinspektör AUG. LYTTKENS en mindre samling kamerunska fjärilar; till *Nya Lärarinneseminariet* i Stockholm en af 81 arter bestående samling svenska insekter; till *museet i Capstaden*, Mr PERINGUEY, en del Tenebrionider såsom ersättning för bestämningen af det De Vylderska materialet af denna grupp; till J. DESNEUX, Bruxelles, en samling af 10 arter afrikanska termiter mot andra sådana, samt till KARL ABSOLON i Prag flera ex. *Isotoma janmayensis*.

För jemförelse med typer och bearbetning hafva museets samlingar varit mycket anlitade af i synnerhet utländska sakkunniga, men äfven af svenska entomologer. Af dessa forskare kunna nämnas:

T. TSCHITSCHERIN, Ryssland; W. L. DISTANT i London; Kand. A. TULLGREN i Upsala; Prof. O. M. REUTER i Helsing-

fors; Prof. JOHN SAHLBERG i Helsingfors; G. W. KIRKALDY i London; Dr L. MELICHAR i Wien; Dr F. OHAUS i Altona; Kand. IVAR TRÄGÅRDH; L. PERINGUEY i Capstaden; G. A. K. MARSHALL i Salisbury; Dr E. BERGROTH, Tammerfors; G. B. BUCKTON, England; Dr VICTOR WILLEM i Bruxelles; Prof. LAMBEERE, Bruxelles; J. DESBROCHERS DES LOGES i Tours; Studeranden E. MJÖBERG, Stockholm; L. CZERNY, Österrike; Dr F. SILVESTRI, Umbria, Italien; G. C. CHAMPION i London; P. STEIN i Genthin, Tyskland, och I. B. ERICSON i Mölndal.

Vidare hafva afdelningens samlingar på ort och ställe, utom af förre och n. v. intendenten, studerats af flera entomologer såsom Kand. A. TULLGREN, Upsala; Studeranden E. MJÖBERG, Stockholm; Herr A. JOSEPHSSON, Stockholm; Stud. V. LINDBOM; Prof. S. LAMPA; Herr G. HOFGREN; Kand. I. TRÄGÅRDH; Dr H. NORDENSTRÖM, Linköping; Mr A. JANET, Paris, och Dipterologen L. CZERNY från Phaukirchen i Österrike m. fl.

Professor AURIVILLIUS har fortsatt ordnandet af den exotiska Hymenoptersamlingen samt af de afrikanska dagfjärilarne och bearbetat museets samling af etiopiska Striphnopterygider. N. v. intendenten har under våren avslutat ordnandet af de afrikanska termiterna, såväl en spritsamling af dessa insekter som en samling af torrpreparerade ex. De från Kamerun hemförda Locustiderna hafva bearbetats och uppställts och de svenska Odonaterna ordnats.

Museets samlingar hafva lemnat material till följande afhandlingar:

CHR. AURIVILLIUS: Diagnosen neuer Lepidopteren aus Africa: Ent. Tidskr. p. 113—128.

—, On the ethiopian genera of the family Striphnopterygidæ, with 5 plates: Bih. Vet. Akad. Handl. Bd. 27, IV, N:o 7.

HJ. BORG: Anteckningar öfver svenska Neuroptera: Ent. Tidskr. p. 175—176.

G. HOFGREN: För Sveriges Fauna nya Pyralider: Ent. Tidskr. p. 241—248.

A. ROMAN: Hapalus bimaculatus L.: Ent. Tidskr. p. 166.

JOHN SAHLBERG: Aleocharider insamlade i polarregionerna af svenska expeditionerna 1883 och 1899: Ent. Tidskr. p. 167—169.

YNGVE SJÖSTEDT: Monographie der Termiten Afrikas, mit 9 Taf.: K. Vet. Akad. Handl. Bd. 34, N:o 4.

—, Locustodeen aus Kamerun und Kongo, mit. 4 Taf.: Bih. Vet. Akad. Handl. Bd. 27, IV, N:o 3.

IVAR TRÄGÅRDH: Nothrus maximus eine neue Oribatide, fossil in der »Glossotheriumhöhle» gefunden und recent noch in Patagonien fortlebend: Zool. Anz. Bd. XXIV, N:o 634, p. 25—29.

—, Revision der von THORELL aus Grönland, Spitzbergen und der Bären-Insel und von L. KOCH aus Sibirien und Novaja Semlja beschriebenen Acariden: Zool. Anzeiger, Bd XXV, N:o 660, p. 56—62.

ALB. TULLGREN: Contribution to the knowledge of the Spider Fauna of the Magellan territories: Svenska Exped. till Magellansländerna, Bd. II, N:o 10, p. 181—260, taf. XV—XIX.

—, Chelonethi from Camerun in Westafrika collected by Dr. YNGVE SJÖSTEDT: Ent. Tidskr. p. 97—101.

Afdelningen för lägre Evertebrater har under året haft att glädja sig åt betydande tillökningar. Bland skänker må i första hand nämnas en anseelig samling djur från Egypten och Nilen hopbragt af Docenten L. JÄGERSKIÖLD, Kandidaten Th. ODHNER och Kand. I. TRÄGÅRDH under deras resa i dessa trakter och öfverlemnad af Doc. L. JÄGERSKIÖLD, som öfver densamma ägde dispositionsrätt. Denna samling är af så mycket större värde, som Riksmuseum förut endast har en obetydlighet af naturföremål från Niltrakterna. Särskildt bör framhållas, att intestinalmaskarnes grupp, förut högst ofullständigt representerad i museet, intager en hufvudpart i denna samling, hvarigenom museum blir i besittning af en af de fullständigaste och vackraste i Europa. Docent L. JÄGERSKIÖLD och Kand. Th. ODHNER, båda specialister på detta område, hafva redan påbörjat en veten-

skaplig bearbetning af dem. Bland öfriga gåfvor må nämnas intestinalmaskar från störfisken tagna af Docenten E. LÖNNBERG i Ryssland, ett antal borstmaskar och andra lägre djur tagna af Fil. Licentiaten I. ARWIDSSON i Trondhjemsfjorden, larver af en egendomlig Gordiid tagna af Veterinären Fil. Kandidat A. BERGMAN från tarmar af kreatur från Amerika, en vacker samling planktoniska ostrakoder af Professor P. T. CLEVE, en utländsk igel af Professor C. G. SANTESSON och en egendomligt bildad daggmask af Professor H. G. SÖDERBAUM.

Äfven genom *byten* och *inköp* har afdelningen förvärfvat saker af intresse, t. ex. ungformer i olika stadier af den vid Amerikas kuster lefvande egendomliga Molukkräftan, *Limulus polyphemus* L. m. m.

För vetenskaplig bearbetning, bestämning och granskning hafva afdelningens samlingar i vidsträckt mån varit anlitade af landets egna zoologer äfvensom af framstående utländske forskare. Professor W. LILLJEBORG, som under en följd af år haft till låns en mycket betydande samling små kräftdjur af Copepoder-nas och Phyllopodernas ordningar, hopbragt under talrika svcnska expeditioner till Ishafvet, Sibirien etc., har i oskadadt skick återställt denna samt utfört sorgfälliga bestämningar öfver en stor mängd former, hvarigenom Riksmuseum nu är i besittning af ett rikt af den framstående specialisten sjelf bestämdt material af dessa små djur, som utgöra en så vigtig beståndsdel i hafvets plankton-verld och som tillika befolka våra sjöar, floder och stagnerande vatten. Professor P. T. CLEVE har bearbetat och återställt den rika samling af planktoniska djurformer, som af numera afidne Docenten C. AURIVILLIUS upphäfvats under hans resor i Indiska arkipelagen. Dessutom har Professor CLEVE för bearbetning ett antal glas med bottenprof från Ishafsexpeditionen 1898. Professor A. WIRÉN har för bearbetning stora sviter af nordiska borstmaskar. Professor D. BERGENDAL har under mer än 10 år haft en stor del af Riksmuseets Nemertiner till låns för att utarbета en större afhandling öfver dem. Den kände zoologen Professor E. EHLERS i Göttingen har be-

stämt och återsändt alla borstmaskarne från Docenten NORDENSKJÖLDS Eldslands-expedition och om dem, äfvensom om andra tyska expeditioners borstmaskar från samma trakt af jorden, författat ett större samlingsarbete, som helt nyligen utkommit. För att kunna utföra detta har han upprepade gånger fått till låns Kinbergska typer från Eugenieexpeditionens resa, hvilket allt behörigen återställts. Den framstående specialisten Professor H. LUDWIG i Bonn har fortfarande sedan flera år tillbaka för bearbetning alla Eldslands-expeditionens Echinodermer utom Holothurierna. Doktor JOH. THIELE i Berlin, specialist på svampdjur, har alla Eldslands-expeditionens samlingar af dylika djur för bestämning och bearbetning. Doktor W. MICHAËLSEN i Hamburg har under året författat ett större samlingsarbete öfver Eldslandets Ascidier, i hvilket äfven ingår den svenska Eldslands-expeditionens rikhaltiga samling, som han fått sig tillsänd från Riksmuseum och som behörigen återsändts. Doktor H. I. HANSEN i Köpenhamn har för bestämning sviter af exotiska kräftdjur. Docenten Lektor L. JOHANSSON har en del iglar för bearbetning. Docenten L. JÄGERSKIÖLD bearbetar den rika samlingen af Nematoder m. m., som af honom hemförts från Egypten och donerats till afdelningen. Docenten A. H. HENNIG i Lund har sedan flera år tillbaka en betydande samling af Grönländska bryozoeer för bestämning och bearbetning. Fil. Licentiaten HJ. ÖSTERGREN har för bearbetning Riksmuseets Holothurie-samling från Eldslandet. Fil. Kandidat TH. ODHNER arbetar med Trematoder från Riksmuseum, särskildt med den rika egyptiska samling, som gifvits helt nyligen till museet. Fil. Licentiaten I. ARWIDSSON arbetar med vissa grupper af Borstmaskar och Fil. Kandidat W. SANDBERG har snart fullbordat ett arbete öfver nordiska spongier, som tillhöra Riksmuseum. Docenten A. OHLIN har haft till låns mycket stora samlingar af högre kräftdjur från arktiska och antarktiska haf äfvensom af Eldslands-expeditionens Hydrozoer. Sedan en betydande del deraf bestämts och vetenskapligt bearbetats i flera tryckta uppsatser, har han före afresan med den nya antark-

tiska expeditionen återställt allt i oskadadt skick. Kandidat K. A. ANDERSSON har fullbordat sina undersökningar och bestämningar af alla de Bryzoer, som insamlats under Professor NATHORST'S ishafsexpeditioner under åren 1898 och 1899. Slutligen må framhållas att Doktor J. GUNNAR ANDERSSON bestämt en stor del af afdelningens Ostracoder och om dem affattat en afhandling, som är i det närmaste tryckfärdig.

För vetenskaplig jemförelse har utlånats till *British Museum* en större samling Nereider, Kinbergs typer, samt till Doktor JOH. THIELE ett mindre antal *Nebalia*-former, hvilket allt behörigen återsändts.

På afdelningens egen lokal hafva vetenskapliga undersökningar utförts, som, fränsedt arbetet med lösande af mera speciella frågor, haft till mål att ej blott ordna och bestämma vissa större djurgrupper utan äfven att utvidga kännedomen om deras utbredning i våra haf. Sålunda har Docenten O. CARLGREN fortfarande arbetat med hela Riksmuseets Actinie-samling, öfver hvilken han offentliggjort en hel mängd uppsatser, och torde han snart efter många års studier hafva fullbordat dessa svåra och omfattande undersökningar. Fil. Licentiaten I. ARWIDSSON och Kandidaten K. A. ANDERSSON hafva äfven arbetat derstädes, den förre med Borstmaskar, den senare med Bryzoer. För öfrigt har Intendenten sjelf användt all sin disponibla tid med att ordna, bestämma och vetenskapligt behandla våra nordiska Mollusker och Gephyreer.

Arbetet med afdelningens rika samlingars grofordnande, inregistrerande och vårdande har för öfrigt oafbrutet fortgått under året. Enbart spritpåfyllning af intill 100,000 flaskor tager årligen i anspråk månader af arbetsbiträdenas tid.

Slutligen bör omnämnas, att på afdelningen iordningställets 3:ne utrustningar för vetenskapliga resor, en åt Kandidat E. NORDENSKIÖLD för hans expedition till Syd-Amerika, en åt Licentiaten I. ARWIDSSON för hans färd till Trondhjemsfjorden samt en mindre åt Doktor G. MALME, som benäget lofvat att under sin resa i Brasilien för Riksmuseum insamla hvad han

under sina botaniska exkursioner händelsevis kunde påträffa af lägre evertebrerade djur.

Den *Zoo-Palæontologiska Afdelningen* förlorade den 16:de maj genom döden sin intendent Professor G. LINDSTRÖM, hvilken under ett fjerdedels sekel förestått densamma, och under hvars nitiska ledning samlingarne isynnerhet från det *Öfversiluriska systemet* vunnit en sådan tillväxt, att museet i sistnämnda hänseende nu torde vara det på väl bevarade former rikaste i världen. Efter Professor LINDSTRÖM's fränfälle uppehölls intendentbefattningen intill den 10 okt. af Professor HJ. THEEL, då Doktor J. E. G. HOLM, som af K. Akademien kallats till afdelningens intendent, öfvertog densamma.

Flera värdefulla skänker hafva under året kommit afdelningen till godo. Häribland må i främsta rummet nämnas Professor A. G. NATHORST's gåfva af tvenne viktiga samlingar från Spetsbergen, gjorda under hans Polarexpedition 1898. Den ena af dessa utgöres af en samling *Tertiär-försteningar*, bestämda af Professor T. FUCHS i Wien; den andra af mollusker från Grey Hook beskrifna af Professor E. KAYSER i Marburg. Professor NATHORST har dessutom öfverlemnadt en ryggekota af en Saurie från *Trias-systemet* på Spetsbergen samt kalktuff med landsnäcka från Sigridslund i Skåne. Öfriga skänker utgöras af: Fossil från Vadstenatrakten, af Kollegan W. A. ENGHOLM i Vadstena; gipsafgjutningar af tvenne exemplar af *Tremataspis* från Ösel, af Akademiker FR. SCHMIDT i St. Petersburg; *Batina Donai* WALC, af U. States Natural Museum; Marlekor från Cincinnati, af Mr. HOLCOMB i Cincinnati; samt af *Geologiska Föreningen i Stockholm* ett fullständigt exemplar af *Geolog. Föreningens Förhandlingar*.

Genom inköp hafva förvärfvats fossil från Gotland, Öland och Östergötland.

För vetenskapliga undersökningar har afdelningen besökts af: Dr. RÖSE i Dresden och Mr. W. PATTEN Dartmouth College, Hannover N. H., U. S. A., hvilka båda studerat de af G. LIND-

STRÖM beskrifna exemplaren af *Cyathaspis* från Gotland, äfvensom af Stipendiaten vid Kristiania Universitet J. KLÆR i och för studier af Gotländska koraller m. m.

För bestämning och bearbetning äro vid årets slut utlånade: till Professor O. JÄKKEL i Berlin, Crinoider från Gotland; till Professor H. RAUFF i Bonn, Spongier funna såsom lösa block på Gotland; till Professor J. BÖHM i Berlin, mollusker från Triassystemet på Spetsbergen; till Docenten A. HENNIG i Lund samtliga Bryozoa från Sveriges kritsystem; till Akademiker TH. TSCHERNYSCHEW i St. Petersburg hela samlingen af Karboniska fossil från Gåskap på Novaja Semlja samt en Sauriekota från Trias-systemet på Spetsbergen.

För vetenskaplig jämförelse hafva utlånats: till Dr K. A. GRÖNVALL i Köpenhamn, trilobiter från Bornholm och Skåne; samt till Akademiker FR. SCHMIDT i St. Petersburg, trilobiter tillhörande släktet *Ptychopyge* från Östergötland.

Arbetena inom afdelningen hafva under året utgjorts af preparering och afteckning samt bestämning af fossil från Brachiopodskiffen i Östergötland, samt af Brachiopoder tillhörande släktet *Acrotreta*; vidare hafva de svenska Undersiluriska Brachiopoderna sammanställts, samt en del hittills magasinerade Cephalopoder från Gotland preparerats och grofordnats; slutligen hafva, i sammanhang med att planer för en ny anordning och uppläggning af samlingarne uppgjorts, en mängd reparationer af äldre skåp jemte omflyttningar i musei- och arbetsrummen företagits.

Riksmuseets *Botaniska afdelning* har under året vunnit betydande tillväxt. Genom köp hafva förvärfvats: exsiccaturverken COLLINS, HOLDEN & SETCHELL »Phycotheca boreali-americana» XVI, XVII; F. PAX »Herbarium cecidiologicum» X; H. ROSE »Herbarium siculum» I, II; J. E. TILDEN »American Algæ» V; T. VESTERGREN »Micromycetes rariores selecti» XVI—XIX; samt följande växtsamlingar: ett särdeles vackert och värderikt lathenbarium af Doktor G. O. MALME, alger och fanerogamer från

Java, samlade af Docent C. AURIVILLIUS, bråsilianska fanerogamer af REINECK & ZERMAK, australiska fanerogamer af PRITZEL, norska Hieracier af Amanuens H. DAHLSTEDT, siamesiska växter af ZIMMERMANN, afrikanska växter af Ingeniör P. DUSÉN, H. BAUM och G. ZENKER, samt skandinaviska växter af Lunds Botaniska förening. Genom byte hafva bekommit alger från alla verldsdelar samt fanerogamer från Färöarne och Brasilien af Universitetets Botaniska museum i Köpenhamn. Såsom gåfvor hafva erhållits: alger från Nordamerika af Konservator O. TOLLIN, fanerogamer från Estland af Professor E. ALMQUIST, samt skandinaviska växter af Lektor E. ADLERZ, Rektor S. ALMQUIST, Öfverkontrollör P. G. BORÉN, Amanuens H. DAHLSTEDT, Hofkamrer O. HAFSTRÖM, Riksdagsman A. F. LILJEHOLM, Fröken E. NATHORST, Herr J. E. PALMER, Redaktör W. RAHMN och Kollega O. WIJKSTRÖM. — Delar af de skandinaviska, ark-tiska, allmänna och Regnelliska herbarierna hafva för bearbetning varit utlemnade till specialister i Sverige, Danmark, Tyskland, Österrike, Belgien och Schweiz. För vetenskapliga undersökningar hafva samlingarne varit på museum anlitade af Rektor S. ALMQUIST, Kamrer C. H. BRANDEL, Amanuens H. DAHLSTEDT, Kyrkoherden S. J. ENANDER, Adjunkten T. O. B. N. KROK, Lektor C. A. M. LINDMAN, Doktor G. O. MALME, Kandidat C. SKOTTSBERG, Doktor N. SVEDELIUS och Kyrkoherde A. TORSSANDER. — I egenskap af Regnellsk amanuens har till d. 15 aug. 1901 tjenstgjort Doktor G. O. MALME, hvilken i september samma år afreste såsom Regnellskrestipendiat till Sydamerika.¹ — Från d. 15 aug. har Doktor N. SVEDELIUS varit anställd såsom Regnellsk amanuens vid afdelningen.

Till *afdelningen för arkegoniater och fossila växter* hafva såsom gåfvor lemnats: några föremål från torfmossar af docen-

¹ En första frukt af hans botaniska verksamhet derstädes har redan kommit museet till del, i det att de rikhaltiga och särdeles väl konserverade samlingar af pressade växter samt frukter och frön, som stipendiaten sammanbragt i Brasiliens sydligaste del, staten Rio Grande do Sul, under loppet af mars månad anländt hit i bästa skick.

ten G. ANDERSON; subfossila blad af *Potamogeton acutifolia* Link från Rörken i Upland af kandidat CARL G. DAHL; några kärlkryptogamer från Patagonien af ingenjör P. DUSÉN; en afvikande form af tall af statsgeologen H. HEDSTRÖM; intressanta växtfossil från Frans Josefs land af dr REGINALD KOETTLITZ i Dover; en värderik samling växtfossil från Skåne, Bornholm och England af Sveriges Geologiska Undersökning genom chefen, professor A. E. TÖRNEBOHM.

Genom byte hafva erhållits några sällsynta ormbunkar från Norge samt omfattande samlingar skandinaviska barrträd, kärlkryptogamer och mossor.

Genom inköp hafva förvärfvats: några skandinaviska ormbunkar; en större samling ormbunkar från Java; mossor från Teneriffa; en större samling skandinaviska mossor; växfossil från Bornholm.

För vetenskapliga studier eller undersökningar hafva samlingarne anlitats af ingenjören P. DUSÉN, licentiaten O. EKSTAM, hofkamreraren O. H. HAFSTRÖM, doktor J. HAGEN, Opdal, Norge, kandidaten F. INGVARSSON, apotekaren A. KOCKUM, professoren G. LAGERHEIM, lektorn CARL A. M. LINDMAN, kandidat MÅRTEK PORSILD i Köpenhamn, hr F. STEPHANI i Leipzig, licentiaten HJ. MÖLLER, professoren grefve HERMAN, till SOLMS-LAUBACH i Strassburg i Elsass och amanuensen T. VESTERGREN.

Afdelningen står i särskild förbindelse till kamrer C. BRANDEL, som kostnadsfritt och på ett utmärkt sätt biträdt vid herbariets ordnande.

Den *mineralogiska afdelningen* har under år 1901 endast förvärfvat ett ringa antal märkligare mineral.

Bland inköpen må nämnas:

diverse mineral från Långban i Vermland samt från andra vermländska mineralfyndorter inköpta af Dr G. FLINK; en större stuff Aeschynit från Hitterå i Norge samt diverse andra norska mineral inköpta af Bergsingenjören A. GULDBERG i Kristiania.

Såsom gåfvor har afdelningen mottagit:

af Prof. A. G. NATHORST slagg från Jan Mayen och en stuff af ett orthitlikt mineral från trakten af Falun;

af Grefve C. C. BECK-FRIIS bernsten från Börringe;

af Bergsingeniören O. TRÜSTEDT 4 stuffer gips från Pitkä-ranta i Finland;

af Dr G. FLINK en stuff Braunit från Långban;

samt flera profver af pimsten och slagg ilanddrifna vid Norges kuster och skänkta af Ingeniören vid Havnevesendet AUG. DORPH och af Sognepræst J. R. LUNDMARK.

Vid den *etnografiska* afdelningen hafva samlingarne under det gångna året ökats med 1,881 nummer, af hvilka 111 genom gåfvor och 1,770 genom köp. De relativt stora inköpen hafva möjliggjorts genom ett af Riksdagen särskildt beviljadt extra anslag af 4,000 kronor såsom bidrag till inlösen af fyra större samlingar, nämligen framlidne Dr ERIK NYMANS från Nya Guinea och Java (1,270 nummer), Missionärerna L. E. HÖGBERGS och M. BÄCKLUNDS från Central-Asien, samt Amanuensen F. R. MARTINS hufvudsakligen från Japan, allt tillsammans uppgående till 1,576 nummer. Det dernäst mest betydande förvärfvet utgöres af den till 114 nummer uppgående, synnerligen vackra samling, hufvudsakligen från Schilluckerna i Afrika, hvilken af Akademi-Docenten L. JÄGERSKIÖLD hopbragts under hans resa i Sudan och öfverlåtits mot godtgörelse för anskaffningskostnaderna. På samma villkor har äfven en af Docenten AXEL HAMBERG gjord mindre samling från Lappland förvärfvats, hvarjenste viktiga samlingar från Mexico och Central-Asien kunnat inköpas, den förra från forskningsresanden C. V. HARTMAN, den senare från Missionären BÄCKLUND.

Bland gåfvor må i främsta rummet nämnas en af norske forskningsresanden CARL LUMHOLTZ skänkt samling af 35 föremål från Queensland, en synnerligen intressant samling af 49 föremål i terracotta, funna i ruinstäder i närheten af Khotan och skänkta af Missionären L. E. HÖGBERG, samt en samling af 11 föremål

från Asien, skänkta af ingenjören vid Motala verkstad C. H. SUNDEWALL; vidare hafva skänkts af framlidne Professorn Friherre A. E. NORDENSKIÖLD, 2 gipsafgjutningar från Mexico, af f. d. Kapten JOHN M. LEWIN i Paris en sällsynt och dyrbar krigstrofé från Jivaros-indianerna i Ecuador, bestående af ett till knytnäfastorlek hoptorkadt menniskohufvud, af Amanuensen F. R. MARTIN 7 keramiska föremål från Japan, samt dessutom enstaka föremål från olika trakter: af Frih. ERLAND NORDENSKIÖLD (från Eldslandet), Fru CAROLINE ROTH, f. v. KNORRING (Kina), Kapten GUSTAF GRILL (Afrika), Läroverksadjunkten K. O. E. STENSTRÖMS sterbhus (N. Guinea), Fru THERESE HÜTTLING (Afrika) och Grosshandlaren KNUT KNUTSON (Jujudrägt från Afrika). — Af Enkefriherrinnan ANNA NORDENSKIÖLD har afdelningen begåfvats med en större samling etnografiskt vigtiga scioptikonbilder, dels från sonens, framl. Kand. G. NORDENSKIÖLDs undersökningar i Colorado, dels från Frih. A. E. NORDENSKIÖLDs forskningar på Grönland.

Till afdelningens boksamling hafva såsom gåfvor öfverlemnats: af Amiral H. I. SUNDEWALLS arfvingar (genom ingenjör C. H. SUNDEWALL) det dyrbara praktverket: *Die preussische Expedition nach Ost-Asien (1860—61)*, och af Kanslisekreteraren S. NORDSTRÖM ett fullständigt exemplar af Sparrmans resa.

Sammanräknar man hela tillökningen af de etnografiska samlingarne under den tid af $2\frac{1}{4}$ år, som de utgjort en egen afdelning af Naturhistoriska Riksmuseet, så befinnes att materialet, som vid utgången af år 1899 uppgick till 17,929 nummer, under sagda tid ökats med 10,542 nummer, af hvilka 8,475 tillkommit genom gåfvor. En så betydlig tillväxt har också kraft en motsvarande tillökning i lokalen och hafva i Museets afdelning I med Nådigt tillstånd af Kongl. Maj:t, dels en förut såsom målareverkstad använd lokal efter grundlig reparation omdanats till en rymlig utställningssal för den polynesiska afdelningen, dels genom förvärfvandet af fem mindre rum tillfälle beredts till ett bättre förvarande af den tyvärr magasinerade afrikanska afdelningen. Genom förvärfvandet af dessa lokaler har

också i någon mån den eldfara kunnat minskas, som främmande personers innehafvande af bostäder och arbetslokal i omedelbaraste grannskap till samlingarne måst medföra.

Arbetet vid afdelningen har omfattat dels ett fortsatt systematiskt uppställande af hufvudsakligen de amerikanska samlingarne, dels katalogisering af de nyinkomna samlingarne och omsignering af de äldre.

Vid Museet har, på bekostnad af Ingeniör ÅKE SJÖGREN, Herr C. V. HARTMAN under hela året varit sysselsatt med bearbetandet af de af honom likaledes på Hr SJÖGRENS bekostnad gjorda och till Museet förärade arkeologiska och etnografiska samlingarne från Central-Amerika, och har Hr HARTMAN för sina under förra året utgifna arbeten: *Arkeologiska undersökningar på Costa Ricas ostkust* och *Etnografiska undersökningar öfver aztekerna i Salvador* af Kongl. Vitterhets- Historie- och Antiquitets-Akademien tillerkänts det Loubatska priset. Att sjelfva det dyrbart utstyrda, af Ingeniör SJÖGREN helt och hållet bekostade hufvudarbetet, *Archæological Researches in Costa Rica*, hvars första del utkom i slutet af förra året, på titelbladet fått betecknas såsom en från Museet utgången publikation, kan ej annat än höja museets anseende och är ett nytt bevis på Hr SJÖGRENS varma intresse för dess utveckling.

Vid Museets afdelning II, Asien, som med undantag af December och halfva November hela året hållits öppen för allmänheten och med stigande intresse besökts, har föreståndaren å förelisningstiderna genom föredrag för Pedagogiska Lärarekursen, klasser från Elementarläroverken, Folkskolorna, privata flickskolor och Tekniska skolan samt för öfriga besökande sökt göra Museets innehåll så gagnande som möjligt. — Afdelningen I (Australien, Amerika och Afrika) hvars uppställning blifvit fördröjd genom de ändringar i uppställningsplanen, som förvärfvandet af de nya, först i December tillträdde lokalerna måst medföra, blifver under våren för allmänheten tillgänglig efter att hafva undergått en fullständig omsystematisering i enlighet med den etnografiska vetenskapens fordringar.

Den Meteorologiska Centralanstalten.

Anstaltens verksamhet har under året fortgått oförändrad efter samma utvidgade plan som tog sin början med år 1894.

De dagligen året om inkommande morgontelegrammen innehålla afton- och morgonobservationer öfver väderleken vid 14 inländska och 47 utländska stationer. Med stöd af dessa telegram konstrueras dagligen tvenne synoptiska kartor, af hvilka morgonkartan offentligens anslås å 4 ställen i hufvudstaden och i förminskad skala återgifves i 5 här utkommande dagliga tidningar. Det viktigaste af de i morgontelegrammen upptagna iakttagelserna meddelas åt 9 dagliga tidningar i hufvudstaden i en tabell åtföljd af en sammanfattning af väderlekstillståndet samt väderleksutsigter för det närmast följande dygnet, hvarjemte nämnda sammanfattning med hänvisning, der så ske kan, till det af Professor HILDEBRANDESSON utgifna kartbladet »Typer för synoptiska väderlekskartor» tillika med utsigter på telegrafisk väg öfversändes till 11 kommuner i riket (deraf 6 året om och 5 endast under sommarmånaderna), hvilka till Kongl. Telegrafverket erlægga de härför stadgade afgifter. En mera kortfattad sammanfattning af väderlekstillståndet jemte utsigter öfversändes också till Kongl. Styrelsen för Statens jernvägstrafik, som på egen bekostnad låter anslå densamma å alla större jernvägsstationer. Denna anordning har äfven blifvit vidtagen på flera privata banlinier, af hvilka de flesta erhålla sina uppgifter från närmaste statsstation. Sistnämnda kortfattade sammanfattning meddelas äfven Svenska Telegrambyrån i Stockholm, hvilken ytterligare sprider densamma till sina kunder.

I öfverensstämmelse med hvad som egde rum under föregående år anordnades äfven under juli—september månader vid Anstalten en särskild väderlekstjenst till jordbrukets gagn. För detta ändamål erhöll anstalten under denna tid morgontelegram, innehållande afton- och morgonobservationer från ytterligare 6 inländska och 1 utländsk station, samt eftermiddagstelegram från

17 inländska och 18 utländska stationer. Med stöd af dessa telegram dels kompletterades de ofvannämnda synoptiska kartorna, dels upprättades en särskild karta öfver eftermiddagens väderlek, i enlighet med hvilken kl. 6 e. m. utfärdades särskildt för jordbruket afsedda väderleksutsigter beträffande nederbörd och nattfrost under påföljande dygn. Dessa eftermiddagsuppgifter anslogos i likhet med morgonuppgifterna å 4 offentliga platser i hufvudstaden samt meddelades i tvenne här utkommande dagliga morgontidningar och sändes genom Kongl. Telegrafstyrelsens försorg till flera af dess ofvannämnda abonnenter samt delgafs Kongl. Jernvägsstyrelsen.

De till anstalten ankommande morgontelegrammen hafva fortfarande och till samma utsträckning som förut publicerats i »Bulletin du Nord», en tidskrift som bekostas af de trenne Skandinaviska Anstalterna gemensamt.

Statens meteorologiska stationer äro för närvarande 34 till antalet. Derförutom anställas å flera privatstationer observationer öfver nederbörd och temperatur, delvis äfven lufttrycket m. m. med egna eller från Anstalten till länns bekomna instrument. Fullständiga observationsserier hafva inlemnats af Läroverksrektoren P. R. BILLMANSON i Nora, från Ronneby Helso-brunn, Gysinge Bruk och Ulricehamns Sanatorium samt från Landtbruksakademiens Experimentalfält vid Stockholm, vidare från två stationer i Hallands och en i Upsala län, de trenne sistnämnda inrättade och underhållna på de respektive Hushållningssällskapens bekostnad.

Det system af s. k. 3:dje klassens stationer för iakttagelser hufvudsakligen öfver nederbörden och delvis öfver lufttemperaturen, som 1878 anordnades med de K. Hushållningssällskapens medverkan, är ännu i fortsatt verksamhet. Om till hithörande stationer läggas Statens meteorologiska stationer, så väl de hvilka sortera under Meteorologiska Centralanstalten som under Kongl. Nautisk-meteorologiska Byrån samt de privata stationerna, vid hvilka alla nederbörden observeras efter en och samma plan, blir antalet af nederbördsstationer i riket inalles 447, så-

ledes 2 flera än under föregående året. Dessa nederbördsstationer fördela sig på de särskilda länen sålunda:

Norrbottnens län	13	Skaraborgs län	28
Vesterbottens »	18	Elfsborgs »	38
Jemtlands »	8	Göteborgs och Bohus » . .	20
Vesternorrlands »	28	Hallands »	12
Gefleborgs »	17	Jönköpings »	13
Kopparbergs »	17	Kronobergs »	8
Vermlands »	20	Kalmar »	23
Örebro »	27	Kristianstads »	20
Vestmanlands »	15	Malmöhus »	21
Uppsala »	18	Blekinge »	8
Stockholms »	30	Gotlands »	15
Södermanlands »	14		
Östergötlands »	16		
		Summa	447

Alla dessa stationer insända sina iakttagelser vid hvarje månads utgång. Desamma publiceras i en månatlig tidning med titel »Månadsöfversigt af väderleken i Sverige», hvilken tidning redigeras af Amanuensen Dr H. E. HAMBERG under Anstaltens inseende och uppehålls hufvudsakligen genom prenumeration af de Kongl. Hushållningssällskapen. Af denna tidning hafva 21 årgångar hittills utkommit, 1881—1901.

Det system af iakttagelser öfver isförhållanden, åskväder och fenologiska företeelser, som år 1881 öfverflyttades från Uppsala Meteorologiska Observatorium till Meteorologiska Centralanstalten, har fortgått efter oförändrad plan, och hafva till Anstalten inkommit journaler från 65 observatörer öfver isläggning och islossning, från 61 öfver iakttagna åskväder och från 83 öfver periodiska företeelser inom växt- och djurriket.

Synoptiska tabeller hafva upprättats för hvarje dag af året 1900, upptagande nederbördens art och mängd, åskväder, dimma, dagg, rimfrost, luftens genomskinlighet, solrök, norrsken m. m I dessa tabeller ingå samtliga stationer.

Under året besöktes och inspekterades af Dr HAMBERG följande stationer: Lund, Kristianstad, Linköping, Nyköping, Bjuråker, Gysinge, Sveg, Karlstad, Örebro, Vestervik, Venersborg och Halmstad.

Anstalten har slutligen meddelat en mängd upplysningar åt såväl in- som utländska myndigheter och enskilda personer.

Stipendier och belöningar.

Räntebeloppen å de donationer, som Akademien förvaltar, hafva i öfverensstämmelse med donationsbrefven blifvit på följande sätt utdelade:

Det *Letterstedtska* resestipendiet har af Lunds universitet, som denna gång varit i tur att bortgifva detsamma, tilldelats docenten L. U. A. WEIBULL, som enligt för honom utfärdad instruktion skall företaga arkivforskningar rörande Sveriges medeltid och reformationstid i Östersjöprovinsernas samt flere af Tysklands, Hollands och Belgiens för den nordiska historien viktiga arkiv. — Det *Letterstedtska* priset för utmärkt *originalarbete* eller viktig upptäckt har tilldelats professor EDVARD JOHAN GERHARD HOLM för hans arbete: »Kinnekulle, dess geologi och den tekniska användningen af dess bergarter». — Det *Letterstedtska* priset för förtjänstfull *öfversättning* har Akademien deremot fördelat i två lika delar, af hvilka den ena tillerkänts öfverbibliotekarien grefve CARL SNOILSKY så väl för hans under det förflutna året offentliggjorda öfversättning af Göthe's »Visor och dikter» som äfven med hänsyn till hans föregående öfversättningar af Göthe, och den andra tilldelats bankofullmäktigen lektor RAGNAR TÖRNEBLADH för hans öfversättning af LONGFELLOWS »Evangeline». — De *Letterstedtska* räntemedlen för särskilda, maktpåliggande, vetenskapliga *undersökningar* hafva ställts till den zoologiska stationens vid Kristineberg förfogande för att sätta densamma i tillfälle att förhyra ångbåt vid anställandet af undersökningar med trawl i Bohuslän. — *Letterstedtska slägstipendiet* har såsom under närmast föregående år

med 2,000 kronor utgått till donators dotterson YVES GABRIEL LETTERSTEDT DE MONTMORT. — Dessutom hafva föreskrifna delar af årsräntan öfverlämnats till domkapitlet i Linköping, till pastorsämbetet i Vallerstads församling samt till Serafimerlasarettet i Stockholm.

Letterstedtska föreningens fonder, som förvaltas af Akademien, hafva under året lämnat en disponibel ränta af 16,162 kronor 98 öre, som blifvit öfverlämnad till föreningens styrelse.

Den *Wallmarkska* belöningen har blifvit fördelad i två lika stora delar, af hvilka den ena tillerkänts observatorn vid Upsala observatorium doktor ÖSTEN BERGSTRAND för hans under åren 1896—1900 utgifna astrofotografiska arbeten samt den andra e. o. professorn vid Upsala universitet doktor ALVAR GULLSTRAND för hans arbete: »Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie».

Årsräntan å *Edlundska* fonden, har fördelats mellan lektor H. PETRINI i Vexjö och lektor SVEN FORSLING i Nyköping, åt den förre såsom belöning för hans arbeten i potentialteori och åt den senare såsom understöd för fortsatta undersökningar öfver gadolinitjorden.

Den *Fernerska* belöningen har tilldelats docenten vid Upsala universitet ERIK HOLMGREN för två i Akademiens »Öfversigt» intagna afhandlingar med titel: »Ueber Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen» och »Sur une classe d'équations aux dérivées partielles de second ordre et sur la généralisation de problème de Dirichlet».

Den *Lindbomska* belöningen för nya och viktiga upptäckter uti de kemiska eller fysiska vetenskaperna har Akademien tillerkännt amanuensen vid Stockholms Högskola doktor ASTRID CLEVE för hennes i öfversigten af Akademiens förhandlingar införda afhandling: »Bidrag till kännedomen om ytterbium».

Den *Flormanska* belöningen för tryckt afhandling öfver fysiologiskt eller anatomiskt ämne har tilldelats docenten i zoologi vid Upsala universitet LEONARD JÄGERSKIÖLD för hans i Akade-

miens Handlingar intagna afhandling: »Weitere Beiträge zur Kenntniss der Nematoden».

Det *Berzeliska* stipendiet har för en tid af tre år, räknadt från den 1 januari 1902, tilldelats docenten i kemi vid Upsala universitet DANIEL STRÖMHOLM.

På grund af ansökan från Nordiska Museets styrelse har Akademien beslutat, att årsräntan å den *Grillska* donationen för en zoologisk trädgård vid vår hufvudstad, för närvarande uppgående till en summa af 2,037 kronor 36 öre, tills vidare under vissa villkor skall öfverlämnas till nämnda styrelse för att användas till underhåll och förkofran af Skansens djurbestånd.

Det *Beskowska* stipendiet, som denna gång skolat bortgifvas för idkande af biologiska studier, har Akademien tilldelat docenten vid Stockholms högskola doktor GUNNAR ANDERSSON för att i Riksmuseum göra de studier, som äro behöfliga för utarbetande af Skandinaviens flora i det af professorerna A. ENGLER och O. DRUDE i Dresden redigerade stora arbetet: »Die Vegetation der Erde».

Af räntan å Vegafonden har jämlikt donationsbrevfets bestämmelser ett belopp af 1,868 kronor 69 öre öfverlämnats till Svenska sällskapet för antropologi och geografi.

Från *Regnells zoologiska* gåfvomedel hafva såsom understöd blifvit anvisade:

åt doktor YNGVE SJÖSTEDT 600 kronor för att å Riksmuseets entomologiska afdelning bearbeta de af honom från Kamerun hemförda orthoptera;

åt docenten O. CARLGREN 600 kronor för att i riksmuseum fortsätta sina studier öfver anthozoerna;

åt doktor GÖSTA GRÖNBERG 500 kronor för fortsatta undersökningar angående de orsaker, som bestämma afkommans kön.

Scheelefondens ränta har denna gång jämlikt donationsbrevet blifvit lagd till kapitalet.

Enär vid ansökningstidens utgång ingen sökande anmält sig till J. A. WAHLBERGS resestipendium, som Akademien denna

gång egt att bortgifva, har den å stipendiefonden upplupna rāntan blifvit lagd till kapitalet.

Den *Hahnska* donationens ränta har Akademien fördelat sålunda:

åt docenten vid Upsala universitet C. WIMAN 300 kronor för undersökning af Bottenhafvets silurområde;

åt licentiaten GABRIEL ANDERSSON 500 kronor för studier öfver de yttre könsorganens embryonala utveckling hos däggdjuren;

åt med. kandidaten P. BERGMAN 150 kronor för anställande af undersökningar öfver toxinbildningar i och toxinutsöndringar ur däggdjursorganismen.

För utförande af resor inom landet i ändamål att undersöka dess naturförhållanden har Akademien anvisat understöd åt 7 yngre naturforskare till ett sammanlagdt belopp af 1,300 kronor.

Statsanslaget för instrumentmakeriernas uppmuntrande har blifvit lika fördeladt mellan instrumentmakarne P. M. SÖRENSEN och G. SÖRENSEN.

Af statsanslaget för bearbetning af Riksmuseets samlingar hafva arvoden utbetalats till fyra yngre forskare, hvarjämte däraf bekostats tafforna till deras och andras afhandlingar öfver museets samlingar.

Till Kamreraren CARL HENRIK BRANDEL har Akademien öfverlämnat ett exemplar i guld af sin medalj öfver LINNÉ såsom ett erkännande för hans långvariga och oegennyttiga arbete vid Riksmuseets botaniska afdelningar.

Åt Akademiens vaktmästare A. SKÄRLÉN, som under 30 år med stor pligttröhet fullgjort sina åligganden i Akademiens tjänst, har Patriotiska sällskapet på framställning af Akademien tillerkänt sin medalj i guld.

Den minnespenning, som Akademien till sin högtidsdag låtit prägla, är egnad åt minnet af hennes framlidne ledamot f. d. statsrådet FREDRIK FERDINAND CARLSON.

Akademiens ledamöter.

Genom döden har Akademien bland sina inländska ledamöter förlorat: intendenten vid riksmuseets palæontologiska afdelning GUSTAF LINDSTRÖM; Nordiska museets föreståndare, doktor ARTUR HAZELIUS; intendenten för riksmuseets mineralogiska afdelning, professor frih. ADOLF ERIK NORDENSKIÖLD; presidenten i K. Kammarkollegium HANS LUDVIG FORSSELL; professorn TORD TEODOR TAMERLAN THORELL; professorn AXEL KEY; professorn NILS PETER HAMBERG; professorn JOHAN ROBERT TOBIAS LANG och professorn RAGNAR MAGNUS BRUZELIUS samt bland sina utländska ledamöter: professorn i zoologi vid universitetet i Paris HENRI DE LACAZE DUTHIERS; professorn vid universitetet i Würzburg ADOLF FICK; professorn vid Johns Hopkins universitetet i Baltimore HENRY A. ROWLAND samt geheimkonferensrådet CARL FREDRIK TIETGEN.

Genom inval har Akademien dereinot med sig förenat: såsom inländska ledamöter: universitetskansleren, f. d. statsrådet GUSTAF FREDRIK GILLJAM; professorn vid Karolinska Med. Kirurgiska institutet JOHN VILHELM BERG; läraren vid Stockholms högskola, doktor LARS EDVARD PHRAGMÉN; professorn och föreståndaren för Landtbruksakademiens växtfysiologiska anstalt JAKOB ERIKSSON; rektorn vid Stockholms högskola, doktor SVANTE AUGUST ARRHENIUS; f. d. professorn i praktisk filosofi vid Upsala universitet CARL YNGVE SAHLIN; professorn och intendenten vid Riksmuseum EDVARD JOHAN GERHARD HOLM; öfverståthållaren, frih. CLAS GUSTAF ADOLF TAMM; läraren vid Stockholms högskola, frih. GERHARD JAKOB DE GEER; professorn i zoologi vid Upsala universitet AXEL WIRÉN; och professorn i oftalmiatrik vid Karolinska Med. Kirurgiska institutet ERIK JOHAN WIDMARK samt såsom utländska ledamöter: professorn i högre geometri vid universitetet i Paris GASTON DARBOUX; professorn i högre matematik vid universitetet i Rom LUIGI CREMONA;

v. direktören för Pasteur-institutet i Paris **PIERRE PAUL EMILE ROUX**; Lord **AVEBURY**; professorn i fysiologi vid universitetet i Heidelberg **ALBRECHT KOSSEL**; sekreteraren för Smithsonian institution i Washington **SAMUEL PIERPONT LANGLEY** samt f. d. finske senatoren **LEOPOLD HENRIK STANISLAUS MECHLIN**.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademien's Bibliotek.

(Forts. från sid. 124.)

Kjöbenhavn. *Naturhistorisk Forening.*

Videnskabelige Meddelelser. Aar 1901. 8:o.

Krakau. *Académie des sciences.*

Bulletin international. Cl. des sc. math. et nat. 1901: Nr 9; 1902: 1. 8:o.

Kristiania. *Det norske meteorologiske Institut.*

Oversigt over Luftens Temperatur og Nedbøren i Norge. Aar 1898. 8:o.

Liège. *Société géologique de Belgique.*

Annales. T. 28 (1901): Livr. 4; 29 (1902): 1. 8:o.

London. *Geologists' association.*

List of members. 1902/2. 8:o.

— *Meteorological office.*

Monthly pilot charts of the North Atlantic and Mediterranean. 1902: Sheet 13. Fol.

— *Nautical almanac office.*

Nautical almanac. 1905. 8:o.

— *Royal Astronomical society.*

Monthly notices. Vol. 62 (1901/02): No 4. 8:o.

— *Chemical society.*

Journal. Vols. 81—82 (1902): 4. 8:o.

Proceedings. Vol. 18 (1902): No 249. 8:o.

— *Entomological society.*

Transactions. Year 1901. 8:o.

— *Royal society.*

Proceedings. Vol. 69 (1901/02): No 456—457. 8:o.

London, Ontario. *Entomological society.*

The Canadian entomologist. Vol. 34 (1902): No 3. 8:o.

Manchester. *Literary and philosophical society.*

Memoirs and proceedings. Vol. 46 (1901/02): P. 3—4. 8:o.

— *Geological society.*

Transactions. Vol. 27 (1900/1901): P. 8—9. 8:o.

Manila. *Observatorio de la compañía de Jesús,*

Boletín mensual. Año 1900: 3—4. Fol.

Mexico. *Secretaría de comunicaciones y obras publicas.*

Carta de la temperatura media mensual. 1899: 7—9. Fol.

Modena. *R. Osservatorio del collegio Romano.*

Memorie. (3) Vol. 2. 1899. 4:o.

Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*

Rendiconto. (3) Vol. 8 (1902): Fasc. 2. 8:o.

— *R. Istituto d'incoraggiamento.*

Atti. (5) Vol. 1—2. 1900—1901. 4:o.

Ottawa. *Geological survey of Canada.*

Annual report. Vol. 10 (1897) & Maps. 8:o.

Palermo. *Circolo matematico.*

Rendiconti. T. 16 (1902): Fasc. 1—2. 8:o.

Paris. *Société astronomique de France.*

Bulletin. 1902: 4. 8:o.

— *Société de géographie.*

La Géographie. Année 1902: N:o 3. 8:o.

Perth. *Observatory.*

COOKE, E., The climate of Western Australia. 1876—1899. Fol.

Pittsburgh. *Carnegie museum.*

Publications. N:o 8—12. 1900—1901 8:o & 4:o.

Pola. *Hydrographisches Amt der k. u. k. Kriegs-Marine.*

Meteorologische Termin-Beobachtungen. 1902: 1—2. tv. Fol.

Puebla. *Observatorio meteorologico del colegio catolico del sagrado corazon de Jesus.*

T. 1 (1902): Num. 2. Fol.

Pulkowa. *K. Nicolai-Hauptsternwarte.*

Jahresbericht üb. die Thätigkeit. 1900/1901. 8:o.

Roma. *Reale accademia dei Lincei.*

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Rendiconti. (5) Vol. 11 (1902): Sem. 1: Fasc. 5. 8:o.

Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

Rendiconti. (5) Vol. 10: Fasc. 11—12. 1901. 8:o.

Roma. *R. Osservatorio del collegio Romano.*

Memorie. (3) Vol. 1. 1901. 4:o.

Saltillo. *Observatorio meteorologico del colegio de San Juan Nepomuceno.*

Boletin mensual. T. 3 (1899): Num. 1—2; 4 (1900): 1. Fol.

St Pétersbourg. *Institut impérial de médecine expérimentale.*

Archives. T. 9: N:o 1. 1902. 4:o.

San Francisco. *Astronomical society of the Pacific.*

Publications. Vol. 14 (1902): N. 82. 8:o.

San José. *Instituto fisico-geografico de Costa Rica.*

Boletin. Año 1 (1901): Núm. 12—13. 8:o.

Strassburg. *K. Hauptstation für Erdbebenforschung.*

Monatsbericht. 1901: 8, 10—11. 8:o.

Sydney. *Department of mines and agriculture. Geol. survey branch.*

Mineral resources. N:o 9. 1901. 8:o.

Torino. *R. Accademia delle scienze.*

Atti. Vol. 37 (1901/02): Disp. 1—5. 8:o.

— *R. Osservatorio astronomico.*

Osservazioni meteorologiche. Anno 1901. 8:o.

Washington. *Academy of sciences.*

Proceedings. Vol. 4: pp. 1—116. 1902. 8:o.

— *Bureau of american ethnology.*

Annual report. 18 (1896/97): P. 2. 8:o.

— *U. S. Department of agriculture.*

Crop reporter. Vol. 3 (1901/02): 9—10. 4:o.

Report. No. 71. 1902. 8:o.

Washington. U. S. Department of agriculture.

Office of experiment stations. Bulletin. No. 107. 1901. 8:o.

— Experiment station record. Vol. 13: No. 4—6. 1901—1902. 8:o.

Farmers' bulletin. No. 136; 143—146. 1902. 8:o.

Division of botany. Contributions from the U. S. National Herbarium.
Vol. 7: No. 3. 1902. 8:o.

Bureau of chemistry. Circular. No. 9. 1902. 8:o.

Division of entomology. Bulletin. N. S. No. 31. 1902. 8:o.

Bureau of forestry. Circular. No. 23. 1902. 8:o.

Library. Bulletin. No. 37, 39. 1901. 8:o.

Bureau of plant industry. Bulletin. No. 4, 6, 8—11. 1901—1902. 8:o.

Division of pomology. Bulletin. No 9. 1901. 8:o.

Division of publications. Circular. No. 432, 436—437. 1901. 8:o.

Office of public road inquiries. Circular. No. 36. 1902. 8:o.

Bureau of soils. Circular. No. 9. 1902. 8:o.

Division of statistics. Bulletin. Miscellaneous series. No. 15 (revised).
1901. 8:o.

Wien. K. Akademie der Wissenschaften.

Tabulæ codicum manuscriptorum ... in Bibliotheca Palatina Vindob.
asservatorum. Vol. 10. 1899. 8:o.

— K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.

Abhandlungen. Bd 1: H. 3. 1902. 8:o.

Verhandlungen. Bd. 52 (1902): H. 2. 8:o.

— K. K. Geologische Reichsanstalt.

Verhandlungen. 1902: No 1—2. 8:o.

Xalapa. Observatorio central del estado de Veracruz Llave.

Boletin mensual. 1898: 3—4; 1899: 1; 1900: 1. 4:o.

Af Madame Veuve Godin, Guise.

Le Devoir. T. 26 (1902): 3. 8:o.

Af öfverkontrollör Borén.

PANCOVIUS, TH., Herbarium portatile oder behendes Kräuter- u. Gewächsbuch. Berlin 1654. 4:o.

TABERNÆMONTANUS, J. TH., Neu vollkommen Kräuterbuch .. 1—2.
Francofurti 1590—91. Fol.

Af utgifvaren:

RETZIUS, A., Skrifter i skilda ämnen jämte några bref, samlade och utgifna af GUSTAF RETZIUS. Sthlm 1902. 8:o.

Af författarne:

CARLGREN, O., Jahresber. f. 1889—1891 üb. die Anthozoe .

— Die Actiniari. Oldenburg 1902. 4:o.

EKHOLM, N., Meteorolog. conditions of the pleistocene epoch. London 1902. 8:o.

SANTESSON, C. G., Axel Key. Stockholm 1902. 8:o.

ALBERTI, V., Su la determinazione de'radianti. Napoli 1901. 8:o.

VAN DE SANDE BAKHUYZEN, E. F., La déclinaison de la polaire d'après les observations faites à Königsberg de 1820 à 1840. Harlem 1901. 8:o.

Af författarne:

DEMTSCHINSKY, N. A., Die Möglichkeit der Wettervorhersage. S:t Petersb. 1902. 8:o.

GROOM, T., Cambrian and associated beds of the Malvern Hills. London 1902. 8:o.

— 2 st. småskrifter.

KOELLIKER, A., Weitere Beobachtungen über die Hofmann'schen Kerne am Mark der Vögel. Jena 1902. 8:o.

RAJNA, S. C. M., Sull' escursione diurna della declinazione magnetica a Milano. Milano 1902. 8:o.

RIEFLER, S., Das Nickelstahl-Compensations-pendel D.R.P.No 100870. München 1902. 8:o.

SANDERS, C., Contribution to the determination of geographical positions on the West coast of Africa. Amsterdam 1901. 8:o.



Utgifningsdag 13 maj 1902.

Stockholm 1902. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 59.

1902.

Nº 5.

Onsdagen den 14 Maj.

INNEHÅLL:

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 167.
LÖNNBERG, EINAR, Några smärre iakttagelser rörande faunan i Bohuslän i mars månad 1902	» 169.
THALÉN, ROBERT, Magnetiska mätningar å jernmalmfälten	» 175.
ERIKSSON, JAKOB, Ist der Timotheengrasrost eine selbständige Rostart oder nicht?	» 189.
Skänker till Berzeliusmuséet och Akademiens bibliotek	sidd. 168, 199.

Tillkännagafs, att Akademiens utländske ledamot af fjärde klassen professorn vid École polytechnique i Paris ALFRED CORNU med döden afgått.

Föreståndaren för Riksmuseets etnografiska samlingar Dr. HJALMAR STOLPE hade på Akademiens förslag af K. Maj:t blifvit utsedd, att såsom Sveriges ombud deltaga i den internationella amerikanistkongress, som i oktober månad 1902 kommer att hållas i New York, hvarjemte K. Maj:t beviljat Dr. STOLPE ett reseunderstöd af 2,500 kronor för att dels företaga nämnda resa, dels vid samma tillfälle idka studier i flere amerikanska museer.

Herr SMITT lämnade en redogörelse för de subfossila ben af puckelhvalen (*Megaptera longimana*), som nyligen blifvit funna i Uddevallatrakten.

Herr ERIKSSON höll föredrag om timotejrosten och dess förmåga att öfvergå till andra gräs samt dess förhållande till svartrostraserna å sädesslagen.

Herr HASSELBERG redogjorde för sina nyligen afslutade undersökningar om molybdens spektrum.

Herr RETZIUS lämnade några upplysningar angående den internationella akademiska associationens verksamhet och förslag.

På grund af inbjudning från K. Universitetet i Kristiania beslöt Akademien att till sin representant vid den minnesfest, som nämnda universitet den 5—7 september kommer att fira med anledning deraf, att då 100 år förflutit sedan *Nils Henrik Abel* föddes, utse sin nuvarande præsens Herr THÉEL samt till hans suppleant Herr PHRAGMÉN.

Berättelse hade af docenten A. OHLIN afgifvits öfver de studier han med understöd från Akademien under sommaren 1901 idkat vid Kristinebergs zoologiska station.

Till inländske ledamöter af femte klassen kallade Akademien professorn i kemi vid Lunds universitet JOHAN MARTIN LOVÉN och professorn vid Jenner-institutet i London SVEN GUSTAF HEDIN samt till inländsk ledamot af sjunde klassen professorn vid Karolinska Mediko-kirurgiska institutet EDVARD VILHELM WELANDER.

På tillstyrkan af kommitterade antogos följande inlämnade afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter:

i Akademiens Handlingar: Untersuchungen über die Spectra der Metalle in electrischen Flammenbogen. 6. Spectrum des Molybdens af professor B. HASSELBERG;

i Bihaget till Handlingarne: 1:a) Archieracium-floran inom Dalarnes siluområde i Siljanstrakten af adjunkten K. JOHANSSON; 2:a) Preliminary account on the development af *Echinus miliaris* L. af professor HJ. THÉEL;

i Öfversigten: de i innehållsförteckningen upptagna tre afhandlingarne.

Följande skänker anmälades:

Till Berzelius-Museet.

Af konsthandlaren C. U. PALM: en vid Rörstrand i svart fajans gjord medaljong öfver Berzelius.

Till Akademiens Bibliotek.

Två bref från Berzelius till bergerådet J. J. MUNKTELL skänkta af brukspatron H. MUNKTELL.

Några smärre iakttagelser rörande faunan i Bohuslän i mars månad 1902.

Af Dr. EINAR LÖNNBERG.

[Meddeladt den 14 maj 1902 af HJALMAR THÉEL.]

Då undertecknad under mars månad innevarande år åtnjöt förmånen af att få vistas vid Vetenskapsakademiens zoologiska station Kristineberg, yppade sig tillfälle för mig att vid sidan af det särskilda arbete, för hvars fullföljande jag företagit resan, göra några iakttagelser öfver faunans sammansättning m. m. Ehuru dessa äro helt anspråkslösa, kunna de dock från den synpunkten, att de lemna några nya bidrag till vår fauna, tillerkännas ett visst intresse.

Ett särdeles utmärkande drag för den marina faunan kring Kristineberg i mars månad var den rikliga förekomsten af opisthobranchiater särskildt nudibranchiater. En förteckning af de af mig iakttagna arterna meddelas härmed.

Tritonia hombergi Cuv. vid Flatholmen, omkring 20 fr. skalbotten, ett halfvuxet exemplar.

Dendronotus arborescens (MÜLL.) ytterst allmän öfverallt på algbotten från *Fucus*-regionen och nedåt, äfven på *Zostera*-botten. Inga fullt utvuxna exemplar erhöles, men talrika halfvuxna och t. o. m. ungar af blott några millimeters längd. Äfven tvenne albinosexemplar af denna art erhöles utanför Blåbergsholmen på alger. Dessa voro alldeles utan pigment och genomskinliga, så att inelfvorna lyste igenom. Denna art visade

sig också mycket talrik i unga exemplar under mitt förra vinterbesök i november—december. Under sommarmånaderna är den ej så talrik. Man kan häraf sluta att arten skall vara i sin bästa utveckling under vårmånaderna.

Hero formosa LOVÉN. Af denna vackra, men utan tvivel vid vår kust ganska sällsynta nudibranchiat lyckades jag erhålla tvenne exemplar. Båda anträffades vid Flatholmen. Det ena fanns krypande på rör af *Tubularia indivisa* öfvervuxna med *Perigonimus* i full utveckling och hvilka senare utan tvivel utgjorde *Hero's* byte. Då denna art enligt LOVÉN's beskrifning blir ända till tumslång, voro de af mig funna individen ännu ej fullvuxna.

Polycera quadrilineata MÜLL. mycket allmän på grundt vatten bland alger och *Zostera*, men nästan uteslutande i unga eller halfvuxna exemplar. Det gäller alltså detsamma om denna som om *Dendronotus*.

Polycera lessoni D'ORB. (= *Polycera modesta* LOVÉN). Af denna säkerligen vid vår kust mycket sällsynta art erhöles ett exemplar vid Flatholmen på omkring 10 famnars djup.

Triopa clavigera (MÜLL.) ej allmän denna årstid ibland alger.

Doris tuberculata CUV. erhöil jag ej denna gång, men väl i november—december 1888.

Doris obvelata MÜLL. (= *D. repanda* ALD. & HANC.) erhöils såväl nu i mars som i november—december 1888.

Doris muricata MÜLL. (= *D. aspera* ALD. & HANC.). Allmän både på alger och på skalbotten.

Doris proxima ALDER & HANCOCK. Såväl i mars 1902, som i november—december 1888 erhöil jag exemplar af denna art, som ej finnes upptagen i LOVÉN's »*Index Molluscorum*». Då den emellertid är känd från Kielerbugten, Englands och Norges kuster var det ju antagligt, att den skulle träffas äfven i Bohuslän.

Doris bilamellata L. Ehuru denna art namngifvits af LINNÉ och finnes utbredd från Engelska kanalen, de britiska

örne, längs norska kusten och upp till Island och Grönland, var den ej känd af LOVÉN och torde först härmed blifva anmäld såsom tillhörande den svenska faunan. Jag träffade den ganska talrik på skalbotten vid Smedjebotten utanför Kristineberg. Dess karakteristiska brunfäckighet, de talrika i tvärställd oval anordnade gälarna m. fl. egenskaper gör den till en af de lättast igenkända *Doris*-arterna.

Acanthodoris pilosa (ABILDG.). Denna art, som anses identisk både med den af LOVÉN i »*Index Molluscorum*» under namn af »*D. fusca*» uppförda och »*D. tomentosa*» hos samme auctor, uppträder i tvenne färgvarieteter. Af dessa erhöll jag den ena, nämligen den rödaktigt brunvioletta. Det är väl denna, som närmast skulle motsvara LOVÉN's »*fusca*» och af honom i diagnosen betecknas såsom »*rufofusca*». Denna art är förut af mig funnen i Öresund och torde alltså finnas längs hela vår westkust.

Æolidia papillosa L. fanns allmänt på algbotten äfven i stora utvuxna exemplar.

Æolidia drummondi THOMPSON. Af denna art, som är känd från Kielerbugten, Danmark, England och vestra Norge, erhöles ett exemplar vid häfning på grundt vatten, Zosterabotten och sand, i Kvarnviken norr om Fiskebäckskil. Den synes ej förut vara iakttagen i Sverige och är ej uppptagen i LOVÉN's »*Index Molluscorum*».

Æolidia rufibranchialis JOHNSTON fann jag redan vintern 1888 vara den allra allmännaste af alla nudibranchiater. Det samma besannade sig äfven nu. Man kunde knappt stryka ett tag med handhåf öfver *Fucus* utan att erhålla något exemplar. Äfven på *Zostera*, *Laminaria* etc. var den allmän.

Æolidia pellucida ALDER & HANCOCK. Af denna art, som troligen ej förut anträffats vid svensk kust, erhöil jag ett exemplar på skalbotten vid Smedjebotten. Den är lätt igenkänd från föregående genom ryggpapillernas högre röda färg, tentaklernas och ryggpapillernas längd, de främre fotflikarnes längd och den baktill jemförelsevis trubbiga foten förutom andra ka-

rakterer. Arten är förut känd från England, Shetlandsöarne och vestra Norge.

Æolidia exigua ALDER & HANCOCK. Denna art var allmän isynnerhet på grundt vatten på båda sidor om Blåbergsholmen såväl på alg-, som på *Zostera*-botten. Jag erhöll den i alla åldrar och iakttog äfvenledes de betydande afvikelserna mellan äldre och yngre individ bl. a. visande sig i ryggbihangens olika antal (ibland i enkel rad eller parvis, ibland i knippen, det senare hos äldre) och olika grad af uppblåsthet, tentaklernas olika utseende o. s. v. Af dessa skäl anser jag mig kunna instämma med MEYER och MÖBIUS,¹⁾ då de med denna art identifiera LOVÉN's såväl *Tergipes lacinulatus* som *T. bullifer*.

Af skalbärande opisthobranchiata former observerades åtskilliga exemplar af *Aplysia punctata*, *Acera bullata*, *Philine aperta* o. s. v.

Af öfriga mollusker torde böra nämnas *Lamellaria perspicua*, af hvilken flera exemplar erhöles.

Hvad crustacefaunan angår väckte det uppmärksamhet, att de i alger om sommaren så vanliga små idotheorna (*I. tricuspidata*) alldeles saknades. Vid mitt föregående vinterbesök i Bohuslän i november—december 1888 fann jag *Amathilla homari* mycket allmän, nu i mars månad var den ej heller sällsynt, men uteslutande honor med långt utvecklade embryoner påträffades, hvilket visar, att denna amphipod når sin fulla utveckling vid vår vestkust vid midvinterstid. Af högre crustaceer befunnos *Pandalus annulicornis* och flera pagurider äggbärande. Vid häfning på grundt vatten 1—3 famnar erhöles i riklig mängd *Hippolyte cranchi* i alla möjliga färger, *Mysis flexuosa* och *inermis*, mindre talrik var den vanliga räkan och af *Crangon* torde flertalet ännu hållit sig dolda. *Stenorhynchus*, *Portunus* och *Athanas* erhöles i flera exemplar, men den vanliga krabban uppträdde ännu ej.

Hydroidfaunan kan på det hela taget sägas vara sparsamt representerad, om hänsyn blott tages till fullt utvecklade former.

¹⁾ Fauna der Kieler Bucht.

Bland sådana böra dock anföras några gymnoblaster, som synas vara mindre kända eller okända från Bohusläns kust. På *Ascophyllum nodosum* och *Fucus* i själfva vattenlinien växte ganska rikligt vid Långegap strax utanför Kristineberg en liten vacker *Coryne*, som snarast torde böra hänföras till arten *C. sarssi* (LOVÉN), enligt hvad Fröken KR. BONNEVIE, Kristiania, benäget meddelat, sedan hon jemfört erhållet profmaterial med i Kristiania zoologiska museum befintliga samlingar. Gonophorerna äro dock ej fullt utvecklade, hvarför bestämningen ej är alldeles ostridlig. Denna art, som upptäcktes af LOVÉN i Bohuslän vid Måseskär, återfanns ej af SEGERSTEDT under hans vistelse vid Kristineberg sommarne 1884 och 1885, hvarför jag ansåg lämpligt att omnämna den här. Den måtte vara mycket hårdig, ty jag såg den vid flera graders köld utan synbar olägenhet ligga helt eller delvis blottad, då vattenståndet var lågt. Ny för vår fauna synes *Perigonimus roseus* M. SARS vara. Den upptages ej i SEGERSTEDT's förteckning öfver de svenska hydroiderna.¹⁾ Jag erhöll denna lilla vackra hydroid i riklig mängd på rör af *Tubularia indivisa* uppdraggade vid Flatholmen på omkring 20 frs. vatten. Den är förut känd från Norges vestkust: »Bergen—Lofoten, 40—200 m.»²⁾

Hvad öfriga hydroidformer angår kunna följande iakttagelser anföras. Af *Tubularia indivisa* anträffades dels rör med unga nyss utslagna hydranther, dels sådana i hvilka hydrantherna ännu ej blifvit fullfärdiga utan lågo ett stycke innanför mynningen, hvarest de genast märktes på den genomskimrande röda färgen. Af *Tubularia larynx* fann jag på de vanliga lokalerna till synes blott tomma rör, men vid närmare undersökning visade sig, att polypstocken dragit sig tillbaka till rörens basala delar och där fortlefde. Liknande var äfven fallet med en del andra gymnoblaster samt calyptoblaster med spådt periderm. Vid granskning af t. ex. en polypkoloni af *Eudendrium annulatum*,

¹⁾ Bih. K. Sv. Vet. Akad. Handl., Bd. 14, Stockholm 1889.

²⁾ KR. BONNEVIE: Hydroida. Den Norske Nordh. Exped. 1876—78 XXVI, Christiania 1899.

som stod i full utveckling, visade det sig, att nya friska hydranthbärande skott med hyalint periderm utgingo helt plötsligt från gamla grenar med tjockt, brunt periderm. Detta synes ådagalägga, att den gamla kolonien så att säga inträdt i en ny blomstringsperiod efter ett mellanliggande hvilstadium. Jemför man härmed det faktum, som ofvan anfördes, att en del hydroidkolonier påträffades i ett sådant hvilstadium med de mindre grenarne resp. rören tomma och den lefvande substansen mer eller mindre tillbakadragen, så torde häraf den slutsatsen kunna dragas, att det gäller som en allmän regel om en hel del gymnoblaster samt calyptoblaster med tunnt periderm, att de öfvervintra på samma eller liknande sätt som *Cordylophora lacustris* enligt WESENBERG-LUND's¹⁾ och före honom SCHULZE's iakttagelser. Hos sådana calyptoplaster återigen, hvilka såsom t. ex. *Sertularella*, *Sertularia* och *Diphasia* ega ett mera fast och motståndskraftigt periderm, synas hydrantherna öfvervintra i de medelst locken slutna bägarne. Jag fann hos representanter af de tre nyssnämnda släktena såväl halffärdiga som fullt utbildade polyper sittande under de ännu alldeles slutna locken förutom de i grenspetsarne just utvuxna och under nybildning stadda och därför helt ljusa unga thecorna. En föryngring af hydroidkolonierna genom förnyelse af näringspolyperna har af flera författare iakttagits, och särskildt har LEVINSEN riktat kunskapen härom i hög grad.²⁾ En sammanställning af detta fenomen med öfvervintringen tror jag dock hittills ej skett, ehuru dock tydligen ett samband finnes, äfven om en föryngring också vid andra tillfällen eger rum.

¹⁾ Om Forekomsten af *Cordylophora lacustris* i Danske Ferskvande. Vidensk. Meddel. naturh. Foren., Kjöbenhavn 1895.

²⁾ Om Fornyselsen af Ernæringsindividerne hos Hydroiderne. Vidensk. Meddel. naturh. Foren., Kjöbenhavn 1892.

Magnetiska mätningar å jernmalmfälten.

Af ROBERT THALÉN.

(Meddeladt den 14 Maj 1902.)

1. Efterföljande regler, som till största delen redan torde vara bekanta, grunda sig på omfattande experiment. Men deras bekräftelse genom mätningar å jernmalmfälten har jag först nu lyckats vinna. Visserligen har jag tidigt påpekat nödvändigheten för observatörerna att publicera hvad genom deras mätningar kunde vinnas, men fastän min metod blifvit flitigt använd, har jag ej lyckats att i tryck finna en enda beskrifning af något enda numeriskt resultat. Under sådant förhållande återstår för mig intet annat, än att sjelf utföra mätningarne och publicera resultaten, hvilket härmed fullgöres.

Hvad jag med mitt arbete äsyftat var i främsta rummet att påvisa, hvarest läget för skaktet borde läggas, enär det vid användning af grufkompassen angifna stället, icke kunde anses vara pålitligt. Antages G och F beteckna malmmagnetismens vertikala och horizontela komposanter, V och H de motsvarande krafterna hos jordmagnetismen, samt P representera nålens öfvervigt åt sydändan, hvilken vikt är så afpassad, att nålen ställer sig horisontelt på ofyndig mark, så angifves nordpolens lutning δ hos grufkompassen mot horizontalplanet, då fråga är om meridianen genom formeln

$$\text{tang} = \frac{V + G - P^1)}{H - F}$$

¹⁾ Se (V), s. 5. För att i det följande lätt kunna citera mina härom utgifna skrifter skall jag beteckna min uppsats i K. Vet. Akadem:ö Öfversigt af

eller helt enkelt genom

$$\text{tang} = \frac{G}{H - F},$$

eftersom $V = P$.

Häraf inses, att I blir 90° för $H = F$, hvilket icke kan ega rum annat än norr eller söder om malmstockens sydpol, såsom lätt kan inses. Midt öfver malmens sydpol är $F = 0$. Mot norr och mot söder om polen växer F , och blir då någonstädes $= H$. Således blir $H = F$ norr och söder om malmens sydpol, men alldeles icke midt öfver polen.

2. Utom läget för skaktet har jag ock sökt undersöka, till hvilket *djup* malmmassans tyngdpunkt förefinnes, och är i det fallet 3 olika metoder angifna.

Det gruffält, som ansetts mig särdeles lämpligt att härvidlag närmare undersöka, har varit den s. k. Konstängsgrufvan vid *Dannemora*. Den är belägen ungefär s. om det stora malmfältet, det är ett fristående malmfält, som ej länge varit i bruk och således i flere afseenden synts mig fördelaktigt.

Neduti grufvan, hvarest värdefulla mätningar sannolikt skulle kunna anställas, har min framskridna ålder ej tillåtit mig göra några. Jag behandlar här endast de i dagytan anställda observationerna.

3. Mätningarne å gruffältet kunna utföras med ett horisontelt instrument af enklare konstruktion än det Lamontska, som har här tjenat till förebild. Det utgöres af ett horisontelt mahognybräde af rektangulär form, hvilande på tre kulformiga fötter, och har en kompassdosa af 8.5 cm. cirkel, graderadt i hela grader, med en dubbelnål af 38 mm. längd, i form af en parallelipiped. Mellan de båda nålarne sitter en index för afläsning af gradtalet. På 20.1 cm. mellan centra hos den rörliga nålen och den fixa magneten är den sistnämnde af 12.2 cm. lång fästad.

förhandl. d. 11 febr. 1874 med (I), d. 13 maj s. å. med (II), d. 14 oct. s. å. med (III), min på franska språket i K. Vet:s Soc:s festtom 1877 med (IV), med (V) min i jernkontorets Annaler 1879 publicerade uppsats och slutligen med (VI) min derstädes 1899 intagna uppsats.

För att hastigare kunna arbeta med detta instrument har jag oftast för bekvämlighets skull använt tangentmetoden, hvilket är tillfyllest, så ofta någon räkning med resultaten ej erfordras. Dock kan naturligtvis äfven den fullt exaktare sinusmetoden här användas.

Derjemte begagnades Sir W. THOMSEN's (Lord KELVIN's) vertikala intensitetsinstrument, egentligen afsedt för justering af skepps-kompassen, men som lämpar sig väl för uppmätning af den vertikala intensiteten. Instrumentet består af tvänne horizontela, sinsemellan parallela och med hvarandra förbunda af strumpstickor förfärdigade magnetnålar, som hvila medelst ett par fina spetsar på glatta underlag. Dessa nålars attraktion eller repulsion af en nedifrån verkande magnetisk kraft, som åstadkommer deras lutning mot horisontalplanet, kan kompenseras genom en vertikalt stäld, medelst skruf rörlig magnet, som är anbragt nedan-om, men midtemellan de horizontela rörliga magneterna. Denna vertikala magnets afläsning, λ , afläses på skalan, och på det graderade skrufhufvudet och magnetnålparets horisontalställning vid jemnvigt iakttages mot ett på den anbragta sidoytan af glas uppritadt horisontelt streck. Frånräknar man de delstreck, som på neutral mark förorsakas, erhåller man verkan från sjelfva malmfältet, hvilken verkan från en punkt till en annan varierar.

Instrumentet ställes vågrätt genom ett å detsamma anbragt vattenpass. Genom jemförelse på behörigt sätt fås instrumentets angifvelser uttryckta i *jordmagnetismens vertikala komponent*.

Stativet är ett vanligt. Bordskifvan är qvadratisk, har längs ena sidan en upphöjd kant, hvarigenom man lätt kan inställa instrumentet vid uppmätning af dess deklinationsvinkel, medan man inrigtar bordets sidokant längs den utstakade linien.

4. Går man direkt från körvägen invid malmhögarne mot gruföppningen, på vägen från *Dannemora* till *Österby*, finner man följande deviationer utan devierande magnet från stakningslinien.

Obs.-plats.	Nålens fria deviation nordost åt vester fr. staklinien.	Thomsens instrument.
G. 2	64.6	20.58
G. 3	55.5	19.92
G. 4	23.5	19.01
G. 5	12.7	19.80
G. 6	5.8	20.0

G. 2 var belägen 2.30 met. från körvägen, G. 6 invid skaktet. G. 4 på 3.25 met. fr. närstående ekträd.

Vid förra årets mätning längs den då stakade linien erhöles

Obs.-plats.	Nålens fria deviation nordost åt vester fr. staklinien.	Thomsens instrument.
G. 2	54.8	20.05
G. 3	43.6	18.88
G. 4	24.0	18.80
G. 5	10.0	19.10
G. 6	0.0	19.45

Det ser nästan ut, som om fjolårets serier antyda då den väg man tagit vid bestämmandet af skaktets läge. Grufkompassen stupar lodrätt nedåt från G. 2 till bortom grufvan.

5. För att här gifva ett begrepp om magnetiska kraftens fördelning längs Konstängsgrufvan anføres här några mätningar utförda 1900 af eleverna vid bergsskolan Hrr. *K. Södervall* och *A. Siljeström*. Märkena voro utsatta, det ena söder om körvägen, gående från ö. till v. och benämnda A, B, C, . . . , det andra, gående deremot vinkelrätt öfver hela fältet, signerade 1, 2, 3 . . . , begynnande fr. söder mot norr. *Dekinationen* blef

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
<i>K</i>	—	—	—	—	—	—	40	38	38	35	34	32	30	30	28
<i>J</i>	—	—	—	—	—	—	45	40	35	33	31	30	29	27	28
<i>I</i>	—	—	—	—	—	—	48	41	34	32	30	26	27	25	24
<i>H</i>	—	—	—	—	79	63	63	42	32	26	25	33	32	21	21
<i>G</i>	—	40	52	65	33	56	58	24.5	18.5	16	16	16	18	19	19
<i>F</i>	—	30	36	36	41	19	8	—4	—2	3	8	11.5	15	15	19
<i>E</i>	—	33	29	27	22	18	10	5	4	8	9	12	14	15.5	17

Horizontal intensitet, med devierande magnet, tang. metod,
 $\alpha_0 = 30$, blef

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
<i>K</i>	—	—	—	—	—	—	35	36	38	36	35	34	32	33	31.5
<i>J</i>	—	—	—	—	—	—	39	37	38	38	39	34	33	34	31
<i>I</i>	—	—	—	—	—	—	44	43	42	40	39	36	35	33	31
<i>H</i>	—	—	—	—	38	53	54	50	50	44	39	37	35	32	30
<i>G</i>	—	27	53	56	39	50	68	70	57	45	38	35	31	32	30.5
<i>F</i>	—	18	18	29	24	24	29	21	30	28	29	30	29	29	31
<i>E</i>	—	18	17	16	16	15	15	17	20	24	24	27	27	26	24
<i>D</i>	—	19	19	18	17	16	17	18	20	23	25	25	26	26	26
<i>C</i>	—	—	—	20	19	18.5	18	20	20	22	23	24	25	25	25
<i>B</i>	—	—	—	21	19.5	19	20	20.5	20	22	22	23	24	24	25
<i>A</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Vertikala intensiteten, bestämd medelst TIBERG's apparat.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
<i>K</i>	—	—	—	—	—	—	22	22	24	24	23	22	20	20	22
<i>J</i>	—	—	—	—	—	—	26	23	26	26	25	25	24	22	20
<i>I</i>	—	—	—	—	—	—	29	29	30	31	27	28	27	26	24
<i>H</i>	—	—	—	—	28	40	36	37	36	34	32	31	28	27	25
<i>G</i>	—	61	54	53	54	56	57	54	44	41	38	35	31	30	26
<i>F</i>	—	53	55	61	63	70	70	62	56	50	38	34	31	28	27
<i>E</i>	—	38	39	52	55	56	56	53	41	38	36	32	29	27	26
<i>D</i>	—	32	34	36	36	37	37	36	33	34	34	28	27	25	25
<i>C</i>	—	—	—	28	31	32	30	29	28	31	28	26	26	24	23
<i>B</i>	—	—	—	26	26	26	26	26	24	27	25	22	24	19.5	21
<i>A</i>	—	—	—	—	23	21	21	22	22	25	25	21	20	18	19

6. Enligt teorien för den horizontala och vertikala malm-magnetismen finner man x och z lika med

$$x = \frac{M}{z^2} \cdot 3 \cos^4 \varphi \sin \varphi \quad \text{och} \quad z = \frac{M}{z^2} (3 \cos^2 \varphi - 1) \cos^3 \varphi,$$

sålendes äro x och z proportionella mot

$$3 \sin \varphi \cos^4 \varphi \quad \text{och} \quad (3 \cos^2 \varphi - 1) \cos^3 \varphi,$$

der φ är vinkeln med den genom magnetcentrum dragna vertikal-linien och den för samma punkt till observationsorten gående sammanbindningslinien.

Beräknas för hvar 5:te grad af φ värden på x fås

φ	x
0°	0
5	0.2575
10	0.6226
15	0.6758
20	0.6800
25	0.6685
30	0.8245
35	0.7765

Bortdivideras $\cos^3 \varphi$, blir återstoden mot F och G proportional således mot

$$F = 3 \sin \varphi \cos \varphi \quad \text{och} \quad G = 3 \cos^2 \varphi - 1,$$

hvarvid fås

0°	F	G
0°	0	2.0000
5	0.2545	1.9772
10	0.5130	1.9095
15	0.750	1.7990
20	0.9619	1.6491
25	1.1491	1.4642
30	1.2996	1.2500
35	1.4443	1.0130

För det följande erfordras känna

$$F = G.$$

Man har då, som enl. föregående tabell bör vara i närheten af 30°; den blir

$$3 \sin \varphi \cos \varphi = 3 \cos^2 \varphi - 1$$

eller

$$3 \cos \varphi \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = 3 \cos^2 \varphi - 1.$$

Således af

$$9 \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) = 9 \cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi + 1$$

eller

$$18 \cos^4 \varphi - 15 \cos^2 \varphi = -1$$

d. ä.

$$\cos^4 \varphi - \frac{5}{6} \cos^2 \varphi = -\frac{1}{18}$$

således

$$\cos^2 \varphi = \frac{5 \pm 17}{12} = \frac{9.123}{12} \text{ eller } = \frac{0.877}{12}$$

d. v. s.

$$\cos^2 \varphi = \frac{0.7602}{0.0724}$$

$$\therefore \cos \varphi = 29^\circ 19' \cdot 10''.$$

Det andra värdet kan ej användas.

Således

$$F = G = 1.2800.$$

7. F -kraften representeras, såsom sagdt, af

$$F = \frac{M}{z^3} \cdot 3 \sin \varphi \cos^4 \varphi$$

och ekvationen med devierande magnet i horisontel led V, s. 34 ekv. 7 af

$$(H_0 \pm F) \sin \alpha = H_0 \sin \alpha_0,$$

der H_0 och $\sin \alpha_0$ tillhöra neutrallinien. Här varierar F mellan sitt minsta och största värde, F_{\min} och G_{\max} , medan α går från sitt största till sitt minsta värde.

Man har således

$$(H_0 + F_{\max}) \sin \alpha_{\min} = H_0 \sin \alpha_0 \quad ^1)$$

och

$$(H_0 - F_{\min}) \sin \alpha_{\max} = H_0 \sin \alpha_0 \quad ^1)$$

Kring hvardera af dessa max.- och min.-punkter bilda de motsvarande punkterna af α slutna kurvor, som äro koncentriskas kring hvarje af punkterna α_{\min} och α_{\max} . Mellan hvardera gruppen finnes en icke sluten kurva, motsvarande *neutrallinien* α_0 .

¹⁾ Se (V) s. 34.

Kartläggas de observationer, som representera inklinationen, så bilda dessa slutna kurvor kring den punkt, der maximiinklinationen erhålles. ¹⁾

Under de tre åren, då mätningar här skedde, 1889—1901, togs till neutral mark, s. ö. om grufvan bortom ängen vid björk- och ekträden, hvarvid erhöles

enligt *tangentmetoden* α_0

1899.	1900.	1901.
27.9	25.8	25.5
27.8	25.8	25.7
<hr/>		
27.85	25.8	25.6

enligt *sinusmetoden*

1899.	1900.	1901.
28.0	28.0	28.0
28.0	28.0	28.6
<hr/>		
28.0	28.0	28.3

enligt *Thomsens apparat*

1899.	1900.	1901.
16.46	15.93	15.90 .

Vid noggrann uppmätning af *minimipunkten* för *F* gjordes 1901 mätningar kring E. 6, som qvarstod sedan 1900, längs parallela linier på 1.3 å 1.4 met. om E. 6, hvarvid erhöles

S.-vest om E. 6.		Söder om E. 6.		S.-öst om E. 6.	
15.4 ²⁾	15.7 ³⁾	15.6 ²⁾	16.0 ³⁾	15.0 ²⁾	16.0 ³⁾
15.4	15.6	15.4	15.8	16.2	15.8
<hr/>					
15.4	15.65	15.5	15.9	15.6	15.9
<hr/>					
1.4 met. vester om E. 6.			E. 6.	1.35 met. öster om E. 6.	
15.3 ²⁾	16.0 ³⁾	39.8 ⁴⁾	14.3 ²⁾	15.5 ³⁾	19.61 ⁴⁾
15.2	15.5		16.0	15.3	16.0 ³⁾
<hr/>					
15.25	15.75		15.15	15.3	15.7
<hr/>					
			15.15	15.3	15.85

¹⁾ Mellan 2 stora jordfasta stenar. ²⁾ Tang. metod. ³⁾ Sinusmetod. ⁴⁾ Thomsens apparat.

1:o) närmaste linien norrut på 1.3 met. från E. 6

14.8 ¹⁾	15.3 ²⁾	14.8 ¹⁾	15.2 ²⁾	14.8 ¹⁾	15.5 ²⁾
15.3	15.5	15.2	15.6	15.2	16.4
15.05	15.4	14.95	15.4	15.0	15.95

2:o) nästa linie ytterligare mot norr

15.0 ¹⁾	15.2 ²⁾	15.0 ¹⁾	15.4 ²⁾	14.8 ¹⁾	15.5 ²⁾
14.8	15.0	14.8	15.2	15.0	15.2
14.9	15.10	14.9	15.3 <i>min.</i>	14.9	15.35

3:o) linien mot norr

15.5 ¹⁾	15.0 ²⁾ *)	14.9 ¹⁾	15.2 ²⁾	15.0 ¹⁾	15.4 ²⁾
16.0	15.4	14.8	15.7	14.9	15.0
15.75	15.2	14.85	15.45	14.95	15.2

4:o) linien likaledes mot norr

14.9 ¹⁾	15.0 ²⁾	15.2 ¹⁾	15.4 ²⁾
14.9	15.3	14.9	15.5
14.9	15.15	15.05	15.35

Minimum tyckes ligga på 2:a linien norr om E. 6.*Bestämning af läget för maximipunkten hos F*Längs G. lin., G. 7 + 3 met. 76.7 ¹⁾

74.0

75.35

> > G. 7 + 2 met. 76.7 ¹⁾

74.8

75.35

Således *maximipunkten* vid

G. 7 + 2.5 met. = 75.35 met.

För noggrann undersökning af F_{\max} användes följande mätningar.¹⁾ Tang. metod. ²⁾ Sinusmetod. *) Mellan 2 stora jordfasta stenar.

G. 7	72.0	
	<u>70.5</u>	
	71.25	
G. 7 + 2 met. ost	73.0 ¹⁾	$F_{\max} = 74.75$
	<u>76.5</u>	
	74.75	
G. 7 + 4 met. ost	73.5 ¹⁾	
	<u>7.30</u>	
	73.25	
G. 7 + 4 met. ost + 2 met. syd	56.2 ¹⁾	
	<u>57.5</u>	
	56.85	
G. 7 + 4 met. ost + 2 met. norr	74.0 ¹⁾	
	<u>72.8</u>	
	73.4	

G. 7 + 3 met. längs G. lin. + 2.3 met. vesterut, 5 met. fr. norra stocken kring skaktet norrut

$$\begin{array}{r}
 70.5 \text{ } ^1) \\
 \hline
 71.5 \\
 \hline
 70.0
 \end{array}$$

Afståndet fr. F_{\min} till $F_{\max} = 22.36$ met.

på 11 met. från F_{\min} erhöills			36.5 ¹⁾	på 10 met.		30.0 ¹⁾	22.07 ²⁾
			36.5			33.0	
			36.5			36.5	
9 met.	25.0 ¹⁾	22.15	8 met.	24.0 ¹⁾	25.8 ²⁾	21.0 ³⁾	
	27.7			25.7	25.4		
	26.35			24.85	25.6		

Således vid 8.5 met. fr. F_{\min} sannolikt $\varphi = 25.12$. ¹⁾

Följaktligen framgår den *neutrala linien* vid 8.5 met. fr. F_{\min} , och således ligger skaktet härifrån i v.n.v. på ett afstånd af 10 met. ungefär. .

¹⁾ Tangentmetod. ²⁾ Sinusmetoden. ³⁾ Thomssens apparat.

Häraf fås

$$\begin{aligned}\frac{F}{H} &= \frac{\text{tang } 75.35 - \text{tang } 14.9}{\text{tang } 75.35 + \text{tang } 14.9} = \frac{\text{tg } 75^\circ 21' - \text{tg } 14^\circ 54'}{\text{tg } 75^\circ 21' + \text{tg } 14^\circ 54'} = \\ &= \frac{3825 - 138.1}{3825 + 138.1} = \frac{3687}{3963} \\ &= 0.952.\end{aligned}$$

8. *Maximivärdet* hos F för kännedom om *djupet* fås genom differentiation af $3 \sin \varphi \cos^2 \varphi$, nemligen

$$\begin{aligned}dr (3 \sin \varphi \cos^2 \varphi) &= 0 \\ \cos^4 \varphi \cos \varphi - 4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi &= 0 \\ \cos^3 \varphi (\cos^2 \varphi - 4 \sin^2 \varphi) &= 0\end{aligned}$$

d. v. s.

$$4 \text{ tang}^2 \varphi = 1 \text{ eller } \text{tang } \varphi = \frac{1}{2}$$

och då

$$x = z \text{ tang } \varphi \text{ blir } z = 2x.$$

Häraf erhålles följande regel vid experimentet med magnetstång: »Djupet hos magnetstångens mittpunkt under det horizontalplan, i hvilket mätningarna antages ha egt rum, är dubbelt större än afståndet x längs meridianen mellan minimipunkten för deviationen och den förut bestämda midt öfver magnetstången belägna punkten A.» (Se (V) s. 62).

Men $\text{tang } \varphi = \frac{1}{2}$ motsvarar $\varphi = 26^\circ 34'$, och enligt 6 ses, att F_{\max} ligger i närheten af 25° à 30° .

9. I öfverensstämmelse af (VI) s. 19

$$\text{tang}^2 \varphi + 3 \frac{G}{F} \cdot \text{tang } \varphi = 2,$$

som leder till kännedom om *djupet*, ses, att enklast är att tänka på den förenkling, att

$$G = F.$$

Såsom af 6 härofvän inses, inträffar detta, ifall

$$\varphi = 29^{\circ} 19' 10''.$$

Hvadan ekv. blir

$$\tan^2 \varphi + 3 \tan \varphi = 2$$

och ger

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \quad \text{och} \quad \tan \varphi = \frac{-\sqrt{17} - 3}{2},$$

af hvilka värden endast det förstnämnda behöfver medtagas.

Man finner dervid

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} = \frac{1,1231}{2} = 0,56155,$$

hvilket värde motsvarar

$$\varphi = 29^{\circ} 19' 10''.$$

Detta öfverensstämmer med 6 och ger

$$x = z \tan \varphi$$

$$\therefore x = 0,56155 \tan \varphi$$

eller

$$z = 1,7800 x.$$

Detta värde öfverensstämmer ganska nära med det ofvan i 8 funna, $z = 2x$, och vi få således på två fullt olika sätt samstämmiga resultat, hvilket åter visar satsens pålitlighet. Naturligtvis förutsättes dervid, att malmstocken kan antagas vara fristående, och ej befinner sig i närvaro af och under inverkan af närstående malmer.

11. För reduktion af förhållandet G och F till absolut mätt användes följande metod.

Enligt (V) s. 70 är

$$\frac{V + Z}{H + X} = \frac{V}{H}$$

d. v. s. (V) s. 59

$$\frac{G + V}{F + H} = \frac{V}{H}$$

eller

$$\frac{G}{F} = \frac{V}{H}$$

således

$$\frac{G}{F} = \tan i = \tan I = \frac{V}{H}$$

eller tang. för *neutrala inklinationen* öfver malmfältet.

Således bestämmes tang i af förhållandet $\frac{G}{F}$ eller af λ_1 .

I (VI) har jag angifvit, att angivelserna hos det Lamontska eller Lloydska inklinatoriet ej voro att lita på. Men troligtvis berodde detta derpå, att jernstängen ej var nöjaktigt urglödgad. (Se (VI) s. 14 § 10.)

10. Enligt formeln för G , blir $G = 0$ för $\cos \varphi = \frac{1}{3}$, (V) s. 63, d. v. s. för

$$\varphi = 54^\circ 44',$$

således, om r = koordinaten längs meridianen från $\varphi = 0$ till $\varphi = \text{min.}$,

$$r = 2 \tan \varphi$$

d. v. s.

$$2 = 0.7 \cdot r,$$

hvilken ekvation således äfven leder till kännedom om malm-centrets djup. Å (V) s. 64 är angifvet om metodens användbarhet.

Af tab. 6 ses, att för $\varphi = 0$ man får $F = 0$ och $G = 2$, således der neutrallinien framgår. Denna linies läge kan således bestämmas med vertikalinstrumentet för det fall, att $\lambda = 0$.

Något *numeriskt* resultat har jag här ej att angifva.

11. I det föregående har varit fråga endast om jernmalm-lager, men det är tydligt, att samma undersökningsmetod lika väl lämpar sig till användning i malmfält, innehållande koppar- och nickelmalm m. fl., enär dessa vanligen äro magnetiska. Redan gjorda iakttagelser hafva också ådagalagt, att derstädes alldeles samma förhållanden i afseende på kurvornas lopp visa

sig som vid jerngrufvorna, med den skilnad naturligtvis, att vinkelvärdena här på koppar- och nickelfälten utfalla betydligt mindre. Om så befunnes nödigt, kunde man vid undersökning af sistnämnda malmfält utbyta det nu vanligen använda mättingsinstrumentet mot ett känsligare, för att derigenom vinna all erforderlig noggrannhet i bestämningarne.

Ist der Timotheengrasrost eine selbständige Rostart oder nicht?

Von JAKOB ERIKSSON.

(Mitgeteilt am 14. Mai 1902.)

Durch eine Anzahl von Infectionsversuchen, die mit einer auf *Phleum pratense* auftretenden, im Äusseren dem gewöhnlichen Schwarzroste sehr ähnlichen Rostpilzform in den Jahren 1891—93 ausgeführt wurden, ging als Resultat hervor, dass die Rostform des Timotheengrases mit keiner der ausgeschiedenen Schwarzrostformen identisch sei. Sie wurde deshalb als eine selbständige Rostart, *Puccinia Phlei-pratensis* ER. & HEN., aufgestellt.¹⁾

Der Timotheengrasrost entbehrte fast vollständig der Fähigkeit auf den Berberitzenstrauch überzugehen, und auch das Vermögen des Pilzes im Uredostadium die Getreidearten anzustecken war auf ein Minimum reduciert.

Unter 9 Infectionsversuchen auf der Berberitze, hiervon 5 im Frühjahr 1892 und 4 im Frühjahr 1893, gaben 8 durchaus negative Resultate. Nur in einem Versuche traten an einer inficierten Stelle nach 16 Tagen Spermogonien und noch 16 Tage später Aecidien — in sehr spärlichen Haufen — auf, während in derselben Versuchsnummer 20 Stellen resultatlos blieben. Im Ganzen fanden sich 92 negative Ergebnisse gegen 1 einziges positives, und doch war die Keimfähigkeit der Sporen niemals unter Keimungsgrad 3 (d. h. ziemlich allgemeine Keimung) geschätzt worden.

¹⁾ J. ERIKSSON & E. HENNING, *Die Hauptresultate einer neuen Untersuchung über die Getreideroste* (Sorauer's Zeitschrift für Pflanzenkrankheiten, Bd. 4, 1894, S. 140) und *Die Getreideroste*, Stockholm, 1896, S. 130.

Mit dem Pilze im Uredostadium waren Infektionsversuche auf *Phleum pratense* in 7 Versuchsnummern ausgeführt, sämtlich mit positiven Ergebnissen, und auf Getreidearten in 20 Versuchsnummern, wovon 3 auf Roggen, 5 auf Weizen, 8 auf Hafer und 4 auf Gerste, und zwar alle mit negativen Resultaten, wenn man einen Haferversuch ausnimmt. Im Ganzen standen auf Hafer wenigstens 27 Infektionsstellen mit negativen Ergebnissen neben einer einzigen Stelle mit berstenden Uredopusteln.

Im Jahre 1894 kamen einige neue Infektionsversuche hinzu, welche mit dem Pilze im Uredostadium ausgeführt wurden, nämlich 1 Versuch auf *Phleum pratense* selbst an 38 Infektionsstellen und 1 Versuch auf *Festuca elatior* an 39 Infektionsstellen.¹⁾ Diese Versuche zeigten, dass es wenigstens ein anderes Gras gebe, worauf der Timotheengrasspilz übergehen kann. Unter den Infektionsstellen auf *Festuca elatior* lieferten 19 positive Ergebnisse, während auf *Phleum pratense* selbst 34 Infektionen positiv ausfielen. Die Identität der beiden Formen wurde auch durch Infektionen mit Sporenmaterial aus *Festuca elatior* bestätigt. Solches Material gab auf *Phleum pratense* positive Ausschläge an 15 Stellen unter 25, auf *Festuca elatior* selbst aber nur an 3 Stellen unter 15 inficierten. Ausserdem zeigten sich positive Ergebnisse auf *Secale cereale* an 1 Stelle unter 15 und auf *Avena sativa* an 2 Stellen unter 15.

Zur Erklärung der in den sämtlichen 4 ersten Versuchsjahren, 1891—94, hervortretenden, vereinzelt positiven Ausschläge, nämlich

im Jahre 1891	1	Ausschlag auf	<i>Avena sativa</i> ,
»	»	1893	1 » » <i>Berberis vulgaris</i> ,
»	»	1894	1 » » <i>Secale cereale</i> ,
»	»	»	2 Ausschläge » <i>Avena sativa</i> ,

könnte man^e sich selbstverständlich zwei Möglichkeiten denken. Die eine wäre die, dass der Ausschlag aus einer anders woher

¹⁾ J. ERIKSSON, *Über die Specialisierung des Parasitismus bei den Getreiderostpilzen* (Ber. d. Deutsch. Bot. Gesellschaft., 1894, Bd. 12, S. 309).

kommenden Krankheitsquelle gestammt habe, entweder aus einem in den inficierten Pflanzen schon vor dem Inficieren innewohnenden Krankheitskeime oder aus einigen unabsichtlich bei oder nach der Infection von aussen zugeführten Sporen. Die andere Möglichkeit wäre die, dass der Pilz, obgleich eine selbständige Art, sich doch noch nicht so scharf fixiert hätte, dass er des Vermögens vollständig entbehrte, in seltenen Fällen auch auf andere Grasarten als das Timotheengras und den Schwingel überzugehen.

Um der Lösung dieser Fragen näher zu treten, waren neue Versuche von Nöten. Solche sind auch in den folgenden Jahren ausgeführt worden, und will ich hier eine Übersicht dieser Versuche geben. In der Übersicht werden auch die Versuche mitgenommen, welche mit ähnlichen auf anderen Phleum-Arten auftretenden Pilzformen ausgeführt worden sind, ebenso wie einige Versuchsserien mit dem echten Schwarzrostpilze, in denen eine Phleum-Art mitgenommen worden ist.

Die mit den Pilzformen in ihrem Teleutosporen-Stadium in den Jahren 1895 und 1900 ausgeführten Infectionsversuche sind in der folgenden Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

Infectionsversuche mit Teleutosporenmaterial auf *Berberis vulgaris* ausgeführt,
in den Jahren 1895 und 1900.

Infections- N.T. Jahr. Tag.			Infectionsmaterial.				Zahl der Infectionsstellen.	Resultat.				
			Herkunft.	Keim- fähig- keit		+		-	Zahl der Rostflecken mit		Incubations dauer, in Tagen, für	
				Grad.	Nach Stunden.				Spermogonien.	Aecidien.	Spermogonien.	Aecidien.
1	1895	21/5	Phleum Michelii .	4	9	45	+	19	9	14—25	36—44	
2	„	22/5	Festuca elatior .	2	34	35	—	
3	„	24/5	Phleum pratense .	„	14	25	—	
4	1900	26/5	„ asperum .	4	20	30	+	29	16	10—18	18—38	
5	„	15/6	„ „ .	„	22	43	+	28	3	11	21	

Dass nur 1 Versuch mit der Pilzform des *Phleum pratense* und 1 Versuch mit derjenigen der *Festuca elatior* zur Ausführung gelangt ist, beruht darauf, dass diese Form verhältnismässig selten in der Umgegend von Stockholm volle Teleutosporenreife erreicht. Das Bemühen, aus dem südlichen Schweden, wo diese Form zu einer vollständigeren Entwicklung kommt, erforderliches Material anzuschaffen, ist auch umsonst gewesen. Beide ausgeführten Versuche sprechen für die Selbständigkeit des gewöhnlichen Timotheengasrostes.

Recht überraschend kann es wohl anfangs vorkommen, dass die beiden anderen Formen, womit ähnliche Versuche ausgeführt wurden, die auf *Phleum Michelii* und auf *P. asperum* gefundenen, die Fähigkeit besaßen, die Berberitze anzustecken. Jene Form war in dem Versuchsgarten des Experimentalfeldes am 19. April 1895 aus Pflanzen, die im Jahre 1891 als rostig aus Upsala verpflanzt worden waren, diese Form aber im Botanischen Garten zu Upsala am 21. Oktober 1899 eingesammelt. Diese Formen können beide als mit der echten *Puccinia graminis* identisch betrachtet werden. Die Ueberraschung wird jedoch kleiner, wenn man sich erinnert, dass schon im Jahre 1893 eine schwarzrostähnliche Pilzform auf *Phleum Boehmeri*, in 12 Fällen unter 17, Aecidien auf der Berberitze hervorrief und sich als eine echte Schwarzrostform erwies.¹⁾

Es unterliegt also keinem Zweifel, dass die Form des *Phleum pratense* als eine Art für sich betrachtet werden muss, die auf *P. Boehmeri*, *P. Michelii* und *P. asperum* auftretenden Formen aber echte Schwarzrostpilze sind.

Mit einer dieser Formen, der auf *P. asperum* gesammelten, wurde im Jahre 1900 am 31. Juli ein Versuch in laufenden Generationen ausgeführt. Infiziert waren *Secale cereale* an 23, *Triticum vulgare* an 25, *Hordeum vulgare* an 17 und *Avena sativa* an 23 Stellen, an den drei ersten Getreidearten durchaus resultatlos, nur an dem Hafer positiv, und zwar an 20 Stellen. Dadurch wurde offenbar, dass diese Form zu der f. sp. *Avenae*

¹⁾ J. ERIKSSON & E. HENNING, *Die Getreideroste*, S. 59.

gehört. Wie sich die entsprechenden Formen an *Phleum Boeheimeri* und *P. Michelii* in solcher Hinsicht verhalten, davon weiss man noch nichts, da mit diesen Formen weder fortlaufende Kulturen noch Uredoinfectionen zur Ausführung gekommen sind.

Da alle die mitgeteilten Versuchsergebnisse darauf deuten, dass man beim Suchen nach der Genesis der Rostformen an den *Phleum*-Arten vorzugsweise auf den Hafer seine Blicke richten muss, so ist es erklärlich, dass in den Versuchsserien, wo neue Infectionen mit den betreffenden Pilzformen in ihrem Uredostadium ausgeführt wurden, in erster Linie Haferpflanzen als Unterlage benutzt worden sind. Über derartige im Laufe der Jahre 1895—98 ausgeführte Versuche giebt die nachfolgende Tabelle 2 eine Übersicht (Seite 194—195).

Eine Zusammenstellung der Resultate dieser Versuche und derjenigen der vorigen Jahre zeigt die folgende Tabelle 3.

Tabelle 3.

Übersicht der bisher mit *Uredo Phlei-pratensis* und nächst verwandten Formen ausgeführten Infectionsversuchen.

Infectionsmaterial von	Übergeführt auf	R e s u l t a t.					
		Zahl der Versuchsnumm.			Zahl der Infectionstellen.		
		+	(+)	—	+	(+)	—
<i>Phleum pratense</i> . . .	<i>Phleum pratense</i> . . .	12	.	.	135	.	38
" " . . .	" <i>Michelii</i> . . .	1	.	.	29	.	1
" " . . .	<i>Festuca elatior</i> . . .	1	.	.	19	.	20
" " . . .	<i>Avena sativa</i> . . .	6	1	7	18	2	123
" " . . .	<i>Secale cereale</i> . . .	1	1	4	7	2	51
" " . . .	<i>Triticum vulgare</i>	7	.	.	58
" " . . .	<i>Hordeum</i> "	6	.	.	54
" " . . .	<i>Poa pratensis</i>	1	.	.	6
<i>Festuca elatior</i> . . .	<i>Festuca elatior</i> . . .	1	.	.	3	.	12
" " . . .	<i>Phleum pratense</i> . . .	1	.	.	15	.	10
" " . . .	<i>Secale cereale</i>	1	.	.	1	14
" " . . .	<i>Avena sativa</i>	1	.	.	1	14
" " . . .	<i>Hordeum vulgare</i>	1	.	.	13
<i>Phleum phalaroides</i> . .	<i>Phleum pratense</i> . . .	1	.	.	24	.	15
" " . . .	<i>Avena sativa</i> . . .	1	.	.	4	.	14
" " . . .	<i>Secale cereale</i>	1	.	.	23
" " . . .	<i>Triticum vulgare</i>	1	.	.	24
" " . . .	<i>Hordeum</i> "	1	.	.	20
<i>Avena sativa</i> . . .	<i>Avena sativa</i> . . .	9	.	.	189	.	14
" " . . .	<i>Phleum pratense</i>	3	.	.	108

Tabelle
Infectionsversuche mit
in den Jahren

Infections-			Infectionsmaterial.		Inficierte Pflanzen.	
			Herkunft.	Keim- fähig- keit.	Art.	Zahl.
Nr.	Jahr.	Tag.		Nach Stunden Grad.		
1	1895	11/9	Phleum pratense	4	52	Secale cereale 3
2	"	"	" "	"	"	Triticum vulgare "
3	"	"	" "	"	"	Avena sativa "
4	"	"	" "	"	"	Hordeum vulgare "
5	"	"	" "	"	"	Phleum Michellii "
6	"	"	" "	"	"	" pratense 2
7	"	14/9	" "	"	45	Avena sativa 3
8	"	"	" "	"	"	Phleum pratense "
9	"	23/9	" " 1)	"	"	Avena sativa "
10	1896	8/9	" "	3	7	Avena sativa "
11	"	"	" "	"	"	" " "
12	"	"	" "	"	"	Phleum pratense 3
13	1897	24/8	" "	4	19	Secale cereale "
14	"	"	" "	"	"	Triticum vulgare "
15	"	"	" "	"	"	Avena sativa "
16	"	"	" "	"	"	Hordeum vulgare "
17	"	"	" "	"	"	Phleum pratense "
18	1895	25/8	Phleum phalaroides	3	11	Triticum vulgare "
19	"	"	" "	"	"	Avena sativa "
20	"	"	" "	"	"	Hordeum vulgare "
21	"	"	" "	"	"	Secale cereale "
22	"	"	" "	"	"	Phleum pratense 4
23	"	13/9	Avena sativa	2	22	Phleum pratense 3
24	"	"	" "	"	"	Avena sativa "
25	1896	30/8	" "	4	23	Phleum pratense "
26	"	"	" "	"	"	Avena sativa "
27	1898	17/9	" "	3	23	Phleum pratense "
28	"	"	" "	"	"	Avena sativa "

Bemerkungen: 1) Das Material war von einer Pflanze genommen, die von Uredo von *Phleum phalaroides* infiziert worden war. Nach 21 Tagen war das erste Blätter sämtlicher Pflanzen grün, aber ohne Pusteln. Die später pusteltragenden Blätter waren die Blätter 2, von unten gerechnet. Diese Blätter waren zart, vielleicht deshalb empfänglicher gegen den Pilz. An allen 3 Stellen nach 32 Tagen nur je 1 Pustel. - 2) Nach 20 Tagen an jeder Stelle zahlreiche, zerstreute Pusteln, wenigstens an den Stellen in unmittelbarer Nähe der Infectionsmassen. Die Pusteln nur auf den jüngsten, zartesten Blättern, ziemlich kräftig, aber nicht so zahlreich, wie in der parallelen Infectionsnummer (12) auf dem Timotheengrass, doch jede für sich etwas länger als bei

2.
Uredosporenmaterial,
1895—98.

Zahl der Infektions- stellen.	R e s u l t a t.																												
	+ —	Zahl der rosterzeugenden Infektionsstellen nach Tagen																											
		9	10	12	13	15	16	17	19	20	21	22	24	25	26	27	30	32	33										
24 , 19 26 30 24	— + — + +	 3 . 23 19	 27 21	 29 21											
25 22	+ +	1 7 19 19	. .	. 1	. 21	 .	 .										
21	+ 1	3	3 .	 .										
25 15 30	+ + +	3 ^{a)} 5 ^{a)} 25 ^{a)}	4 5 26	 .	 .										
22 17 14 20 26	+ — + — +	5	7 2 9	7 ^{b)} 2 ^{b)} 14										
24 18 20 23 39	— + — — + 2 . . 15 4 . . 22 24 24	. 4										
18 21	— +	. .	1 21 21											
40 24	— +	22	23										
30 16	— +	16										

liesem. — ^{a)} Sämtliche Pusteln in unmittelbarer Nähe der Infektionsmassen, ausnahmsweise auf den Blättern 2 der Pflanzen; 5 Infektionsstellen unter 6 mit positivem Erfolg, nach 20 Tagen. — ^{b)} Die Ausschläge kräftig und reichlich; zahlreiche, kleine Pusteln (nach 30 Tagen). — ^{c)} Die Pusteln an den Infektionsstellen, sämtlich — mit einer Ausnahme — an einer Pflanze, und auf dieser Pflanze alle Infektionen positiv. Dass diese Pflanze wirklich eine Roggenpflanze war, und also keine Verwechslung stattgefunden hat, wurde durch nachträgliche Untersuchung des Saatkornes konstatiert. Die Pusteln recht schwach. — ^{d)} Die Pusteln kräftig.

Beachtet man diese Ziffern, und hält man sich dabei zuerst an die Versuche, welche mit der Form des *Phleum pratense* ausgeführt wurden, so geht als sicher hervor, dass diese Form leicht auf *Festuca elatior* und *Phleum Michelii* übergeht und dass sie auch eine gewisse Fähigkeit besitzt, Hafer und Roggen anzustecken. Wenn man die älteren zweifelhaften Versuche der Jahre 1891—93 abrechnet und nur die neuen und genauer verfolgten Versuche der Jahre 1894—97 berücksichtigt, so findet man auf Hafer 18 positive und 111 negative Ausschläge,

„ Roggen 5 „ „ 41 „ „ „

Es trifft freilich ein, dass die positiven Ergebnisse verhältnissmässig gering an der Zahl sind, so dass sie ihre natürliche Erklärung auf andere Weise finden könnten, z. B. in vermischem Infectionsmateriale oder in einem zufällig anders woher zugeführten Infectionsstoffe. Gegen eine solche Annahme sprechen jedoch mehrere Umstände. Ein solcher Umstand ist rücksichtlich der Haferversuche der, dass die hervorbrechenden Pusteln meistens genau an den Stellen hervortraten, wo die Infection vorgenommen war, — nur in 2 Fällen 10 und 20 mm. davon entfernt, — dass sie nur an den zartesten inficierten Blättern zum Vorschein kamen, und dass sie durch ihre geringe Zahl und Grösse an jeder Stelle offenbar zeigten, dass das erzeugende Mycelium eine sehr schwache Vitalität besitzt und nur mit Schwierigkeit Sporen erzeugen kann. Hätten die Pusteln aus einem Mycelium gestammt, das durch Sporen der echten *Uredo graminis* f. sp. *Avenæ* erzeugt war, so hätten dieselben ganz sicher ein kräftigeres Aussehen gezeigt und wären an jeder Stelle in grösserer Menge vorhanden gewesen.

Unrichtig scheint es mir auch die positiven Ergebnisse auf Roggen für ungültig zu erklären, welche in der Nummer 13 an 7 Stellen von 27 inficierten zum Vorschein kamen. Da 6 der 7 Stellen sich an einer und derselben Pflanze fanden, und diese 7 zugleich sämtliche Infectionsstellen dieser Pflanze repräsentierten, so entstand bei mir zuerst der Gedanke, dass beim Säen der Getreidekörner eine Verwechslung geschehen sei, d. h.

dass die Pflanze keine Roggenpflanze sei, sondern z. B. eine Haferpflanze. Am Ende des Versuches wurde jedoch der in der Erde liegende Samen genau untersucht, und es zeigte sich dabei, dass die Pflanze wirklich dem Roggen gehörte.

Mit den jetzt beschriebenen Resultaten stimmen auch diejenigen, welche im Jahre 1891 erhalten wurden, überein. In einem Falle waren damals auf Hafer und in einem Falle auf Roggen schwache Ausschläge hervorgetreten, welcher Umstand ein nicht geringes Bedenken verursachte, als man entscheiden musste, inwiefern der Timotheengrasrost wirklich eine getrennte Pilzform bilde oder vielleicht richtiger mit einer der Schwarzrostformen zu identifizieren sei.

Nunmehr scheint mir jedes Bedenken in dieser Hinsicht unnötig, da es in keinem einzigen Falle gelungen ist, umgekehrt die f. sp. *Avenæ* des Schwarzrostpilzes auf das Timotheengras zu überführen. Wir finden hier immer negative Resultate, an 108 Infectionsstellen, und zwar an 3 Versuchsnummern (9 Sprossen) auf 3 verschiedene Jahre verteilt.

Wie denn erklären, dass der Timotheengrasrost, wenigstens in einzelnen Fällen, auch den Hafer und den Roggen anstecken kann? Kaum anders, als dass diese Rostform zu denjenigen Rostarten mitzurechnen sei, bei denen die Specialisierung nicht scharf durchgeführt ist und welche ich an anderen Orten ¹⁾ als »nicht scharf fixiert« bezeichnet habe. Ich habe als solche folgende aufgenommen: *Puccinia graminis* f. sp. *Tritici* auf *Triticum vulgare* (*Hordeum vulgare*, *Secale cereale* und *Avena sativa*); *P. triticina* auf *Triticum vulgare* (und *Secale cereale*); *P. bromina* auf *Bromus mollis*, *B. arvensis* etc. (und *Secale cereale*); und *P. agropyrina* auf *Triticum repens* (*Secale cereale* und *Bromus arvensis*). Zu derselben Kategorie wäre auch in Folge des oben mitgetheilten *P. Phlei-pratensis* auf *Phleum pratense*, *Festuca elatior* (*Phleum Michelii*, *Avena sativa* und *Secale cereale*) zu rechnen.

¹⁾ J. ERIKSSON, *Über die Specialisierung* etc., S. 298; und *Nouvelles études sur la Rouille brune des Céréales* (Ann. d. Sc. nat., Ser. 7, Bot. T. 9, S. 265).

Die nach Infection mit dem Timotheengrasroste auf *Phleum Michelii*, *Avena sativa* und *Secale cereale* hervortretenden Rostpusteln dürfen wir also nicht mit denjenigen identificieren, welche im Freien an diesen Gramineen auftreten. Die frei auftretenden Formen sind echte Schwarzrostformen, welche die Berberitze kräftig anstecken können, während die in künstlichen Versuchen gezogenen Formen nur schwache Kulturen des Timotheengrasrostes sind.

Welchen Platz die Form des *Phleum phalaroides* einnimmt, ob sie dem Schwarzroste oder dem Timotheengrasroste gehört, davon wissen wir noch nichts, da keine Versuche vorliegen, wodurch die Fähigkeit dieser Form, auf die Berberitze überzugehen, geprüft worden ist.

Eigentümlich muss der Umstand erscheinen, dass verschiedene *Phleum*-Arten rücksichtlich der auf ihnen im Freien auftretenden Pilzformen eine so wesentliche Verschiedenheit zeigen, dass auf den seltenen *Phleum Böhmeri*, *P. Michelii* und *P. asperum* eine Form des heteröcischen Schwarzrostes auftritt, während das gewöhnliche *P. pratense* von einer speciellen homöcischen Rostart, *Puccinia Phlei-pratensis*, befallen wird.

Vielleicht kann man diese Verschiedenheit so erklären, dass *P. Phlei-pratensis* ursprünglich aus *P. graminis* entstanden sei, und dass sie sich allmählich auf dem seit langer Zeit im Grossen gebauten gewöhnlichen Timotheengras zu einer selbständigen Art differenziert habe, selbständig insofern, dass sie die ursprüngliche aecidienerzeugende Fähigkeit verloren, die innere Natur jedoch so beibehalten habe, dass sie, wenn auch schwierig, auf den Hafer und Roggen zurückgehen kann. Weniger vorgeschritten aber denke man sich die Differenzierung an den seltenen, nur zufällig in den botanischen Gärten kultivierten *Phleum*-Arten, welche durch daneben angebauten Getreide direkt angesteckt worden sind. Der Pilz hat hier keine Gelegenheit gehabt, sich Generation nach Generation zu einer Form mit specifischen Eigenschaften herauszubilden und zu fixieren.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademins Bibliotek.

Stockholm. *K. Statistiska Centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. B: N. F. 43: 1, 2; E: 1900; P: 43. 1899—1900. 4:o.

— *Stockholms Högskolas Botaniska institut.*

Meddelanden. Bd 4 (1901). 8:o.

— *Svenska sällskapet för antropologi och geografi.*

Ymer. Årg. 22 (1902): H. 2. 8:o.

Gefle. *Gefleborgs läns Hushållnings-sällskap.*

Berättelse. År 1901. 8:o.

Göteborg. *Museum.*

Årsberättelse 1901. 4:o.

Lund. *Astronomiska observatoriet.*

Meddelanden. N:o 19. 1901. 8:o.

Uppsala. *Observatoire météorologique.*

Bulletin mensuel. Vol. 33 (1901). 4:o.

Basel. *Naturforschende Gesellschaft.*

Verhandlungen. Bd 13: H. 3 & Anhang. 1902. 8:o.

Bergen. *Museum.*

SARS, G. O., An account of the Crustacea of Norway. Vol. 4 (Copepoda, Calanoida): P. 5—6. 1902. 8:o.

Berlin. *Deutsche chemische Gesellschaft.*

VOLHARD, J., & FISCHER, E., Aug. Wilh. von Hofmann. Ein Lebensbild. Berlin 1902. 8:o.

Bern. *Allg. schweizerische Gesellschaft f. d. ges. Naturwissenschaften.*

Neue Denkschriften. Bd 38. 1901. 4:o.

Boston. *American academy of arts and sciences.*

Proceedings. Vol. 37 (1901/1902): N:o 9—11. 8:o.

Bruzelles. *Société entomologique de Belgique.*

Annales. T. 45 (1901). 8:o.

Buqarest. *Institutul météorologic.*

Analele. T. 15 (1899). 4:o.

Buletinul lunar al observatiunilor meteorologice. Anul 9 (1900)—10 (1901). 4:o.

Climatologia Bucuresciana. No. 4 (1898)—5 (1899). 8:o.

Budapest. *K. Ungarische Geologische Anstalt.*

Földtani közlöny (Geolog. Mittheilungen). Kötet 31 (1901): Füz. 10—12. 8:o.

Mitteilungen aus dem Jahrbuche. Bd 13: H. 4. 1902. 8:o.

— *Musée national de Hongrie.*

Természetráizi füzetek. (Journal de zoologie, de botanique, de minéralogie et de géologie.) Vol. 25 (1902): P. 1—2. 8:o.

Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoölogy.*

Bulletin. Vol. 39: No 2. 1902. 8:o.

— *Astronomical Observatory of Harvard College.*

Annals. Vol. 48: No 1. 1902. 4:o.

Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. 1902. Årg. 59. N:o 5.

- Cape Town.** *South African Museum.*
Annals. Vol. 2: P. 6—8. 1901. 8:o.
- Catania.** *Accademia Gioenia di scienze naturali.*
Atti. Anno 78 (1901). 4:o.
Bollettino delle sedute. N. S. Fasc. 71—72. 1901—1902. 8:o.
- Chambésy.** *Herbier Boissier.*
Bulletin. (2) T. 2 (1902): N:o 5. 8:o.
- Dublin.** *Royal Irish Academy.*
Transactions. Vol. 31: P. 12—14; 32: 1—2. 1901—1902. 4:o.
- Edinburgh.** *Scottish meteorological society.*
Journal. (3) N:o 17 (1899). 8:o.
- Erfurt.** *K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften.*
Jahrbücher. N. F. H. 28. 1902. 8:o.
- Frankfurt a. M.** *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd 20: H. 3; 26: H. 4. 1902. 4:o.
- Freiburg.** *Naturforschende Gesellschaft.*
Berichte. Bd 12. 1902. 8:o.
- Genève.** *Observatoire.*
Résumé météorologique. Année 1900. 8:o.
Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice.
Année 1900. 8:o.
- Genova.** *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*
Atti. Vol. 12 (1901): N. 4. 8:o.
- Göttingen.** *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Math.-phys. Kl. N. F. Bd 2: Nro. 2. 1902. 4:o.
Nachrichten. Math.-phys. Klasse. 1902: H. 1. 8:o.
Phil.-hist. Klasse. 1902: H. 1. 8:o.
- Hamburg.** *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Verhandlungen. (3) 9 (1901). 8:o.
- Harlem.** *Koloniaal Museum.*
Bulletin. N:o 26 (1902). 8:o.
— *Société Hollandaise des sciences.*
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. (2) T. 7:
Livr. 1. 1902. 8:o.
- Kalocsa.** *Haynald-Observatorium.*
Protuberanzen. Jahre 1888—1890. 1902. 4:o.
- Kew.** *Royal botanic gardens.*
Bulletin of miscellaneous information. 1902: Append. 4. 8:o.
- Krakau.** *Académie des sciences.*
Bulletin international. Cl. des sc. math. et nat. 1902: Nr 2—3. 8:o.
Katalog literatury naukowej Polskiej. T. 1 (1901): zesz. 4. 8:o.
— *K. K. Sternwarte.*
Meteorologische Beobachtungen. 1901: 1—12. 8:o.
- Kremsmünster.** *Sternwarte.*
Resultate der meteorologischen Beobachtungen. Jahr 1901. 8:o.
- Kristiania.** *Universitets-Bibliothek.*
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd 40: H. 1. 1902. 8:o.

Kristiania. *The Fridtjof Nansen Fund for the advancement of science.*

The Norwegian North Polar expedition 1893—96, Scientific results ed. by FRIDTJOF NANSEN. Vol. 3. 1902. 4:o.

— *Det norske meteorologiske Institut.*

Jahrbuch 1901. 4:o.

Königsberg. *Physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Schriften. Jahrg. 42 (1901). 4:o.

Leipzig. *Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft.*

Jahresbericht. 1902. 8:o.

Lisboa. *Academia Real das sciencias.*

Jornal de sciencias. (2) T 6 (1900): Num. 21. 8:o.

London. *British association for the advancement of science.*

Report. Meeting 71 (Glasgow, 1901). 8:o.

— *British museum.*

Catalogue of the Lepidoptera Phalænæ. Vol. 3 & Plates. 1901. 8:o.

Catalogue of the fossil fishes. P. 4. 1901. 8:o.

Catalogue of the collection of birds' eggs. Vol. 1. 1901. 8:o.

A hand-list of the genera and species of birds. Vol. 3. 1901. 8:o.

A monograph of the Culicidae or mosquitoes, by F. V. THEOBALD. Vol. 1—2 & Pl. 1901. 8:o.

— *Meteorological office.*

Monthly pilot charts of the North Atlantic and Mediterranean. 1902: Sheet 14. Fol.

Temperature tables for the British Islands. Daily means for the 30 years 1871—1900. 1902. 4:o.

— *Royal Astronomical society.*

Monthly notices. Vol. 62 (1901/02): No 5. 8:o.

— *Chemical society.*

Journal. Vols. 81—82 (1902): 5. 8:o.

Proceedings. Vol. 18 (1902): No 250—251. 8:o.

List 1901/1902. 8:o.

— *R. Microscopical Society.*

Journal. 1902: P. 2. 8:o.

— *Royal society.*

Proceedings. Vol. 69 (1901/02): No 458. 8:o.

Year-book. 1902. 8:o.

London, Ontario. *Entomological society.*

The Canadian entomologist. Vol. 34 (1902): No 4. 8:o.

Manila. *Central observatory.*

DOYLE, J., Magnetical dip and declination in the Philippine islands . . . 1901. 8:o.

— *Observatorio de la compañía de Jesús.*

Boletín mensual. Año 1901: 1. Fol.

Melbourne. *Observatory.*

Results of observations in meteorology and terrestrial magnetism. 1901: 1. 8:o.

- Mexico.** *Instituto geológico de Mexico.*
Boletín. Num. 15: P. 2. 1901. 4:o.
- Missoula.** *University of Montana.*
Bulletin. Biol. ser. No. 1. 1901. 8:o.
- Napoli.** *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (3) Vol. 8 (1902): Fasc. 3. 8:o.
- Neuchâtel.** *Société Neuchateloise des sciences naturelles.*
Bulletin. T. 27 (1898/99). 8:o.
- New York.** *American Museum of natural history.*
Bulletin. Vol. 14 (1901); 15 (1901): P. 1; 11: 4. 1901. 8:o.
Memoirs. Vol. 1: P. 7. 1901. 4:o.
- Oberlin, Ohio.** *College library.*
The Wilson bulletin. N. S. Vol. 9 (1902): No. 1. 8:o.
- Paris.** *Bureau central météorologique.*
Bulletin international. Année 1901: Sem. 1-2. 4:o.
Bulletin mensuel. Année 1902: 2. 4:o.
— *Société astronomique de France.*
Bulletin. 1902: 5. 8:o.
— *Société de géographie.*
La Géographie. Année 1902: N:o 4. 8:o.
— *Société géologique de France.*
Bulletin. (4) T. 1 (1901): N:o 4. 8:o.
- Philadelphia.** *Geographical society.*
List 1902/1. 8:o.
- Pola.** *Hydrographisches Amt der k. u. k. Kriegs-Marine.*
Meteorologische Termin-Beobachtungen. 1902: 3. tv. Fol.
- Rio de Janeiro.** *Observatorio.*
Boletim mensal. 1901: 4-6. 8:o.
- Roma.** *Reale accademia dei Lincei.*
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.
Rendiconti. (5) Vol. 11 (1902): Sem. 1: Fasc. 6-8. 8:o.
Classe di scienze morali, storiche e filologiche.
Atti. (5) P. 2: Notizie degli Scavi. 1901: 12 & Ind.; 1902: 1. 4:o.
- Saint John.** *Natural history society of New Brunswick.*
Bulletin. No. 20. 1902. 8:o.
- St Petersburg.** *Hortus Imp. Petropolitanus.*
Acta. T. 19: 1-2; 20. 1901. 8:o.
- San José.** *Instituto fisico-geografico de Costa Rica.*
Boletín. Año 2 (1901/1902): No. 14. 8:o.
- San Fernando.** *Instituto y observatorio de marina.*
Anales. Secc. 2: Observaciones meteorol., magnet. y sísmicas. Año 1899. 4:o.
- San Francisco.** *Astronomical society of the Pacific.*
Publications. Vol. 14 (1902): N. 83. 8:o.
- Stonyhurst.** *College observatory.*
Results of meteorological and magnetical observations. 1901. 8:o.
- Strassburg.** *Universitdt.*
Dissertationen. 1900/1901: 81 st. 4:o & 8:o.

- Tokyo.** *Medicinische Facultät der Kaiserlich-Japanischen Universität.*
Mittheilungen. Bd. 5: No 2. 1901. 8:o.
- Torino.** *Museo di zoologia ed anatomia comparata.*
Bollettino. Vol. 16 (1900/01): N:o 404—415. 8:o.
— *R. Accademia delle scienze.*
Memorie. (2) T. 51. 1902. 4:o.
- Tromsø.** *Museum.*
Aarshefter. 21—22 (1898—1899): Afd. 2; 24 (1901). 8:o.
- Utrecht.** *Physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool.*
Onderzoekingen. (5) 3: Afl. 2. 1902. 8:o.
- Valparaiso.** *Museo de historia natural.*
Memoria presentada al Sr. Ministro de Instruccion pública... 1901.
8:o.
- Washington.** *National academy of sciences.*
Memoirs. Vol. 8. 1898. 4:o.
— *U. S. Weather Bureau.*
Bulletin. No. 30. 1901. 8:o.
Monthly weather review. 1901: 12 & Ann. summary; 1902: 1. 4:o.
- Wien.** *K. Akademie der Wissenschaften.*
Denkschriften. Math.-naturwiss. Classe. Bd 69; 73. 1901. 4:o.
Sitzungsberichte. Math.-naturwiss. Classe.
Abth. 1. Bd 110: H. 1—4. 1901. 8:o.
 > 2a. Bd 110: H. 1—7. 1901. 8:o.
 > 2b. Bd 110: H. 2—7. 1901. 8:o.
Sitzungsberichte. Philos.-hist. Classe. Bd 143 (1900). 8:o.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd 89: H. 2; 90: 1—2. 1901.
8:o.
Fontes rerum Austriacarum. Abth. 2: Bd 52—54. 1901. 8:o.
— *Erdbeben-Commission d. K. Akademie der Wissenschaften.*
Mittheilungen. N. F. N:o 2—6. 1901. 8:o.
— *K. K. Central-Anstalt für Meteorologie u. Erdmagnetismus.*
Beobachtungen. 1901: 1—12. 8:o.
Jahrbücher. N. F. Bd 36 (1899)—37 (1900). 4:o.
— *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd. 52 (1902): H. 3. 8:o.
— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Verhandlungen. 1902: No 3—4. 8:o.
— *v. Kuffner'sche Sternwarte.*
Publicationen. Bd 6: Th. 1. 1902. 4:o.
- Windsor, N. S. Wales.** *Mr. Tebbutt's observatory.*
Report. Year 1890—1900. 8:o.
- Würzburg.** *Physikalisch-medicinische Gesellschaft.*
Verhandlungen. N. F. Bd 34: No. 10—11; 35: 1. 1901—1902. 8:o.
Sitzungsberichte. 1901: 3—4. 8:o.
- Zürich.** *Naturforschende Gesellschaft.*
Vierteljahrsschrift. Jahrg. 46 (1901): H. 3—4. 8:o.
- Af Madame Veuve Godin, Guise.**
Le Devoir. T. 26 (1902): 4. 8:o.

Af utgifvarne:

Climat. Ed. N. DEMTCHINSKY. T. 3 (1902): No. 1—2. St. Pétersb. tv. Fol.

La feuille des jeunes naturalistes, publ. par A. DOLLFUS. (4) Année 32 (1901/02): N:o 377—378. 8:o.

— Catalogue de la bibliothèque. Fasc. 32: P. 1—2. 1902. 8:o.

Af författarne:

BOHLIN, K., Berättelse i astronomi 1902 ³¹/3. Sthlm 1902. 12:o.

CLEVE, P. T., Additional notes on the seasonal distribution of Atlantic plankton organisms. Göteborg 1902. 8:o.

FÜRST, C. M., Index-Tabellen zum anthropometrischen Gebrauche. Jena 1902. 4:o.

HASSELBERG, B., Sur une équation personnelle dans la mesure des clichés spectroscopiques. Catania 1902. 4:o.

HULTH, J. M., Nordenskiölds-bibliografi. Stockholm 1902. 8:o.

NATHORST, A. G., Polarforskningen. Sthlm 1902. 8:o.

NERMAN, G., Något om i Indalsälven, Ljusnan och Dalälven råhydrogr. förhållanden. Upsala 1901. 8:o.

GAUDRY, A., Sur la similitude des dents de l'homme et de quelques animaux. 2:e note. Paris 1901. 8:o.

HEPITES, S. C., Climatologie du littoral roumain de la Mer Noire. Liège 1901. 8:o.

— 3 st. småskrifter.

LEMSTRÖM, S., Om uppmätandet af den elektriska strömmen från atmosfären med spetsapparaten. Helsingfors 1900. 4:o.

— 2 st. småskrifter.

NASCIUS, F. C. DE, A la conquête du ciel! Livre 2: Fasc. 5—6. Nantes 1901—1902. 8:o.

RAZOUMOVSKY, C., Comte Grégoire Razoumovsky (1759—1837). Halle 1902. 8:o.

WILLE, N., Vegetationen i Seljord i Telemarken efter 100 Aars Forløb. Kristiania 1902. 8:o.

SHIPLEY, J. B., Récentes découvertes sur les communications entre l'Europe et l'Amérique au XV:e siècle. Paris 1902. 8:o.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 59.

1902.

Nº 6.

Onsdagen den 4 Juni.

INNEHÅLL:

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 205.
WIGERT, S. Quelques théorèmes sur les fonctions entières	» 207.
Skänker till Akademiens Bibliotek	sidd. 206, 215.

Med anledning af K. Maj:ts nådiga remiss af en skrivelse från Chefen för Sveriges Geologiska Undersökning rörande anskaffande af nya lokaler för nämnda undersökning i samband med en eventuell nybyggnad för Riksmuseum hade Akademiens byggnadskommitté afgifvit infordradt utlåtande, som af Akademien godkändes.

Ett af kommitterade uppgjordt förslag till »Promemoria innehållande särskilda bestämmelser till efterrättelse för författare i K. Vetenskaps-Akademiens skrifter» blef med ett par mindre ändringar af Akademien gillad och fastställd.

Akademiens revisorer Herrar KLASON, MONTELIUS och ZANDER hade i afgifven berättelse tillstyrkt att full ansvarsfrihet skulle för 1901 års förvaltning beviljas förvaltningsutskottet och kamreraren. Detta förslag bifölls af Akademien.

På förslag af Herr ALMSTRÖM beslöt Akademien att öfverlemna ett exemplar i silfver af medaljen öfver J. A. WAHLBERG till Herr FRIEDRICH WANDERS, Vertreter der Neu Guinea Compagnie i Honkong, såsom ett uttryck för Akademiens erkännande af hans visade intresse för den etnografiska vetenskapen

På tillstyrkan af kommitterade antogos till införande i Akademiens skrifter följande inlämnade afhandlingar:

i Akademiens Handlingar: Zur oberdevonischen Flora der Bären-Insel af professor A. G. NATHORST;

i Bihanget till Handlingarne: 1:a) Tres species novæ generis *Canthocampti* e Novaja Semlja et Sibiria boreali sive Trenne nya arter af släktet *Canthocamptus* från Novaja Semlja och Norra Sibirien af professor W. LILLJEBORG; 2:a) On some points of relation between the morphological structure of the intestine and the diet of reptiles af docenten E. LÖNNBERG; 3:o) Vereinfachte Formeln für Astrogramme af professor K. BOHLIN;

i Öfversigten: den i innehållsförteckningen upptagna afhandlingen.

Följande skänker anmälades:

Till Akademiens Bibliotek:

Stockholm. *K. Statistiska Centralbyrdn.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. Q: 1900; R: 14: 1. 1900. 4:o.

— *Karolinska mediko-kirurgiska institutet.*

2 diss. 1902. 8:o.

— *K. Landtbruks-Akademiens experimentalfält.*

Meddelanden N:o 65. 1902. 8:o.

— *Kongl. Sjökarteverket.*

Svenske Lotsen 1894: Tillägg N:o 8. 1902 ¹⁶/₄. 8:o.

Upsala. *K. Vetenskaps societeten.*

Nova acta. (3) Vol. 20: Fasc. 1. 1901. 4:o.

Berlin. *K. Preussische Akademie der Wissenschaften.*

Abhandlungen Jahr 1901. 4:o.

Sitzungsberichte. 1902: 1–22. 8:o.

— *K. botanischer Garten und Museum.*

Notizblatt. Append. 9. 1902. 8:o.

— *Deutsche geologische Gesellschaft.*

Zeitschrift. Bd 53 (1901): H. 4. 8:o.

KOKEN, E., Die deutsche geolog. Gesellschaft in den Jahren 1848—

1898, mit einem Lebensabriss von Ernst Beyrich. 1901. 8:o.

— *K. Sternwarte.*

Beobachtungs-Ergebnisse. H. 11. 1902. 4:o.

Bern. *Naturforschende Gesellschaft.*

Mitteilungen. Jahr 1901. 8:o.

Bonn. *Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Sitzungsberichte. 1901: H. 1–2. 8:o.

— *Naturhistorischer Verein d. preuss. Rheinlande.*

Verhandlungen. Jahrg. 58 (1901): H. 1–2. 8:o.

(Forts. å sid. 215.)

Quelques théorèmes sur les fonctions entières.

PAR S. WIGERT.

[Communiqué le 14 Mai 1902 par G. MITTAG-LEFFLER.]

Dans un mémoire fondamental sur les fonctions entières¹⁾ M. POINCARÉ a, le premier, mis en évidence le fait remarquable qu'une fonction $G(x)$ du genre zéro satisfait toujours à la condition suivante

$$(1.) \quad \lim_{r=\infty} e^{-ar} |G(x)| = 0, \quad r = |x|$$

quelque petit que soit le nombre positif α . Cependant, cette propriété appartient aussi à certaines fonctions du genre un, et j'ai indiqué à une autre occasion²⁾ la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

ait la dite propriété, à savoir

$$(2.) \quad \lim_{n=\infty} n \sqrt[n]{|A_n|} = 0.^3)$$

¹⁾ Bulletin de la Soc. Math. de France 1883.

²⁾ Öfversigt af K. V. A:s förh., Octobre 1900.

³⁾ On peut déduire encore cette proposition plus générale: La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$\lim_{r=\infty} e^{-ar^q} \cdot |G(x)| = 0, \quad q > 0$$

a étant arbitraire, c'est que

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n^q} \cdot n \sqrt[n]{|A_n|} = 0.$$

Dans ce qui suit j'appellerai »fonctions G » toutes les fonctions entières satisfaisant à l'une ou l'autre des deux conditions équivalentes (1.) et (2.), ce qui me permet d'énoncer plus nettement les résultats.

On s'aperçoit sans difficulté que l'équation (1.) peut être remplacée par la suivante

$$(1 \text{ bis.}) \quad |G(x)| < e^{ar}, \quad r \geq r'$$

puisque la quantité α est arbitraire. Maintenant je suis parvenu à un théorème lequel peut être regardé comme la réciproque de l'inégalité (1 bis.), à savoir: *Soit une fonction G et un nombre positif α , tel petit qu'on le veut. Alors l'inégalité*

$$(3.) \quad |G(x)| > e^{-\alpha r}$$

aura lieu pour des valeurs de r au delà de toute limite quand la variable x parcourt un vecteur quelconque. Établir ce résultat sera l'objet principal du présent travail.

Je commencerai par démontrer un théorème auxiliaire qui présentera peut-être aussi quelque intérêt. *Théorème: En désignant toujours par $G(x)$ et $\bar{G}(x)$ des fonctions G , la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{G(n)}{|n|} x^n$$

représente une fonction entière de la forme

$$e^x \bar{G}(x).$$

Inversement, étant donnée $\bar{G}(x)$, il existe une seule fonction $G(x)$ telle que

$$(4.) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G(n)}{|n|} x^n = e^x \bar{G}(x).$$

J'en ai donné dans mes leçons à l'Université pendant ce semestre une démonstration très simple en m'appuyant sur les premiers résultats trouvés par M. HADAMARD (Journal de Math. 1893). On trouvera à la fin de ces pages une autre démonstration qui se rattache, comme la présente recherche, à l'intégrale fameuse d'ABEL-LAPLACE sous la forme généralisée considérée par MM. POINCARÉ et BOREL.

Considérons, d'une manière plus générale, une série de la forme

$$(5.) \quad \sum_{n=0}^{\infty} G(n) \alpha_n x^n$$

en désignant par $G(x)$ seulement une fonction entière. Les coefficients α_n sont choisis tellement que le rayon de convergence de la série

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

soit différent de zéro. Désignons de plus par $M(r)$ la fonction majorante de $G(x)$:

$$M(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |A_n| r^n$$

et supposons que l'on ait encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M(n) |\alpha_n|} = \text{quantité finie.}$$

Alors il sera permis, dans la série (5.), d'intervertir l'ordre des sommations; nous obtiendrons ainsi ¹⁾ la formule suivante

$$(6.) \quad \sum_{n=0}^{\infty} G(n) \alpha_n x^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} q_{\nu}(x)$$

en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{\nu}(x) = \sum_{\mu=1}^{\nu} B_{\mu}^{(\nu)} x^{\mu} q^{(\mu)}(x), \quad q^{(\mu)}(x) = \frac{d^{\mu} q}{dx^{\mu}} \\ B_{\mu}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=0}^{\mu-1} (-1)^{\lambda} \frac{\mu - \lambda}{\lambda} < \frac{\mu^{\nu} 2^{\mu-1}}{\mu}. \end{array} \right.$$

Soit maintenant $G(x)$ une fonction G et faisons

$$q(x) = e^x.$$

Il vient

$$q_{\nu}(x) = e^x H_{\nu}(x), \quad H_{\nu}(x) = \sum_{\mu=1}^{\nu} B_{\mu}^{(\nu)} x^{\mu}$$

¹⁾ Voir ma note citée, pag. 1002 et suiv.

et par suite

$$(7.) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G(n)}{n!} x^n = e^x \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} H_{\nu}(x).$$

D'abord il est facile de voir que la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} H_{\nu}(x)$ définit une fonction G . Nous avons en effet

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} H_{\nu}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} B_{\mu}^{(\nu)} x^{\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

où

$$a_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu} B_n^{(\nu)}.$$

Fixons ensuite un nombre positif ε , tel petit qu'on le veut. D'après l'hypothèse faite sur la fonction $G(x)$, on peut assigner un entier n tel que

$$|A_{\nu}| < \left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{\nu}, \quad \nu \geq n.$$

On en conclut

$$|a_n| < \frac{2^{n-1}}{n!} \sum_{\nu=n}^{\infty} \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\nu} \varepsilon^{\nu} < \frac{2^{n-1} \varepsilon^n}{(1-\varepsilon)n!}$$

ou bien

$$n \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{2^{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \cdot \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \cdot \varepsilon$$

et par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

La démonstration de la proposition inverse n'offre pas non plus de difficulté. Partons de la série

$$\tilde{G}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

et formons le produit

$$e^x \tilde{G}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^{\mu}}{\mu!} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

où

$$b_n = \sum_{\nu=0}^n \frac{a_\nu}{|n-\nu|}.$$

En employant les notations

$$C_n = |n a_n, (n)_\nu = \frac{n(n-1) \dots (n-\nu+1)}{| \nu |}$$

on aura donc

$$|n b_n = \sum_{\nu=0}^n C_\nu (n)_\nu, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = 0.$$

On verra par là, en se reportant à mes recherches antérieures,¹⁾ qu'il existe une seule fonction G satisfaisant aux conditions

$$G(n) = |n b_n$$

à savoir

$$G(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \frac{x(x-1) \dots (x-\nu+1)}{| \nu |}.$$

C. q. f. d.

Le théorème auxiliaire démontré tout à l'heure nous permet d'établir d'une manière assez curieuse l'inégalité (3.). Soit en effet $\bar{G}(x)$ une fonction G , et supposons qu'il existe un nombre positif α tel que

$$|\bar{G}(x)| < e^{-\alpha x}, \quad x > x_0$$

en prenant pour le vecteur considéré l'axe positif des valeurs réelles de x , ce qui ne diminue pas la généralité. Mettons ensuite

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G(n)}{|n|} x^n = e^x \bar{G}(x)$$

et considérons l'intégrale bien connue

$$(8.) \quad f(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} F(\omega x) d\omega.$$

¹⁾ Loc. cit., pag. 1006 et suiv.

Il résulte de notre hypothèse sur la fonction $\bar{G}(x)$ que l'intégrale $f(x)$ sera convergente pour chaque valeur de x appartenant à l'intervalle

$$1 < x < \frac{1}{1-\alpha}$$

Or, d'après un beau théorème dû à M. PHRAGMÉN,¹⁾ le vrai domaine de convergence de l'intégrale (8.) est constitué par le *polygone de sommabilité*²⁾ de M. BOREL relatif à la fonction $f(x)$. D'autre part, on aura

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n)x^n$$

et cette série représente une fonction entière de $\frac{1}{1-x}$, comme je l'ai démontré dans mon travail cité plusieurs fois. Le point $x = 1$ étant nécessairement singulier pour la fonction $f(x)$, nous sommes ainsi parvenus au résultat impossible que l'intégrale (8.) doit être convergente en dehors du polygone de M. BOREL. Notre théorème est donc démontré.

Voyons comment se rattache cette proposition aux résultats analogues trouvés préalablement. Désignons en effet par ϱ l'exposant de convergence³⁾ de la fonction entière $G(x)$. D'après un théorème de M. HADAMARD l'inégalité

$$|G(x)| > e^{-re^{+\epsilon}}$$

sera satisfaite sur une infinité de cercles de rayons infiniment croissants, e étant un nombre positif arbitraire. De plus, pour une fonction G on aura visiblement $\varrho \leq 1$. On voit par là qu'en supposant $\varrho < 1$, le résultat trouvé par moi devient une conséquence du théorème de M. HADAMARD. Dans le cas où $\varrho = 1$, au contraire, la limite inférieure de $|G(x)|$, fournie par ce théorème, est d'un ordre de grandeur infiniment petit par rapport à e^{-ar} .

¹⁾ Comptes Rendus 1901.

²⁾ Cf. p. ex. BOREL: Leçons sur les séries divergentes.

³⁾ Pour ce qui concerne le nombre ϱ et le théorème de M. HADAMARD, on consultera p. ex. BOREL: Leçons sur les fonctions entières.

Avant de terminer, je voudrais donner encore une application de l'intégrale remarquable (8.), on plutôt d'une intégrale un peu plus générale. Il s'agit de la démonstration du théorème énoncé pag. 1, note.

Soit en effet $H(x)$ une fonction entière, et supposons d'abord que l'inégalité

$$|H(x)| < e^{ar^e}, \quad r \geq r'$$

ait lieu pour un vecteur quelconque, ce qui revient à dire que l'intégrale

$$(9.) \quad \int_0^\infty e^{-ar^e} H(x) dr$$

sera convergente pour toute valeur positive de α , quel que soit l'argument θ de la variable x . Il en résulte que l'intégrale

$$(10.) \quad \bar{H}(x) = \int_0^\infty e^{-\omega^e} H(x\omega) d\omega$$

définit une fonction entière de x , ce qu'on voit aisément en l'écrivant sous la forme

$$(10 \text{ bis.}) \quad \frac{1}{r} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\omega}{r}\right)^e} H(e^{i\theta}\omega) d\omega.$$

Or, d'après des formules connues dans la théorie de la fonction Γ , nous avons

$$\bar{H}(x) = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^\infty a_n \Gamma\left(\frac{n+1}{e}\right) x^n, \quad \text{si } H(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n x^n$$

et de plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\Gamma\left(\frac{n+1}{e}\right)}}{\frac{1}{n^e}} = \frac{1}{(qe)^{\frac{1}{e}}}$$

ce qui montre bien que $\bar{H}(x)$ ne peut pas être une fonction entière, à moins que la condition

$$(11.) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^e} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

ne soit pas satisfaite.

Il nous reste à démontrer la proposition réciproque, selon laquelle l'équation (11.) entraîne celle-ci

$$(12.) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-\alpha r^{\varrho}} |H(x)| = 0.$$

Sous cette hypothèse $\overline{H}(x)$ devient une fonction entière, donc, l'intégrale (9.) sera convergente pour chaque valeur positive de α , quand la variable x parcourt un vecteur quelconque. Or, l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\varrho}} H(x\omega) \omega^{\varrho-1} d\omega = \frac{1}{\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Gamma\left(\frac{n+\varrho}{\varrho}\right) x^n$$

étant aussi une fonction entière, on établit de même la convergence de

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha r^{\varrho}} H(x) r^{\varrho-1} dr$$

pour toute valeur positive de α . Nous avons de plus

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha r^{\varrho}} H(x) r^{\varrho-1} dr = \frac{e^{i\theta}}{\alpha \varrho} \int_0^{\infty} e^{-\alpha r^{\varrho}} H'(x) dr - \frac{1}{\alpha \varrho} \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-\alpha r^{\varrho}} H(x)$$

et la seconde intégrale sera nécessairement convergente, puisque la dérivée $H'(x)$ satisfait aussi à la condition (11.) Par conséquent

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-\alpha r^{\varrho}} H(x)$$

est une quantité finie laquelle ne saurait avoir aucune valeur différente de zéro, à cause de la grandeur arbitraire du nombre α . Le théorème est donc complètement démontré.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 206.)

- Bruxelles.** *Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie.*
Bulletin. T. 12 (1898): Fasc. 4. 8:o.
- Budapest.** *K. Ungarische Geologische Anstalt.*
Földtani közlöny (Geolog. Mittheilungen). Kötet 32 (1902): Füz. 1-4.
8:o.
- Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd 13: H. 5. 1902. 8:o.
- Buenos Aires.** *Sociedad científica Argentina.*
Anales. T. 53 (1902): Entr. 3-4. 8:o.
- Buitenzorg.** *Jardin botanique.*
Mededeelingen. 53, 55. 1902. 8:o.
- Cambridge.** *University library.*
Report of the library syndicate. Year 1901. 4:o.
- Cambridge, Mass.** *Museum of comparative zoölogy.*
Bulletin. Vol. 40: No 1. 1902. 8:o.
- Dorpat.** *Naturforscher-Gesellschaft.*
Schriften. 10. 1902. 8:o.
- Hamburg.** *Horizontalpendel-Station.*
Mittheilungen. 1902: 1-2. 4:o.
- Helsingfors.** *Société Finno-Ougrienne.*
Journal. 20. 1902. 8:o.
Mémoires. 15: 2. 1902. 8:o.
- Kazan.** *Kejserl. universitetet.*
Učenyija Zapiski. 69 (1902): 1. 8:o.
Akademiskt tryck. 1902. 2 st. 8:o.
- Kharkow.** *Université Impériale.*
Annales. 1902: Kn. 1. 8:o.
- Kiel.** *Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere und biologische Anstalt auf Helgoland.*
Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. 5: H. 1. 4:o.
- Kjöbenhavn.** *Det danske meteorologiske Institut.*
Nautisk-meteorologisk Aarbog. 1901. 4:o.
- Krakau.** *Académie des sciences.*
Atlas geologiczny Galicyi. Zesz. 13 & Text. 1901. Fol. & 8:o.
Biblioteka pisarzy Polskich. T. 41. 1902. 8:o.
Rozprawy. Wydział hist.-filozoficzny. (2) T. 16-17. 1902. 8:o.
Rozprawy. Wydział filologiczny. (2) T. 18. 1901. 8:o.
Rozprawy. Wydział matem.-przyrodniczy. (2) T. 18-19. (3) T. 1:
A-B. 1901. 8:o.
Sprawozdania komisji do Badania historyi. T. 6: Indeks; T. 7. 1902.
4:o.
- Scriptores rerum polonicarum. T. 18. 1901. 8:o.
FEDEROWSKI, Lud bialoruski. T. 2: Cz. 1. 1902. 8:o.
FINKEL, L., Bibliografia historyi Polskiej. Cz. 2: Zes. 4. 1901. 8:o.
- Kristiania.** *Det norske Justervæsen.*
Aarsberetning. 25 (1902). 8:o.

- Leipzig.** *Verein für Erdkunde.*
Mittheilungen. 1901. 8:o.
- Lisboa.** *Assistencia nacional aos tuberculosos.*
Relatorio do conselho central. 1902. 8:o.
- London.** *Royal Astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 62 (1901/02): No 6. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vols. 81—82 (1902): 6. 8:o.
Proceedings. Vol. 18 (1902): No 252. 8:o.
— *Geological society.*
Quarterly journal. Vol. 58 (1902): P. 2. 8:o.
— *Linnean society.*
Journal. Botany. Vol. 35: N:o 244. 1902. 8:o.
Journal. Zoology. Vol. 28: No. 184. 1902. 8:o.
— *R. Meteorological society.*
Hints to meteorological observers. Ed. 5. 1902. 8:o.
— *Royal society.*
Proceedings. Vol. 69 (1901/02): No 459. 8:o.
Reports to the Evolution Committee. 1. 1902. 8:o.
- London, Ontario.** *Entomological society.*
The Canadian entomologist. Vol. 34 (1902): No 5. 8:o.
- Madras.** *Government observatory.*
Report on the Kodaikanal and Madras observatories. 1901. Fol.
- Madrid.** *Comisión del mapa geológico de España.*
Memorias. T. 4. 1902. 8:o.
- Manchester.** *Literary and philosophical society.*
Memoirs and proceedings. Vol. 46 (1901/02): P. 5. 8:o.
- Melbourne.** *Royal society of Victoria.*
Proceedings. N. S. Vol. 14 (1901/02): P. 2. 8:o.
— *Zoological & acclimatisation society.*
Annual report. 38 (1902). 8:o.
- Milano.** *Società Italiana di scienze naturali.*
Atti. Vol. 41 (1902): Fasc. 1. 8:o.
- Montevideo.** *Observatorio meteorológico del colegio Pío de Villa Colón.*
Boletín mensual. Año 13 (1901): Núms. 1—3. 8:o.
— *Sociedad meteorologica Uruguaya.*
Resumen de las observaciones pluviométricas. Año 8 (1899): 1—4. 8:o.
- Montreal.** *Natural history society.*
Canadian record of science. Vol. 8 (1901/02): N:o 7. 8:o.
- Moscou.** *Société imp. des naturalistes.*
Bulletin. Année 1902: N:o 1—2. 8:o.
- Mount Hamilton.** *Lick observatory.*
Publications. Vol. 7: P. 1—3. 1902. 4:o.
- München.** *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Math.-phys. Classe. 1902: H. 1. 8:o.
- New York.** *Botanical Garden.*
Bulletin. Vol. 2: No. 7. 1902. 8:o.

- New York.** *Observatory of Columbia university.*
Contributions. No. 19. 1902. 8:o.
- Ottawa.** *Geological survey of Canada.*
Contributions to Canadian Palæontology. Vol. 2: P. 2; 4: P. 2. 1900—1901. 8:o.
- WHITEAVES, J. F.,** Catalogue of the marine invertebrata of eastern Canada. 1901. 8:o.
- Paris.** *Société de géographie.*
La Géographie. Année 1902: N:o 5. 8:o.
- Pisa.** *Società Toscana di scienze naturali.*
Processi verbali. Vol. 13 (1902): p. 9—40. 8:o.
- Rio de Janeiro.** *Repartição da carta marítima, Directoria de meteorologia.*
Boletim das observações meteorológicas e dos resultados magneticos Anno 6 (1901/02): N. 7—9. Fol.
- Roma.** *Reale accademia dei Lincei.*
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.
Rendiconti. (5) Vol. 11 (1902): Sem. 1: Fasc. 9. 8:o.
Classe di scienze morali, storiche e filologiche.
Rendiconti. (5) Vol. 11: Fasc. 1—2. 1902. 8:o.
— *R. Comitato geologico d'Italia.*
Bollettino. Anno 1901: N. 4. 8:o.
- St. Petersburg.** *Observatoire météorologique de l'Université Imp.*
Travaux du Cabinet de géographie. Fasc. 2. 1902. 8:o.
- San José.** *Instituto físico-geográfico de Costa Rica.*
Boletín. Año 2 (1901/1902): No. 15. 8:o.
- Strassburg.** *K. Hauptstation für Erdbebenforschung.*
Monatsbericht. 1901: 12. 8:o.
— *Geologische Landes-Untersuchung von Elsass-Lothringen.*
Abhandlungen zur geologischen Specialkarte von Elsass-Lothringen. N. F. H. 5. 1902. 8:o.
- Sydney.** *Department of mines and agriculture. Geol. survey branch.*
Mineral resources. N:o 10. 1901. 8:o.
- Tachkent.** *Observatoire astronomique et physique.*
Publications. 3: Texte & Atlas. 1901. 4:o & Fol.
- Tiflis.** *Tifliser Physikalisches Observatorium.*
Beobachtungen. Jahr 1898. 4:o.
Ežemėsjačnyj bjulleten. 3 (1900): 7—12; 4 (1901): 1—8. 4:o.
- Torino.** *R. Accademia delle scienze.*
Atti. Vol. 37 (1901/02): Disp. 6—10. 8:o.
- Toronto.** *Entomological society.*
Annual report. 32 (1901). 8:o.
- Washington.** *U. S. Weather Bureau.*
Bulletin. J. 1902. 4:o.
- Wien.** *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd 1: H. 4. 1902. 8:o.
— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Verhandlungen. 1902: No 5—6. 8:o.

Af Madame Veuve Godin, Guise.

Le Devoir. T. 26 (1902): 5. 8:o.

Af Herrar Wahlström & Widstrand.

Bilder ur Nordens flora. Efter Palmstruch m. fl. Svensk Botanik af
C. A. M. LINDMAN. H. 6. 1902. 8:o.

Af utgifvarne:

Revista Chilena de historia natural. Red. C. E. PORTER.

Año 6 (1902): Núm. 1. 8:o.

Af författarne:

HELLMANN, G., Regenkarte der Provinz Sachsen u. d. Thüringschen
Staaten. Berlin 1902. 8:o.

HIPPAUF, H., Rectification u. quadratur des Kreises. Breslau 1902. 8:o.

HULL, E., The physical history of the Norwegian Fjords. 1902. 8:o.

LEVASSEUR, E., Histoire des classes ouvrières et de l'industrie en
France avant 1789. Éd. 2. T. 1—2. Paris 1900—1901. 8:o.

MIDDENDORP, H. W., Die Beziehung zwischen Ursache, Wesen u.
Behandlung d. Tuberkulose. Groningen 1899. Fol.

— Die Ursache d. Tuberkulose nach Prof. Dr. R. Koch u. dessen
Heilverfahren. Lpz. 1902. 8:o.

SPOOF, A. R., Notes about some in Finland found species of non-
parasitical worms. Åbo 1889. 8:o.

WILLE, N., Über Gasvakuolen bei einer Bakterie. Lpz. 1902. 8:o.

WOEIKOF, A., Platzregen u. grosse tägliche Regenmengen. 1900. 8:o.

— 2 st småskrifter.

Utgifningsdag 10 september 1902.

Stockholm 1902. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 59.

1902.

Nº 7.

Onsdagen den 10 september.

INNEHÅLL:

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 219.
HOLMGREN, E., Om primtalens fördelning	» 221.
EULER, H., Ueber die Zersetzung von Diazoniumsalzen	» 227.
PALMÆR, V., Versuche zur Darstellung des tetramethylammoniums	» 237.
NILSSON, H., Einige Beobachtungen über die tägliche Variation im Leitungsvermögen der atmosphärischen Luft in Upsala	» 243.
Skänker till Berzelius-museet och Akademiens Bibliotek sid. 220, 226, 236, 242, 249.	

Tillkännagafs, att Akademiens inländske ledamot af åttonde klassen f. d. professorn vid Tekniska Högskolan OLOF GUSTAF NORDENSTRÖM samt utländske ledamoten af första klassen professorn vid universitetet i Berlin LAZARUS FUCHS och utländske ledamoten af sjunde klassen geheimerädet professor RUDOLF VIRCHOW med döden afgått.

Med anledning af K. Ecklesiastik-Departementets remiss å en på diplomatisk väg framförd hemställan från den första internationela seismologiska konferensen om bildandet af en internationel association för anordnande af internationela seismologiska observationer afgåfvo Herrar HASSELBERG och ARRHENIUS infordradt utlåtande, som af Akademien godkändes.

I öfverensstämmelse med af biblioteksinspektionen och bibliotekarien afgifvet utlåtande beslöt Akademien förklara sig ej hafva något att anmärka mot det förslag till ordnande och förtecknande af offentliga arkiv, som blifvit afgifvet af Riksarkivarien och hvaröfver Akademien genom Kongl. Maj:ts remiss blifvit befald att yttra sig.

En genom K. Ecklesiastik-Departementet emottagen inbjudning till deltagande i en internationel utställning af historiska och nutida dräkter i St. Petersburg beslöt Akademien öfversända till Nordiska Museets styrelse.

På grund af inkommen ansökan beviljade Akademien föreståndaren för Statens meteorologiska Centralanstalt professor R. RUBENSON från och med september månads utgång afsked från hans befattning såsom föreståndare för den meteorologiska Centralanstalten.

Från fil. kand. A. TULLGREN, docenten L. A. JÄGERSKIÖLD, doktor O. CARLGREN, fil. lic. HJ. ÖSTERGREN, fil. kand. E. NORDENSKIÖLD och docenten S. BENGTSSON hade ansökningar inkommit om understöd från Regnells zoologiska gåfvomedel.

På grund af en skrifvelse från inspektor för den Linnéiska stiftelsen å Hammarby professor TH. M. FRIES beslöt Akademien till denna stiftelse öfverlämna en samling böcker, som tillhört Linné.

Herr WITTRÖCK redogjorde för Regnellska stipendiatens Dr. O. MALMES senaste forskningar i Sydamerika.

På tillstyrkan af komiterade antogs till införande i Akademiens skrifter följande inlemnade afhandlingar:

i Akademiens Handlingar: 1:a) Beiträge zur Kenntnis einiger mesozoischen Cycadophyten af professor A. G. NATHORST; 2:a) Ueber die Embryologie von *Ruppia rostellata* KOCH af docenten S. MURBECK;

i Bihaget till Handlingarne: 1:a) Blattodeen aus Kamerun af fil. kand. HJ. BORG; 2:a) Färgbestämningar för klorofyllet hos skilda växtformer af professor B. JÖNSSON; 3:e) Bidrag till kännedomen om usninsyran. V—X. af professor O. WIDMAN;

i Öfversigten: de i innehållsförteckningen upptagna fyra afhandlingarne.

Följande skänker anmälades:

Till Berzelius Museet:

Nomenclatura química del celebre Sueco Berzelius. Barcelona. 1832. Skänkt af professor DON JOSÉ RAMON DE LUANCO i Castropol, Asturien.

Om primtalens fördelning.

Af ERIK HOLMGREN.

(Meddeladt den 10 September 1902 af M. FALK.)

I sin afhandling öfver primtalen uttalar RIEMANN satsen att den approximativa formeln för antalet primtal $F(x)$, som äro $< x$

$$F(x) = Li(x),$$

der $Li(x)$ betyder integrallogaritmen, är riktig, så när som på storheter af ordningen $x^{\frac{1}{2}}$.

I öfverensstämmelse härmed bevisar v. KOCH ¹⁾ med tillhjälp af en ny formel för den talteoretiska funktionen $\psi(x)$ (def. nedan) och stödjande sig på den RIEMANNska satsen (som man ännu icke lyckats bevisa) att de komplexa nollställena till RIEMANNS funktion $\zeta(s)$ ha sina reela delar $= \frac{1}{2}$, att

$$(1) \dots |F(x) - Li(x)| < C\sqrt{x}(\log x)^2,$$

der C är en konstant. ²⁾

Syftet med föreliggande uppsats är att visa att detta resultat ock kan erhållas såsom en följd ur den undersökning, som VALLÉE-POUSSIN i sin afhandling „Sur la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, ³⁾ p. 48—53 utför vid beviset för den viktiga olikheten

¹⁾ Acta math. bd 24. Jfr Vet. Akad. Öfversigt 1900.

²⁾ Öfverallt i det följande användes bokstafven C som beteckning för en konstant (som i allmänhet på olika ställen har olika värden).

³⁾ Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, t. 59 (1899).

$$|F(x) - Li(x)| < \frac{x}{\log x} \sqrt{p \log x} e^{-\sqrt{p \log x}},$$

$$p = 0,03282.$$

Låt

$$\psi(x) = \sum_{p^m < x} \log p = \sum_{p < x} \log p + \sum_{p < x^{1/2}} \log p + \dots,$$

där p i den första summan skall genomlöpa alla primtal, som satisfiera olikheten $p < x$, i den andra alla, som satisfiera olikheten $p < x^{1/2}$, o. s. v.

Vi bevisa i det följande, att

$$(2) \dots \dots \dots |\psi(x) - x| < C\sqrt{x}(\log x)^2,$$

hvarur den önskade olikheten (1) lätt följer.¹⁾

Vi utgå från formlerna (4), (5), p. 49 i den citerade afhandlingen af VALLÉE-POUSSIN

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \sum_{p^m < x} \log p &\leq \frac{kx}{\log(1+k)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{\varrho} \frac{(1+k)^{\varrho} - 1}{\log(1+k)} \frac{x^{\varrho}}{\varrho^2} \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1+k)^{-2m} - 1}{\log(1+k)} \frac{x^{-2m}}{4m^2}, \end{aligned} \right.$$

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \sum_{p^m < x} \log p &\geq \frac{kx}{(1+k) \log(1+k)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{\varrho} \frac{1 - (1+k)^{-\varrho}}{\log(1+k)} \frac{x^{\varrho}}{\varrho^2} \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - (1+k)^{2m}}{\log(1+k)} \frac{x^{-2m}}{4m^2}, \end{aligned} \right.$$

där ϱ betyder ett komplext nollställe till $\zeta(s)$, \sum_{ϱ} en summa tagen öfver alla dessa nollställena och k ett godtyckligt positivt tal.

¹⁾ Enklarest med stöd af formeln $F(x) = \sum_{\nu=2}^x \frac{\Theta(\nu) - \Theta(\nu-1)}{\log \nu}$, där $\Theta(x) =$

$\sum_{p < x} \log p$. Differensen mellan $\Theta(x)$ och $\psi(x)$ är som bekant af ordningen \sqrt{x} .

Dessa formler föra till att såsom närmvärde för $\psi(x)$ taga halfva summan af högra membra. Det begångna felet \mathcal{A} blir då mindre än halfva differensen mellan de högra membra.

Vi få på detta sätt (med VALLÉE-POUSSIN) för differensen $\psi(x) - x$ följande uttryck

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \psi(x) - x = \\ & \left(\frac{1}{2} \frac{k(k+2)}{(1+k) \log(1+k)} - 1 \right) x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_q \frac{(1+k)^q - (1+k)^{-q} x^q}{2 \log(1+k)} \frac{x^q}{q^2} - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1+k)^{-2m} - (1+k)^{2m} x^{-2m}}{2 \log(1+k)} \frac{x^{-2m}}{4m^2} + \mathcal{A}, \end{aligned} \right.$$

där

$$|\mathcal{A}| < \frac{k^2 x}{2(1+k) \log(1+k)} + \sum_q \frac{2 - (1+k)^q - (1+k)^{-q} x^q}{2 \log(1+k)} \frac{x^q}{q^2} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 - (1+k)^{2m} - (1+k)^{-2m} x^{-2m}}{2 \log(1+k)} \frac{x^{-2m}}{4m^2}.$$

Vi sätta nu $k = x^{-\frac{1}{2}}$ och uppskatta de olika termerna i högra membra i (5). Endast vid summorna som innehålla q behöfva vi något modifiera de motsvarande uppskattningarna hos VALLÉE-POUSSIN.

Betrakta t. ex. summan

$$\sum_q \frac{2 - (1+k)^q - (1+k)^{-q} x^q}{2 \log(1+k)} \frac{x^q}{q^2}.$$

Vi uppdelar den i två summor, den ena Σ_1 , bestående af de termer, i hvilka $|q| \leq x^{\frac{1}{2}}$, den andra Σ_2 af de, i hvilka $|q| > x^{\frac{1}{2}}$. Vi betrakta först Σ_1 .

Tydligt är

$$\frac{2 - (1+k)^q - (1+k)^{-q} x^q}{2 \log(1+k)} \frac{x^q}{q^2} = \\ - \left(\frac{q \log(1+k)}{1 \cdot 2} + \frac{(q \log(1+k))^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right) \frac{x^q}{q},$$

hvarur följande olikhet följer

$$\left| \frac{2 - (1+k)^e - (1+k)^{-e} x^e}{2 \log(1+k)} \right| < C \frac{x^{\frac{1}{2}}}{|e|},$$

där C är en konstant oberoende af e (och x).

Är b ett godtyckligt tal mellan 0 och 1, så följer alltså, att

$$|\Sigma_1| < C x^{\frac{1}{2}b} \sum_e \frac{1}{|e|^{1+b}} x^{\frac{1}{2}}.$$

Enligt VALLÉE-POUSSIN, l. c. p. 42 är

$$\sum_e \frac{1}{|e|^{1+b}} < \frac{B}{b^2},$$

där B är en konstant oberoende af b . Således få vi

$$|\Sigma_1| < C \frac{x^{\frac{1}{2}b}}{b^2} x^{\frac{1}{2}}.$$

Tages $b = \frac{1}{\log x}$, så framgår att

$$|\Sigma_1| < C'' x^{\frac{1}{2}} (\log x)^{\frac{1}{2}}.$$

Betrakta nu Σ_2 .

Vi ha

$$|2 - (1+k)^e - (1+k)^{-e}| < 2 + |1+k|^{\frac{1}{2}} + |1+k|^{-\frac{1}{2}}.$$

Således få vi omedelbart

$$\left| \frac{2 - (1+k)^e - (1+k)^{-e} x^e}{2 \log(1+k)} \right| < \frac{C}{k} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{|e|^2}$$

och alltså

$$|\Sigma_2| < C x^{\frac{b}{2}} \sum_e \frac{1}{|e|^{1+b}} \cdot x^{\frac{1}{2}} < C'' x^{\frac{1}{2}} (\log x)^2.$$

Vi ha sålunda bevisat, att

$$\left| \sum_e \frac{2 - (1+k)^e - (1+k)^{-e} x^e}{2 \log(1+k)} \right| < C x^{\frac{1}{2}} (\log x)^2.$$

På analogt sätt bevisas att

$$\left| \sum_e \frac{(1+k)^e - (1+k)^{-e} x^e}{2 \log(1+k)} \right| < C x^{\frac{1}{2}} (\log x)^2.$$

För de öfriga termerna få vi gränser $< Cx^{\frac{1}{2}}$.

Vi ha t. ex.

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 - (1+k)^{2m} - (1+k)^{-2m} x^{-2m}}{2 \log(1+k)} \frac{1}{4m^2} \right| < \\ < 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\log(1+k)} \left(\frac{1+k}{x} \right)^{2m} \frac{1}{4m^2} < C \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1+k}{x} \right)^{2m} \frac{1}{4m^2} < C' x^{\frac{1}{2}};$$

p. s. s.

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1+k)^{2m} - (1+k)^{-2m} x^{-2m}}{2 \log(1+k)} \frac{1}{4m^2} \right| < C x^{\frac{1}{2}}.$$

Att termerna

$$\left(\frac{k(k+2)}{2(1+k) \log(1+k)} - 1 \right) x \text{ och } \frac{k^2 x}{2(1+k) \log(1+k)}$$

ha öfre gränser af formen $Cx^{\frac{1}{2}}$ är omedelbart tydligt.

Användas de erhållna olikheterna, så få vi enligt (5)

$$|\psi(x) - x| < Cx^{\frac{1}{2}} (\log x)^2.$$

(För C kan en öfre gräns anges.)

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Stookholm. *K. Statistiska Centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. C: 1901; K: 1—2: 1900; T: 29 (1901); V: 18 (1900—01); Y: I (1900). 4:o.

— *Generalstaben.*

Rikets allmänna kartverk, 1: 200,000. Bl. 50, 73. 1902. Fol.

Upsala. *Universitets-Biblioteket.*

Urkunder och författningar angående donationer vid Upsala K. Universitet. . . Samlade och utg. af TH. BRANDBERG och J. VON BAHR. Upsala 1902. 8:o.

— SWEDENBORG, E., *La sapienza angelica sulla divina providenza.* Trad. . . dal prof. Loreto Scocia. Torino 1874. 8:o.

— *La sapienza angelica sul divino amore e sulla divina sapienza.* Trad. dal prof. Loreto Scocia. Firenze 1877. 8:o.

— *Della nuova Gerusalemme . . .* Firenze 1869. 8:o.

Agram. *Societas historico-naturalis Croatica.*

Glasnik. Godina 13: Broj 1—6. 1901—1902. 8:o.

Albany. *New York state museum.*

Bulletin. N:o 33—43, 46—51. 1900—1902. 8:o.

Annual report. 52 (1898): 1—2; 53 (1899): 1—2. 8:o & 4:o.

Amsterdam. *Wiskundig genootschap.*

Revue semestrielle des publications mathématiques. T. 10: P. 2 (1902). 8:o.

Auxerre. *Société des sciences historiques et naturelles de l'Yonne.*

Bulletin. Vol. 55 (1901). 8:o.

Baltimore. *Peabody Institute.*

Annual report. 35 (1901/02). 8:o.

— *Johns Hopkins university.*

Circulars. Vol. 21 (1901/1902): N:o 158—159. 4:o.

American chemical journal. Vol. 26 (1901): N:o 4—6; 27 (1902): 1—3. 8:o.

American journal of mathematics. Vol. 24 (1902): N. 1. 4:o.

The American journal of philology. Vol. 22 (1901): 2—3. 8:o.

Studies in historical and political science. Ser. 19: N:o 10—12. 1901; 20: 1. 1902. 8:o.

— Extra vol. 7, 10, 16, 18, 20—21. 1890—1899. 8:o.

LEVASSEUR, E., *The American workman.* Amer. transl. Baltimore 1900. 8:o.

Batavia. *R. Magnetical and Meteorological Observatory.*

Observations. Vol. 23 (1900). Fol.

— *K. Natuurkundige Vereeniging in Nederl.-Indië.*

Natuurkundig tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. D. 61. 1902. 8:o.

Belgrad. *Académie Royale de Serbie.*

Glas. 63—64. 1901—1902. 8:o.

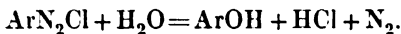
(Forts. å sid. 236.)

Über die Zersetzung von Diazoniumsalzen.

VON HANS EULER.

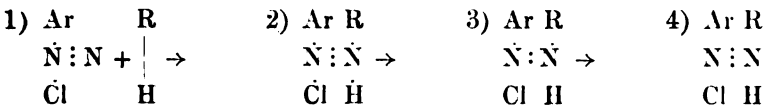
[Mitgeteilt am 10. September von P. T. CLEVE.]

In einer vorhergehenden Arbeit ¹⁾ habe ich mitgeteilt, dass die Zersetzungsgeschwindigkeit von Diazoniumsalzen in wässriger Lösung von der Natur des Anions unabhängig ist, dass sich also z. B. das Chlorid, Bromid, Sulfat und Nitrat des Diazoniums gleich schnell nach der typischen Gleichung zersetzen:



Hiermit, sowie mit der Thatsache, dass ein Zusatz von freier Mineralsäure zu verdünnten, wässrigen Lösungen von Diazoniumsalzen die Zersetzungsgeschwindigkeit derselben nicht verändert, lässt sich die Annahme von HANTZSCH ²⁾ über die Spaltung der Diazoniumsalze schwer in Einklang bringen.

Nach HANTZSCH bildet beim Zerfall in Lösung das Diazoniumsalz (1) zuerst ein Additionsprodukt (2), dieses einen Syndiazokörper (3), und letzteres lässt die Zersetzungsprodukte entstehen.



Es zerfällt nach HANTZSCH die verdünnte wässrige Lösung durch Bildung und spontanen Zerfall von Syndiazobenzolhydrat (l. c. p. 2524).

¹⁾ Öfversigt af Sv. Vet. Akad. Förhandl. 1902 N:r 4.

²⁾ Ber. d. deutsch. chem. Ges. 33, 2521, 1900.

Nun ist aber, wenn man ein solches Gleichgewicht wirklich annimmt, nach den Voraussetzungen von HANTZSCH der Schluss unabweislich, dass sich durch Zusatz von freier Mineralsäure das Gleichgewicht in der Lösung zu Gunsten der Diazoniumform verschieben muss, und zwar ausserordentlich stark. Haben also in der *neutralen* Lösung α Syndiazomoleküle die Zersetzungsgeschwindigkeit v hervorgerufen, so werden nach Zusatz von Säure etwa $\alpha/1000$ Syndiazomoleküle, die Zersetzungsgeschwindigkeit $v/1000$ bewirken.

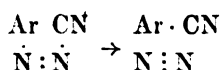
Dies ist aber, wie erwähnt, nicht der Fall, sondern die Zersetzungsgeschwindigkeit ist von der Konzentration der zugesetzten Säure unabhängig.

Ferner wäre anzunehmen, dass mit steigender Verdünnung also steigender elektrolytischer Dissociation des Diazoniumsalzes die Syndiaziform mehr und mehr verschwindet (wenn man nicht die hydrolytische Dissociation eine Rolle spielen lässt, was HANTZSCH selbst widerlegt hat). Die demnach zu erwartende Verringerung der Zersetzungsgeschwindigkeit tritt nach HANTZSCHS eigenen Versuchen nicht ein.

2) Nimmt man die von HANTZSCH auf Seite 2520 l. c. gemachte Formulierung an, also Bildung von Syndiazohaloid, so ergeben sich ebenfalls Bedenken.

Bei den festen Diazoniumhaloiden nimmt HANTZSCH ein Gleichgewicht zwischen Synform und Diazoniumform an; die gesteigerte Explosivität aller Diazoniumbromide, Rhodanide und besonders Jodide gegenüber den Chloriden und Sulfaten soll darauf beruhen, dass in den explosivsten Verbindungen das Gleichgewicht am meisten zu Gunsten der Synform verschoben ist. Es liegen also nach HANTZSCH ähnliche Verhältnisse vor, wie bei den Cyaniden in wässrig-alkoholischer Lösung. Darnach wäre aber wohl zu erwarten, dass auch in einer *Lösung* von Diazoniumbromid das Gleichgewicht mehr zu Gunsten der Synform verschoben wäre als in der entsprechenden Chloridlösung, dass also auch erstere sich schneller zersetzt. Dies ist aber, wie oben erwähnt, nicht der Fall. Nach HANTZSCH ist der schnelle

Zerfall das Charakteristikum der Synform. Nun hat HANTZSCH ¹⁾ nachgewiesen, dass z. B. in einer wässrigen, stark verdünnten Lösung von *p* Bromdiazoniumcyanid (siehe l. c. p. 2177) die kleinere Hälfte des gelösten Stoffes als dissociirtes Bromdiazoniumcyanid, die grössere Hälfte als undissociirtes Bromsyndiazocyanid besteht. Wird also den hypothetischen »Syndiazohaloiden» und dem experimentell nachgewiesenen »Syndiazohydrat» dieselbe Konstitution beigelegt, wie den »Syndiazocyaniden» so wäre zu erwarten dass die Lösungen letzterer sich rapide zersetzen. HANTZSCH selbst erinnert, als Beweis für seine Auffassung daran ²⁾, »dass gewisse dieser Syndiazokörper, z. B. die Syndiazocyanide, besonders leicht, und zwar gerade auch im undissociirten Zustande die typische Diazospaltung



erfahren.»

Indessen lässt sich nach dieser Überlegung *quantitativ* ein anderes Resultat erwarten. Wenn schon die durch keine Methode mehr nachweisbaren Mengen der Syndiaziform bei den Haloiden eine mässige Zersetzungsgeschwindigkeit hervorrufen, so müsste bei den entsprechenden Cyaniden, wo die Konzentration der Synform jedenfalls mehr als tausendmal grösser ist, die Zersetzungsgeschwindigkeit ganz ausserordentlich höher sein, als dies wirklich der Fall ist; dabei ist wieder wesentlich, dass sich Chlorid und Bromid desselben Diazoniumhydrates gleich schnell zersetzen.

Wenn man schliesslich noch bedenkt, dass ein experimenteller Beweis für die Existenz von Syndiazohaloiden, oder — hypothesenfreier — von kuppelnden Nichtelektrolyten dieser Zusammensetzung — nicht vorliegt, so dürfte die besprochene Hypothese wenig plausibel erscheinen.

¹⁾ Ber. d. deutsch. chem. Ges. 33, 2161, 1900.

²⁾ „ „ „ „ „ 33, 2521, 1900.

Andererseits liegt kein stichhaltiger Grund gegen die Annahme vor, dass die Diazoniumsalze selbst die charakteristischen Zersetzungen erleiden.

Erstreckt man die Untersuchung auf andere als verdünnte, wässrige Lösungen, so kompliziert sich der Vorgang dadurch, dass je nach den Versuchsbedingungen verschiedene andere Reaktionsprodukte auftreten können, nämlich die entsprechenden Kohlenwasserstoffe, Phenoläther oder Halogenbenzole wie aus den Versuchen von HANTZSCH hervorgeht.

Ich möchte in Folgendem noch einige orientierende Versuche über die Spaltung von Diazoniumsalzen in wässrig-alkoholischen Lösungen mitteilen:

1) Die Phenolspaltung einer $\frac{1}{40}$ normalen Lösung von Diazoniumchlorid erfolgt mit der gleichen Geschwindigkeit in einer 1 normalen Alkohollösung wie in reinem Wasser.¹⁾

1 norm. Alkohollös.

Reines Wasser.

$$K_{25} = 0,00120$$

$$K_{25} = 0,00122$$

Es konnten auch keine anderen Reaktionsprodukte als Phenol nachgewiesen werden.

2) Wird als Lösungsmittel 75 %-iger Alkohol verwendet, so ist die Zersetzung der Diazoniumsalze nicht mehr, wie in wässriger Lösung, unabhängig vom Anion. So wird z. B. aus einer $\frac{1}{20}$ normalen Lösung von Diazoniumsulfat in 75 %-igem Alkohol der Stickstoff mehr als doppelt so schnell entbunden als in der entsprechenden Diazoniumchloridlösung. Für die Geschwindigkeit der Stickstoffentwicklung aus einer 75 %-igen Alkohollösung lässt sich noch eine Reaktionskonstante berechnen, wie für die rein wässrigen Lösungen. Erstere Konstanten weichen nicht wesentlich von letzteren ab.

Diazoniumchlorid.

75 % Alkohol.

Wasser.

$$K_{25} = 0,0015$$

$$K_{25} = 0,00122$$

Indessen sei nochmals hervorgehoben, dass die Reaktion nicht rein in *einem* Sinne verläuft.

¹⁾ Vergleiche dagegen HANTZSCH, Ber. d. deutsch. chem. Ges. 35, 998, 1902.

Während, wie erwähnt, ein Zusatz von freier Mineralsäure zur *wässrigen* Lösung von Diazoniumsalzen deren Zersetzung *nicht* beschleunigt, kann ein solcher Zusatz zu einer *wässrig-alkoholischen* Lösung (50—100 % Alkohol) einen sehr erheblichen Einfluss ausüben.

Dies zeigt z. B. folgender Versuch:

1,32 g. *p*-Bromdiazoniumbromid in 100 cc. Lösungsmittel.
Lösungsmittel: 25 Vol. % Wasser, 75 Vol. % Alkohol. Temp. 30°.

Lösung $\frac{1}{2}$ normal an HBr.		Kein Zusatz von HBr.	
<i>t</i> (Minuten).	cc. entw. N ₂ .	<i>t</i> (Minuten).	cc. entw. N ₂ .
0	0	0	0
60	1,2	60	21
120	2,0	120	30
240	2,6	240	52
300	3,1	300	64

Es entstehen dabei in beiden Lösungen annähernd die gleichen Reaktionsprodukte:

C:a 90 % Brombenzol.

» 10 % bromärmere Produkte.

Dibrombenzol konnte nicht nachgewiesen werden.

In anderer Weise verändern sich Zersetzungsgeschwindigkeit und Reaktionsprodukte bei *p*-Toluoldiazoniumbromid in 75 % Alkohol durch Zusatz von BrH, wie später gezeigt wird.

Aus einer noch unbekannten Ursache scheint die Phenolsplaltung in wässrig-alkoholischer Lösung durch Säurezusatz zurückgedrängt zu werden. Dass dies auch in sehr konzentrierter wässriger Lösung der Fall ist, geht aus der Thatsache hervor, dass solche Lösungen durch Zusätze von Säuren und Neutralsalzen haltbarer gemacht werden.¹⁾

Katalyse durch kolloidale Metalle.

Nachdem volumetrisch konstatiert war, dass die Stickstoffentwicklung durch kolloidales Pt und Ag beschleunigt wird, wurde untersucht, ob dieser Effekt auf einer wirklichen Reak-

¹⁾ D. R. P. 85387. Verfahren zur Darstellung von haltbaren Diazoverbindungen in konzentrierter flüssiger oder fester Form.

tionsbeschleunigung beruht, oder ob nur der freigemachte Stickstoff schneller aus der der Lösung entfernt wird.

Die *titrimetrisch* ermittelten Reaktionskoeffizienten erwiesen sich genügend konstant. Für Diazoniumchlorid erhielt ich den

$$\text{Mittelwert: } K_{25} = 0,0080.$$

Die 2 Tage alte Pt lösung (elektrolytisch nach BREDIG dargestellt) enthielt etwa 0,0002 g. Pt pro Liter.

Es handelt sich also zweifellos um eine ächte Katalyse.

Der Temperaturkoeffizient.

Der Temperaturkoeffizient der Phenolspaltung in wässriger Lösung wurde an zwei Salzen gemessen, nämlich am Diazoniumchlorid und am *p*-Bromdiazoniumchlorid. Ich gebe in folgender Tabelle die Reaktionskonstanten an:

Diazoniumchlorid.	<i>p</i> -Bromdiazoniumchlorid.
$K_{15} = 0,00031$	$K_{40} = 0,000062$
$K_{25} = 0,00122$	$K_{50} = 0,00023$
$K_{30} = 0,0024$	$K_{70} = 0,0028$

Nach der ARRHENIUS'schen Formel ¹⁾ $q_{t_1} = q_{t_0} \cdot e^{A(T_1 - T_0)/T_1 T_0}$ berechnet sich der Koeffizient *A* zu 11905 für Diazoniumchlorid und zu 13634 für *p*-Bromdiazoniumchlorid. Es scheint also der Temperaturkoeffizient bei den verschiedenen Diazoniumsalzen nur wenig zu variieren.

Aus den gleich mitzuteilenden Reaktionskonstanten der verschiedenen Diazoniumsalze konnte deshalb mit Hilfe obiger Koeffizienten auf die gemeinsame Temperatur 50 extrapoliert werden, um die Konstanten direkt mit einander vergleichbar zu machen. ²⁾

¹⁾ Siehe Zeitschr. f. phys. Chem. 4, 227, 1889.

²⁾ Die Konstante wächst bei 10° Erhöhung der Temperatur etwa um das 3,8 fache. Der Temperaturkoeffizient ist bei der vorliegenden Reaktion also nicht erheblich grösser als bei der Inversion des Rohrzuckers. Vergl. auch die Zusammenstellung in VAN'T HOFF, Vorlesungen, 2. Aufl. S. 225, 1901.

Zersetzungsgeschwindigkeit verschiedener Diazoniumsalze.

1) Die Messungen an den Salzen des Diazoniums sind bereits mitgeteilt.

2) *o*-Toluoldiazoniumchlorid. Das Salz war hellgelb und sehr hygroskopisch.

$$K_{25} = 0,0035.$$

Die Methylgruppe in der *o*-Stellung verringert also die Stabilität der Diazoniumsalze. Dies erscheint auffallend da in der Kälte unter geeigneten Versuchsbedingungen ¹⁾ die beiden benachbarten Gruppen zur Bildung der Indazole zusammentreten.

3) *m*-Toluoldiazoniumchlorid. $K_{25} = 0,0027.$

4) *p*-Toluoldiazoniumchlorid. Nach Messungen von OSSWALD: $K_{25} = 0,000081.$

5) Pseudocumoldiazoniumchlorid. Nach Messungen von OSSWALD: $K_{25} = 0,0031.$

6) *m*-Benzoessäurediazoniumchlorid. In der Litteratur ist bis jetzt nur das Nitrat beschrieben. (Bei der *o*-Diazoniumbenzoesäure ist das Semichlorid erhalten worden.)

Das Chlorhydrat der *m*-Amidobenzoessäure wurde in alkoholischer, etwas saurer Lösung mit Amylnitrit diazotiert. Auf Zusatz von Aether wurde das Diazoniumsalz in Form gelblich-weißer Krystalle erhalten.

Bei einer Schmelzpunktsbestimmung verpuffte das Salz heftig bei etwa 105°; bei vorsichtigem Erhitzen ergab sich ein Schmelzpunkt bei 149—150° ohne Explosion. Eine titrimetrische Chlorbestimmung ergab:

Gef.: 20,05 % Cl.

Ber.: 19,24 % Cl.

Eine Messung der Zersetzungsgeschwindigkeit lieferte die Konstante $K_{25} = 0,0012.$

7) *p*-Benzoessäurediazoniumchlorid. Bis jetzt nur das entsprechende Nitrat bekannt. In gleicher Weise erhalten, wie das *m*-Salz. Weisse, feine Nadeln.

¹⁾ Vergl. Ann. 305, 289.

Gef.: 20,40 % Cl.

19,24 % Cl.

8) *o*-Anisoldiazoniumchlorid. Dieses in der Litteratur nicht beschriebene Diazoniumsalz wurde mittels Amylnitrit dargestellt, konnte aber nicht zur Krystallisation gebracht werden. Es wurde deshalb die Messung an einer aus den berechneten Mengen *o*-Anisidin, HCl und NaNO₂ hergestellten Lösung gemacht. $K_{80} = 0,0004$.

9) *p*-Anisoldiazoniumchlorid $K_{80} = 0,00044$.

10) *o*-Chlorbenzoldiazoniumchlorid $K_{70} = 0,000080$.

11) *m*-Chlorbenzoldiazoniumchlorid $K_{50} = 0,00115$.

12) *p*-Chlorbenzoldiazoniumchlorid $K_{60} = 0,00051$.

13) *m*-Brombenzoldiazoniumchlorid ¹⁾ $K_{45} = 0,0015$.

14) *p*-Brombenzoldiazoniumchlorid $K_{50} = 0,00023$.

Bei α und β Naphtalindiazoniumchlorid liessen sich unter den gegebenen Versuchsbedingungen die entsprechenden Messungen nicht ausführen wegen der bald eintretenden Kuppelung des entstehenden Naphtols mit dem noch unveränderten Diazoniumsalz.

In folgender Tabelle sind alle Konstanten, auf 50 umgerechnet, zusammengestellt.

Die Extrapolationen sind von 50° an aufwärts mit dem Koeffizienten 11905, von 50° abwärts mit dem Koeffizienten 13634 ausgeführt.

Alle Substituenten, mit Ausnahme der Methylgruppe in der *o*- und *m*-Stellung verringern hiernach und zwar in der *o*, *p* und *m*-Stellung die Geschwindigkeit der Phenolspaltung.

Bei mehrfacher Substitution scheint sich die Wirkung der einzelnen Substituenten zu addieren, wie aus der grossen Stabilität der Di- und Trihalogendiazoniumsalze in wässriger Lösung hervorgeht.

Eine Beziehung zu den interessanten Resultates von O. RUFF und STEIN ²⁾ zeigt sich nicht; eine solche ist aber auch

¹⁾ Eine Umlagerung in Chlorbenzoldiazoniumbromid findet nicht statt. Siehe HANTZSCH, Ber. d. deutsch. chem. Ges. 30, 2334, 1877.

²⁾ Ber. d. deutsch. chem. Ges. 34, 1668, 1901.

wegen der ganz verschiedenen Versuchsbedingungen kaum zu erwarten. Auf verdünnte Lösungen von Diazoniumsalzen, wie sie hier untersucht wurden, hat übrigens die Belichtung keinen Einfluss.

Diazoniumchlorid.	K	Diazoniumchlorid.	K
Benzol	0,027	<i>o</i> -Anisol	0,000011
<i>o</i> -Toluol	0,077	<i>p</i> -Anisol	0,000012
<i>m</i> -Toluol	0,060	<i>o</i> -Chlorbenzol	0,0000068
<i>p</i> -Toluol	0,0018	<i>m</i> -Chlorbenzol	0,00115
<i>ψ</i> -Cumol	0,068	<i>p</i> -Chlorbenzol	0,00015
<i>m</i> -Benzoesäure	0,0264	<i>m</i> -Brombenzol	0,0080
<i>p</i> -Benzoesäure	0,0059	<i>p</i> -Brombenzol	0,00028

Zusammenfassung.

1) Die Phenolspaltung der Diazoniumsalze in wässriger Lösung muss nach dem vorliegenden Thatsachenmaterial als eine Zersetzung des Diazoniumsalzes selbst, *nicht* einer Diazoverbindung aufgefasst werden.

2) In wässrig alkoholischer Lösung von Diazoniumsalzen verändern im allgemeinen schon geringe Mengen freier Säure Art und Geschwindigkeit der Zersetzung.

3) Es wurde der Temperaturkoeffizient der Phenolspaltung bestimmt.

4) Durch kolloidales Platin wird die Phenolspaltung katalytisch beschleunigt.

5) Von den Substituenten im Benzolkern: CH₃, COOH, OCH₃, Cl und Br verringern sämtliche — mit Ausnahme von CH₃ in *o*- und *m*-Stellung — stets die Geschwindigkeit der Phenolspaltung.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts från sid. 226.)

Belgrad. *Akadémie Royale de Serbie.*

Godišnjak. 14 (1900).

Spornik. 1. 1902. 8:o.

Bergen. *Museum.*

Aarbog. 1902: H. 1. 8:o.

SARS, G. O., An account of the Crustacea of Norway. Vol. 4 (Copepoda, Calanoida): P. 7-8. 1902. 8:o.

Berkeley. *California university.*

Bulletins. Vol. 2: N:o 4; 3: 1. 1901. 8:o.

Bulletin of the Department of Geology. Vol. 2: N:o 8-12. 1901. 8:o.

University chronicle. Vol. 6 (1901): 1-6. 8:o.

Annual report of the secretary. 1899/1900. 8:o.

— *Agricult. experiment station.*

Bulletin. No 131-139. 1901-1902. 8:o.

Nature-study bulletins. 1902. 8:o.

Berlin. *K. Preussische Akademie der Wissenschaften.*

Sitzungsberichte. 1902: 23-40. 8:o.

— *K. botanischer Garten u. Museum.*

Notizblatt. No. 29. 1902. 8:o.

— *Deutsche geologische Gesellschaft.*

Zeitschrift. Bd 54 (1902): H. 1. 8:o.

— *Deutsche physikalische Gesellschaft.*

Die Fortschritte der Physik. Jahrg. 57 (1901): Abth. 1-3. 8:o.

— *K. Preuss. Meteorologisches Institut.*

Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen 2. und 3. Ordnung. Jahr 1897: H. 3. 4:o.

Ergebnisse d. Arbeiten am aeronautischen Observatorium. 1900/1901. 4:o.

— *Reichs-Marine-Amt.*

Bestimmung der Intensität der Schwerkraft auf 20 Stationen an der westafrikanischen Küste. 1902. 4:o.

— *Physikalisch-technische Reichsanstalt.*

Die Thätigkeit. Jahr 1901. 8:o.

— *Entomologischer Verein.*

Berliner entomologische Zeitschrift. Bd 47 (1902): H. 1-2. 8:o.

Besançon. *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*

Procès-verbaux & mémoires. Année 1901. 8:o.

— *Observatoire astronomique, chronométrique et météorologique.*

Bulletin chronométrique. 12-13. 1901. 4:o.

» météorologique. Année 1899. 4:o.

Bordeaux. *Société Linnéenne.*

Actes. Vol. 56. 1901. 8:o.

— *Société des sciences physiques et naturelles.*

Mémoires. (6) T. 1. 1901. 8:o.

(Forts. å sid. 242.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1902. N:o 7.
Stockholm.

Ueber Versuche zur Darstellung des Tetramethylammoniums.

VON WILH. PALMÆR.

(Mitgeteilt am 10. September von PETER KLASON.)

RUFF¹⁾ und MOISSAN²⁾ haben vor einiger Zeit Versuche beschrieben, wobei sie Lösungen von Ammoniumsalzen in flüssigem Ammoniak bei tiefer Temperatur elektrolysierten in der Hoffnung, das Ammonium isolieren zu können. Schon vor drei Jahren machte ich im Universitäts-Laboratorium zu Upsala ganz ähnliche Versuche aber das Resultat war, wie bei den genannten Forschern, ein rein negatives, indem an der Kathode statt des erwarteten Ammoniums nur Gas (Wasserstoff) sich abschied; die Versuche wurden nicht publiziert.

Das Ammoniumion wird nach dem Entladen offenbar leicht in Ammoniak und Wasserstoff umgewandelt. Von dem Gedanken geleitet, dass z. B. das Tetramethylammoniumion nach dem Entladen vielleicht beständiger sei, elektrolysierte ich schon vor drei Jahren Lösungen von Tetramethylammoniumsalzen in flüssigem Ammoniak und beobachtete damals eine Erscheinung, die ich in letzter Zeit bestätigt habe und die ich jetzt beschreiben möchte.

Die verwendeten Tetramethylammoniumverbindungen waren das *Chlorid* und das *Hydrat*. Das Tetramethylammoniumchlorid wurde von KAHLBAUM bezogen und auf Alkalimetallen sorgfältig geprüft. Das Salz zeigte in der Flamme keine Kalium- oder

¹⁾ Berichte d. deutsch. chem. Ges. 34, 2604 (1901).

²⁾ Comptes rendus de l'Acad. d. sciences, Paris, 133, 715 (1901).

Natriumreaction; auch nach Glühen von 0,5 Gramm Salz wurde kein Rückstand erhalten, der die Flamme färbte. Von diesem Salze wird in 10 cm³ flüssigem Ammoniak beim Siedepunkt (— 34°) etwa 0,065 Gramm gelöst, was einer 0,06-normalen Lösung entspricht.

Das Tetramethylammoniumhydrat wurde aus dem Chlorid bereitet. Das Chlorid wurde in warmer Lösung mit überschüssigem Silberoxyd digeriert, wodurch aber nicht alles Chlor verdrängt wurde.¹⁾ Die alkalische Lösung des gebildeten Hydrates wurde abfiltriert und in einer Silberschale über freier Flamme schnell eingekocht. Sie wurde dann zuerst braun, aber diese Färbung dürfte nur von ausgeschiedenem, hydratischem Silberoxyd herrühren, denn nach fortgesetztem Kochen wurde die Lösung klar, während eine geringe Menge schwarzen Pulvers, wahrscheinlich Silberoxyd, sich ausschied. Beim Kochen der Hydratlösung bemerkt man denselben schwachen Geruch, der bei Erwärmung von Natron- oder Kalilauge auftritt. Ohne Rücksicht auf den geringen Niederschlag wurde das Eindampfen fortgesetzt — wobei der Inhalt der Schale dickflüssig wurde — bis lebhafte Gasentwicklung (Zersetzung in Trimethylamin und Methylalkohol) eintrat. Nach Erkalten erstarrte der Inhalt der Schale zu einer weissen (oder durch das Silberoxyd etwas missgefärbten), krystallinischen Masse, die hauptsächlich aus Tetramethylammoniumhydrat bestand. Das Produkt wurde im Exsiccator über Kaliumhydrat aufbewahrt. An der Luft zerfliesst bekanntlich das Hydrat. Nach der Analyse bestand es aus:

Hydrat	64,7 %
Karbonat	13,0 »
Chlorid	2,2 »
Wasser (Verlust)	<u>20,1 »</u>
	100,0 %.

¹⁾ Da Jodsilber viel weniger löslich ist als Chlorsilber, so muss man erwarten, dass bei Verwendung von Tetramethylammoniumjodid die Umsetzung vollständiger sei.

Bei zwei verschiedenen Darstellungen wurde gefunden dass auf 100 Grammäquivalente Hydrat (+ Karbonat) bezw.

2,41 und 2,35

Grammäquivalente Chlorid vorhanden sind. Die Löslichkeit des Hydrates in flüssigem Ammoniak beim Siedepunkte wurde folgendermassen bestimmt. Eine gesättigte Lösung wurde ohne Erwärmung verdampft, bis der Geruch nach Ammoniak verschwunden war. Der Rückstand wurde mit Salzsäure übersättigt, zur Trockne verdampft, bei 105° getrocknet und gewogen. Es wurde gefunden dass sich etwa 0,07 Grammäquivalente Hydrat im Liter auflösen — also ist die Löslichkeit merkwürdigerweise nur wenig höher als die des Chlorides. Doch sind die ermittelten Zahlen nur als grobe Annäherungen zu betrachten.

Das Hydrat wurde aus zwei Gründen als Elektrolyt versucht. Einerseits vermuthete ich dass das Hydrat löslicher als das Chlorid sei und dadurch die Verwendung konzentrierterer Lösungen gestatten würde. Diese Annahme wurde wie oben bemerkt nicht bestätigt. Andererseits hoffte ich einen beim Chlorid auftretenden Übelstand beseitigen zu können. Beim Chlorid bildet sich an der Anode Salmiak, welcher an der Leitung des Stromes theilnimmt und offenbar die gewünschte elektrolytische Ausscheidung des Tetramethylammoniums vorbeugen kann. Beim Hydrat würde bei der Anode Sauerstoff entstehen, welcher kaum auf das Ammoniak einwirken könnte. Da aber chlorfreies Hydrat nicht erhalten wurde, wurde der genannte Übelstand auch nicht vermieden und die Elektrolyse verlief in derselben Weise wie beim Chlorid. Vielleicht wird es mit einem aus dem Jodid bereiteten Hydrat besser gehen. Ich habe die obige einfache Methode zur Darstellung eines ziemlich reinen, festen Tetramethylammoniumhydrates deswegen mitgetheilt, weil ich eine ähnliche Methode in der früheren Literatur nicht habe finden können.

Das benutzte *flüssige Ammoniak* war ein als »chemisch rein« bezeichnetes Produkt der Firma KUNHEIM & Co. in Berlin. Zur Beurtheilung der Reinheit des Ammoniaks können folgende

Angaben dienen. Es hinterliess beim Verdampfen an der Luft einen kleinen weissen Rückstand, der wahrscheinlich aus Carbonat bestand, denn er wurde bei Erhitzung leicht verflüchtigt. Eine ziemlich rohe Bestimmung des spezifischen Gewichtes gab einen Wert, der mit dem berechneten gut übereinstimmte (gef. bei -34° : $0,665 \pm 0,017$; extrapoliert aus LANDOLT-BÖRNSTEINS Tabellen: 0,680). Das Leitvermögen war bei -34° etwa 25 mal kleiner als bei der gesättigten, etwa 0,07 normalen Lösung des Tetramethylammoniumhydrates bei derselben Temperatur.

Die Elektrolyse wird am besten in einem DEWAR'schen Gefäss vorgenommen — also in einem cylindrischen Glasgefäss mit doppelten Wänden, zwischen denen die Luft ausgepumpt worden ist. In einem solchen Gefäss geräth das Ammoniak nicht von selbst ins Sieden, ebensowenig wie in einem gewöhnlichen Glasbecher, wo vielmehr die Temperatur infolge der Verdampfung auf etwa -41° sinkt. Beim Durchleiten eines schwachen Stromes, z. B. ein paar Zehntel Ampère durch etwa 50 cm^3 Ammoniak, geräth doch das Ammoniak bald in gelindes Kochen. Als Elektroden verwendete ich z. B. zwei parallelen Platinbleche von je 8 cm^2 Oberfläche mit 1,5 cm Abstand von einander. Wenn zum Ammoniak festes Chlorid oder Hydrat des Tetramethylammoniums in Ueberschuss gegeben wird, so dass die Flüssigkeit mit dem betreffenden Salz gesättigt ist, so erhält man bei 30 Volt Spannung zwischen den Elektroden einen Strom von etwa 0,6 Amp., was einer Leitfähigkeit von etwa 0,004 entspricht. Man beobachtet sofort nach dem Stromschluss *tiefblaue Schlieren* an der Kathode. Die blaue Farbe ist genau dieselbe wie die Farbe einer Auflösung von Natrium in flüssigem Ammoniak und ich halte diese blauen Schlieren für eine Lösung von Tetramethylammonium in flüssigem Ammoniak. Die blaue Färbung zeigt sich nur in der unmittelbaren Nähe der Kathode, während die Flüssigkeit im übrigen farblos bleibt. Ich erkläre dies dadurch, dass die gebildete Verbindung äusserst unbeständig gegen Sauerstoff ist; wenn man z. B. eine Auflösung von Natrium in flüssigem Ammoniak gelinde schüttelt, so verschwindet

die blaue Farbe alsbald, während sich ein weisser Körper ausscheidet (wohl Natriumhydrat). Die Elektrolyse der Ammoniaklösung fand bei Luftzutritt statt. Des weiteren wird bei der Elektrolyse der Tetramethylammoniumverbindungen die blaue Färbung an der Kathode allmählich schwächer und kann z. B. nach halbstündiger Elektrolyse verschwunden sein. Ich erkläre dies dadurch, dass infolge der Chlorabscheidung bei der Anode Salmiak entsteht — das Hydrat war, wie gesagt chlorhaltig; das gebildete Salmiak nimmt an der Leitung des Stromes theil und es werden statt Tetramethylammoniumjonen theilweise oder hauptsächlich Ammoniumjonen bei der Kathode entladen. Das Ammoniumjon zerfällt aber, wie oben erwähnt, sofort in Ammoniak und Wasserstoff.

Ich habe die Elektrolyse der Tetramethylammoniumsalze noch in vielfach geänderter Weise ausgeführt, in der Hoffnung entweder das Tetramethylammonium direkt zu erhalten oder auch eine grössere Menge der blauen Lösung zu gewinnen, aus welcher vielleicht das Tetramethylammonium abgeschieden werden konnte. Ich bin bis jetzt zu keinen sicheren Resultaten gelangt, werde aber die Versuche wieder aufnehmen.

Bei der Elektrolyse einer gesättigten Lösung von *Tetraäthylammoniumchlorid* in flüssigem Ammoniak bei -34° treten ebenso bei der Kathode tiefblaue Schlieren auf, die wohl auf die Bildung einer Lösung des Tetraäthylammoniums hindeuten. Auf andere Tetraalkylammoniumverbindungen sind die Versuche bis jetzt nicht ausgedehnt worden.

Stockholm, Elektrochemisches Laboratorium der technischen Hochschule, Juni 1902.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 236.)

Bordeaux. *Société des sciences physiques et naturelles.*

Procès-verbaux des séances. Année 1900/1901. 8:o.

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le dép. de la Gironde. 1900/1901. 8:o.

Boston. *American academy of arts and sciences.*

Proceedings. Vol. 37 (1901/1902): N:o 12—20. 8:o.

— *Society of Natural History.*

Occasional papers. 6. 1901. 8:o.

Proceedings. Vol. 29: N:o 15—18; 30: 1—2. 1901. 8:o.

Memoirs. Vol. 5: N:o 8. 1902. 4:o.

Breslau. *Schlesische Gesellschaft f. vaterländische Cultur.*

Jahres-Bericht 79 (1901). 8:o.

Bruxelles. *Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*

Biographie nationale. T. 16: Fasc. 2. 1901. 8:o.

Mémoires couronnés et autres mémoires. T. 56, 61. 1896—1902. 8:o.

Mémoires couronnés et mém. des savants étrangers. T. 59: Fasc. 1—2. 1901. 4:o.

Mémoires. T. 54: Fasc. 1—4. 1900—1901. 4:o.

Annuaire. Année 68 (1902). 8:o.

Bulletin. Classe des lettres... 1902: N:o 1—5. 8:o.

» » des sciences. 1902: N:o 1—5. 8:o.

— *Commission de la »Belgica».*

Résultats du voyage du S. Y. Belgica en 1897—1899, sous le commandement de A. de Gerlache de Gomery. Anvers 1901—1902. 4:o.

Astron.: LECOINTE, G., Étude des chronomètres. P. 1—2.

Météorol.: ARCTOWSKI, H., Phénomènes optiques de l'atmosphère.

— Aurores australes.

Océanogr. THOULET, J., Détermination de la densité de l'eau de mer.

— ARCTOWSKI, H., & THOULET, J., Rapp. sur les densités de l'eau de mer...

Bot.: CARDOT, J., Mousses.

Zool.: TOPSENT, E., Spongiaires.

— KÖHLER, R., Échinides et Ophiures.

— JOUBIN, L., Brachiopodes.

— BARRETT-HAMILTON, G. E. H., Seals.

— *Musée du Congo.*

Annales. Botanique. Sér. 4: Fasc. 2. 1902. Fol.

— *Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie.*

Bulletin. T. 16 (1902): Fasc. 2—3. 8:o.

Budapest. *Ungarische Ornithologische Centrale.*

Aquila. Zeitschrift f. Ornithologie. Jahr. 9 (1902): 1—4. 8:o.

(Forts. à sid. 249.)

Meddelande från Upsala Univ. Fysiska Institution.

Einige Beobachtungen über die tägliche Variation im Leitungsvermögen der atmosphärischen Luft in Upsala.

Von H. NILSSON.

(Mitgeteilt am 10. September 1902 von K. ÅNGSTRÖM.)

Während der Monate April und Mai dieses Jahres habe ich im Physikalischen Institut zu Upsala eine Reihe von Beobachtungen über die tägliche Variation im elektrischen Leitungsvermögen der Luft angestellt. Da bisher äusserst wenige Beobachtungen hierüber vorliegen, dürfte möglicherweise ein Bericht über die Observationen und Resultate von Interesse sein.

Die Bestimmungen wurden sowohl mit ELSTER und GEITELS Zerstreuungsapparat wie mit dem von H. EBERT konstruierten Aspirationsapparat ¹⁾ ausgeführt. Die Beobachtungen wurden in einem zum Institut gehörigen Turm vorgenommen, welcher ersteres übrigens in einem völlig frei belegenen Hause sich befindet. Die Höhe über dem Erdboden betrug ungefähr 12 Meter. Der Zerstreuungsapparat wurde bei der Anwendung auf einem Regal aussen vor dem Fenster placiert, so dass die Ablesungen vom Innern des Zimmers aus geschehen konnten. Der EBERTSche Apparat war innen im Zimmer aufgestellt. Die äussere Luft wurde ihm durch ein 5 dm langes Messingrohr zugeführt, das in ein Loch in einem Fensterladen mündete und von demselben

¹⁾ H. EBERT, Phys. Ztschft, 2, 662. 1901.

Durchmesser wie der äussere Zylinder war. Die Durchmesser der Zylinder betrugen 6 resp. 29 mm. Die berechnete Kapazität = 13,1 E. S.-Einheiten. Die Ablesungen geschahen mit Fernrohr. Die Geschwindigkeit des Luftstroms = 2,85 m/Sek. Jede Bestimmung dauerte 15 Min. Wenn kein Luftstrom hindurchging, war während derselben Zeit auch keine Verminderung des Potentials zu bemerken. Den Luftstrom liess ich immer ungef. 5 Min. vor jeder Bestimmung hindurchgehen. Die Entladungsgeschwindigkeit war dann konstant. Das Anfangspotential war bei dem EBERTSchen Apparat ungef. 140 Volt, in dem Zerstreungsapparat 135—137 Volt. Der Ablesungsfehler bei dem EBERTSchen Apparat dürfte ungef. 0,5 höchstens 1 Volt betragen.

Ich führe unten ein Beispiel für eine Tagesserie an. Die mittlere Zeit für jede Bestimmung ist in zehntel Stunden angegeben. $a +$ und $a -$ bedeuten den Zerstreungskoeffizienten für positive und negative Elektrizität in % per Minute. Die Werte sind mit. $1 - n^1) = 0.67$ dividiert (n = Verhältnis zwischen der Kapazität des Elektroskops und der Summe der Kapazitäten von Elektroskop und Zerstreungszylinder); $b +$ und $b -$ repräsentieren die Potentialverminderung in Volt in dem EBERTSchen Apparat während 15 Min. In den darauf folgenden Kolumnen finden sich Angaben über die Temperatur, den Druck des Wasserdampfs in mm (p), die relative Feuchtigkeit (f/F), den Barometerstand (H) (reduziert auf 0° und den Meeresspiegel), Windrichtung und Windgeschwindigkeit (in m. per Sek.), Wolkenart und Bewölkung (C = cumuli, AC = altocumuli, 10 = ganz bewölkt). Die meteorologischen Angaben sind den Journalen des meteorologischen Observatoriums in Upsala entnommen, gelten also nicht exakt für die Luftschicht, in welcher die Bestimmungen gemacht wurden.

¹⁾ H. GRITEL, Phys. Ztschft, 2, 118. 1900.

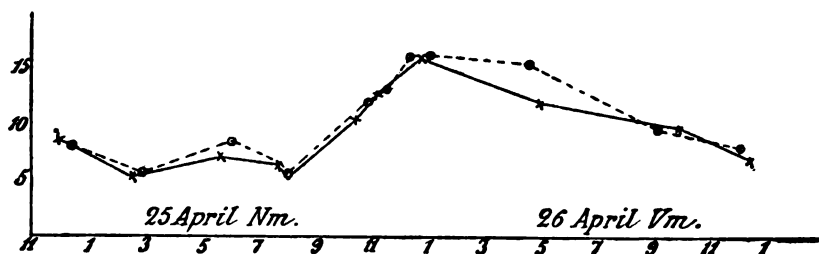
25—26 April 1902.

Tag.	Zeit.	a +	b +	Zeit.	a —	b —	Zeit.	Temp.	p	f/P %	H	Wind.	Be- wölkung.	Fernsicht.
25	11,9	2,64	8,6	12,3	2,92	8,1	12,0	+ 5,5	4,1	61	766,8	NNV 4,8	0	zieml. klar.
Nm	2,5	2,87	6,4	2,8	2,78	6,6	3,0	+ 6,5	4,4	61	66,0	N 5,8	0	,
	5,6	3,10	7,3	6,0	2,53	8,6	6,0	+ 3,5	2,9	49	65,5	N 3,8	0	,
	7,7	2,08	6,7	8,0	1,89	5,7	8,0	+ 0,5	2,9	61	65,4	N 3,8	0	,
	10,4	2,68	10,5	10,8	2,80	12,1	10,0	— 1,5	3,1	76	64,9	N 2,6	0	,
	11,2	3,17	12,8	11,5	3,30	13,8	11,0	— 2,3	3,1	79	64,0	NNV 1,4	0	,
				12,3	3,54	16,1	12,0	— 2,8	3,0	81	63,5	N 1,5	0	
26	12,7	3,54	16,0	1,0	3,84	16,3	1,0	— 3,1	3,1	85	64,4	N 0,0	0	
Vm	4,5	3,61	14,5	4,9	2,96	12,0	4,0	— 3,2	3,3	91	63,1	NV 0,9	10	
	9,1	2,59	9,7	9,9	2,81	9,8	9,0	+ 2,6	3,1	57	62,7	N 2,6	C, AC 7	zieml. klar.
	12,1	3,06	8,1	12,5	3,24	7,0	12,0	+ 4,5	2,6	49	62,7	N 5,7	C, AC 6	,

Anm. Sonne geht unter 7,5 Nm., auf 4,3 Vm.

Hoher Luftdruck über nördlichem Schweden und Finnland

Die Variationen von $b +$ und $b -$ werden durch untenstehende Kurve (I) veranschaulicht; $b +$ und $b -$ sind Ordinaten. Die ausgezogene Linie stellt $b +$ vor, die gestrichelte $b -$.



Augenfällig ist das bedeutende Maximum ungefähr um Mitternacht. Es ist zu beachten, dass der Himmel bei und nach Sonnenaufgang zum grössten Teil wolkenbedeckt war.

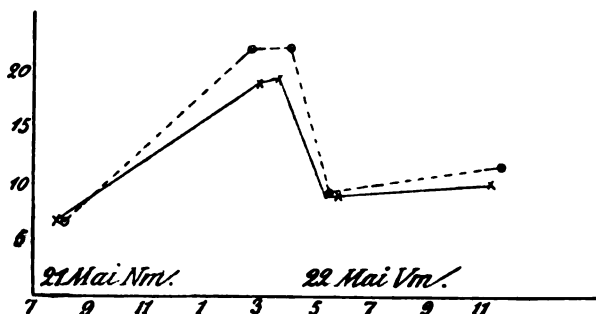
Das folgende Beispiel zeigt eine andere Form des Nachtmaximums. Der Kürze halber sind hier einige Beobachtungen ausgeschlossen worden.

21–22 Mai 1902.

Tag.	Zeit.	a +	b +	Zeit.	a —	b —	Zeit.	Temp.	p	f/F %.	H	Wind.	Be- wölkung.	Fern- sicht.
21Nm	7,8	1,40	6,7	8,1	1,41	6,7	8,0	+ 11,3	4,8	48	758,7	ESE 2,5	C 2	klar.
22Vm	3,0	3,16	19,1	2,7	3,98	22,0	3,0	2,2	4,8	80	61,0	NNE 0,8	2	,
,	3,7	2,96	19,6	4,1	3,80	22,2	4,0	3,7	3,6	60	61,1	N 1,3	2	,
,	5,8	1,96	9,1	5,5	1,89	9,4	6,0	7,8	4,4	57	61,9	NNV 1,9	2	,
,	11,2	2,82	10,2	11,6	2,59	11,6	11,0	14,1	4,7	89	62,4	NNE 3,9	C 3	,

Anm. Sonne geht auf 3,2 Vm.

Die folgende Kurve zeigt die Variationen von $b+$ und $b-$.



Der Himmel ist hier fast klar auch bei und nach Sonnenaufgang. Der Abfall vom Nachtmaximum geht rascher vor sich.

Die täglichen Variationen im Leitungsvermögen der Luft, gemessen mit dem EBERTSchen Apparat, zeigen im allgemeinen einen ziemlich regelmässigen Verlauf. Die mit ELSTER und GETTELS Apparat erhaltenen Werte variieren zufolge des Einflusses des Windes weniger regelmässig, zeigen aber im grossen und ganzen denselben Gang. So erklären sich z. B. die im Verhältnis zur Ionenmenge niedrigen Werte des Zerstreuungskoeffizienten in der Nacht zwischen dem 25 und 26 April aus der geringen Windstärke. Der EBERTSche Apparat ist doch noch weniger empfindlich als der von ELSTER und GETTEL. Empfehlen dürfte es sich vielleicht, den inneren Zylinder mit einem Quadrantelektrometer mit guter Isolierung in Verbindung zu setzen.

Die Entladungsgeschwindigkeit für negative Elektrizität war im allgemeinen gleich oder war unbedeutend grösser als die für positive. Die grössten und regelmässigsten täglichen Variationen wurden bei ausgeprägt antizyklonischer Witterung erhalten. CZERMAK, ¹⁾ der die Steigerung des Zerstreuungsvermögens der Luft bei Föhn beobachtet hat, weist darauf hin, dass man auch bei antizyklonischer Witterung eine grössere Jonenmenge in der Atmosphäre wegen des niedergehenden Luftstroms erwarten kann, der jonenreiche Höhenluft mit sich führen muss. Eine solche Steigerung des Leitungsvermögens zeigte sich indessen nur während der Nacht, was darauf beruhen könnte, dass der tagsüber aufsteigende Luftstrom vor dem widergehenden vorherrscht. Wenn der Himmel klar ist, beginnt die Steigerung eine Weile nach Sonnenuntergang und geht bis ungefähr Mitternacht fort, wo das Leitungsvermögen ungefähr doppelt so gross ist als am Mittag und im allgemeinen Werte annimmt, die es niemals am Tage erreicht. Nach Sonnenaufgang beginnt es abzunehmen, vermutlich in dem Masse, wie der aufsteigende Luftstrom sich entwickelt. Im Laufe des Tages hält es sich nahezu konstant.

Bei zyklonischer Witterung sind die Verhältnisse schwankend. Bald wird ein Nachtmaximum beobachtet, bald bleibt es aus. Selten ist gleichwohl eine Abnahme des Leitungsvermögens während der Nacht zu bemerken.

Bei oder unmittelbar nach Sonnenuntergang wurde oft, aber nicht immer, ein ziemlich plötzliches mehr oder weniger ausgeprägtes Minimum beobachtet. In I ist es ziemlich unbedeutend. Ein solches ist auch von A. GOCKEL ²⁾ in Freiburg und in Algier beobachtet worden, wo es indessen ausgeprägter als in Upsala gewesen zu sein scheint. GOCKEL erklärt das Phänomen in Freiburg durch die Abends eintretende Dunstbildung in der Luft.

Beobachtungen über das Potentialgefälle sind nicht angestellt worden. Jedoch scheinen die Variationen des Leitungsvermögens, wie zu erwarten ist, einen ausgeprägt entgegengesetzten

¹⁾ CZERMAK, Phys. Ztschft, 3, 186. 1902.

²⁾ A. GOCKEL, Phys. Ztschft, 3, 208. 1902.

Gang gegenüber den mutmasslichen Variationen des Potentialgefälles zu befolgen.

Zum Schlusse möchte ich eine Anmerkung betreffs der Ursache für die Zunahme des Leitungsvermögens mit der Höhe über der Erdoberfläche geben, welcher Umstand zusammen mit der Vertikalkomponente der Luftbewegung die tägliche Periode im Leitungsvermögen und teilweise auch im Potentialgefälle erklären zu können scheint. Als Ursache wird allgemein die stärkere ultraviolette Sonnenstrahlung in höheren Luftschichten angenommen. Diese Erklärung scheint mir jedoch wenig wahrscheinlich, da die Strahlen, die diesen *Lenardeffekt* zustandebringen, teils so ausserordentlich stark von der Luft absorbiert werden, ¹⁾ dass sie eine Ionisierung nicht gut anders als in der aller äussersten Schicht der Atmosphäre bewirken können, teils sich nicht als fähig erweisen, ein andauerndes Leitungsvermögen zu bewirken, ²⁾ teils ein Leitungsvermögen erzeugen, das wesentliche Verschiedenheiten von dem der natürlichen Luft aufweist, indem wenigstens die von dem ultravioletten Licht erzeugten positiven Träger nicht mit den in der gewöhnlichen Luft vorkommenden identisch sein können. ³⁾

Von Interesse wäre, wenn untersucht würde, ob nicht die Radioaktivität der Luft mit der Höhe über der Erdoberfläche zunimmt.

¹⁾ LENARD, ANN. d. Phys., 1, 501. 1900 und 3, 316. 1900.

²⁾ „ „ „ „ 1, 502. 1900 und 3, 308. 1900.

³⁾ „ „ „ „ 3, 315. 1900.

Skänker till Vetenskaps-Akademien's Bibliothek.

(Forts. från sid. 242.)

- Buenos Aires.** *Sociedad científica Argentina.*
 Anales. T. 53 (1902): Entr. 5—6. 8:o.
- Buitenzorg.** *Jardin botanique.*
 Mededeelingen. 54, 56—57. 1902. 8:o.
- Cambridge.** *Philosophical society.*
 Proceedings. Vol. 11: P. 6. 1902. 8:o.
 Transactions. Vol. 19: P. 2. 1902. 4:o.
- Cambridge, Mass.** *Astronomical Observatory of Harvard College.*
 Annals. Vol. 43: P. 2. 1902. 4:o.
- *Museum of comparative zoology.*
 Bulletin. Vol. 39: No 3; 40: 2. 1902. 8:o.
 Memoirs. Vol. 27: No. 1. 1902. 4:o.
- Cape Town.** *Royal Observatory.*
 Report of His Majesty's astronomer. Year 1901. 4:o.
 Results of meridian observations of stars. 1896—97, 1898—99. 4:o.
 Results of astronomical observations. Year 1877, 1878—79. 8:o.
 Geodetic Survey of S. Africa. Vol. 2. 1901. Fol.
- *South African philosophical society.*
 Transactions. Vol. 11: P. 4. 1902. 8:o.
- Catania.** *Accademia Gioenia di scienze naturali.*
 Bollettino delle sedute. N. S. Fasc. 73. 1902. 8:o.
- Chambésy.** *Herbier Boissier.*
 Bulletin. (2) T. 2 (1902): N:o 6—9. 8:o.
- Chicago.** *Academy of sciences.*
 Bulletin. Vol. 2: No 3. 1900.
- — *Natural history survey.*
 Bulletin. N:o 4: P. 1. 1900. 8:o.
- *Field Columbian Museum.*
 Publications. 60—63. 1901. 8:o.
- Cincinnati.** *Society of natural history.*
 Journal. Vol. 20: N:o 2. 1902. 8:o.
- Coimbra.** *Sociedade Broteriana.*
 Boletim. 18 (1901): Fasc. 3—4. 8:o.
- Dorpat.** *Meteorologisches Observatorium.*
 Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen.
 Jahr 1900. 4:o.
- Dresden.** *Statistisches Bureau des Ministeriums des Innern.*
 Kalender und statistisches Jahrbuch für das Königreich Sachsen.
 Jahr 1903. 8:o.
 Zeitschrift. Jahrg. 48 (1902). 4:o.
- Edinburgh.** *R. Observatory.*
 Annals. Vol. 1. 1902. 4:o.
- Erlangen.** *Physikalisch-medicinische Societät.*
 Sitzungsberichte. H. 33 (1901). 8:o.

- Firenze.** *R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento.*
 Pubblicazioni. Sezione di scienze fisiche e naturali. Fasc. 16. 1902.
 8:o.
- *Società entomologica Italiana.*
 Bullettino. Anno 33 (1901): Trim. 3—4. 8:o.
- Genève.** *Société de physique et d'histoire naturelle.*
 Mémoires. T. 34: Fasc. 2. 1902. 4:o.
- Genova.** *Musei di zoologia ed anatomia comparata della R. Università.*
 Bollettino. N:o 108—109, 111—116. 1901—1902. 8:o.
- *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*
 Atti. Vol. 13 (1902): N. 1. 8:o.
- Giessen.** *Oberhessische Gesellschaft für Natur- u. Heilkunde.*
 Bericht. 33. 1899—1902. 8:o.
- Greenwich.** *Royal observatory.*
 Introduction to the astronomical observations. Year 1899. 4:o.
 Report of the Astronomer Royal... 1901/1902. 4:o.
 Results of the astronomical observations. Year 1899. 4:o.
 Results of the magnetical and meteorological observations. Year 1899.
 4:o.
 Results of the spectroscopic and photographic observations. Year 1899.
 4:o.
 Appendix to the observations. 1899: 1. 4:o.
- Guatemala.** *Laboratorio químico central.*
 Observaciones meteorológicas. Año 1901. 8:o.
- Güstrow.** *Verein der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg.*
 Archiv. Jahr 55 (1901): Abth. 2; 56 (1902): 1. 8:o.
- Göttingen.** *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
 Nachrichten. Geschäftliche Mittheilungen. 1902: H. 1. 8:o.
 » Math.-phys. Klasse. 1902: H. 2—4. 8:o.
 » Phil.-hist. Klasse. 1902: H. 2—3. 8:o.
- Habana.** *Observatorio del colegio de Belen de la compañía de Jesus.*
 Observaciones meteorológicas. Año 1901. Fol.
- Hamburg.** *Horizontalpendel-Station.*
 Mittheilungen. 1902: 3—4. 4:o.
- Harlem.** *Koloniaal Museum.*
 Rumphius Gedenboek. 1702—1902. Uitg. door het Koloniaal Museum. 1902. 4:o.
- *Musée Teyler.*
 Archives. (2) Vol. 8: P. 1. 1902. 8:o.
- Helsingfors.** *Statistiska centralbyrån.*
 Bidrag till Finlands officiella statistik. XXI: A: 6; VI: 33: 2. 1902. 4:o.
 Statistisk årsbok för Finland. Årg. 23 (1902). 8:o.
- *Universitets-biblioteket.*
 Akademiskt tryck. 1902. 17 st. 8:o.
 Accessions-katalog. 12 (1899—1901). 8:o.
- Jena.** *Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
 Denkschriften. Bd 9: Text & Atlas. 4:o.

Jena. *Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd 36: H. 3-4; 37: 1.
1902. 8:o.

Karlsruhe. *Centralbureau f. Meteorologie u. Hydrographie.*

Deutsches meteorologisches Jahrbuch 1901. 4:o.

— *Grossh. technische Hochschule.*

Dissertationen etc. 1901/02. 12 st. 8:o & 4:o.

— *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Verhandlungen. Bd 15 (1901/1902). 8:o.

Kassel. *Verein für Naturkunde.*

Abhandlungen und Bericht. 47 (1901/02). 8:o.

Kharkow. *Université Impériale.*

Annales. 1902: Kn. 2-3. 8:o.

Kjöbenhavn. *Det danske meteorologiske Institut.*

Bulletin météorologique du Nord. Année 1901. 4:o.

— *Zoologisk Museum.*

Den Danske Ingolf-Expedition. Bd. 6: N:r 1. 1902. 4:o.

— *K. danske Videnskabernes Selskab.*

Oversigt over Forhandlinger. 1902: No. 2-3. 8:o.

Skrifter. Naturvid.-math. Afd. (6) T. 10: 4; 11: 2-3; 12: 1. 1902. 4:o.

Krakau. *Académie des sciences.*

Katalog literatury naukowej Polskiej. T. 2 (1902): zeszyt. 1. 8:o.

Materyały do klimatografii Galicyi. Rok 1901. 8:o.

Bulletin international. Cl. des sc. math. et nat. 1902: N:r 4-6. 8:o.

Kristiania. *Det norske meteorologiske Institut.*

Nedbøriagttagelser i Norge. Aarg. 7 (1901). Fol.

— *Videnskabs-Selskabet.*

Forhandlinger. Aar 1901. 8:o.

Skrifter. Math.-naturvid. Klasse. 1901: N:o 1-5. 8:o.

— *Universitets-Bibliotheket.*

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd 40: H. 2. 1902. 8:o.

Aarbog. 1896: H. 1-2; 1897: 1-2; 1898: 1-2. 8:o.

Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*

Bulletin. (4) Vol. 38: No. 143. 1902. 8:o.

Lawrence. *University of Kansas.*

Bulletin. Vol. 2: No 7-8. 1901-02. 8:o.

Leiden. *Nederlandsche botanische Vereeniging.*

Nederlandsch kruidkundig archief. (3) D. 2: St. 3. 1902. 8:o.

Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*

Abhandlungen. Math.-phys. Classe. Bd 27: N:o 4-6. 1902. 8:o.

„ Philol.-hist. Classe. Bd 20: N:o 5. 1902. 8:o.

Berichte über die Verhandlungen. Math.-phys. Classe. 1901: 7; 1902:
1-2 & Sonderheft. 8:o.

„ „ „ „ Philol.-hist. Classe. 1901: 4. 8:o.

Liège. *Société géologique de Belgique.*

Annales. T. 29 (1902): Livr. 2-3. 8:o.

Linz. *Museum Francisco-Carolinum.*

Jahres-Bericht. 60 (1901/1902). 8:o.

Lisboa. *Assistencia nacional aos tuberculosos.*

de LENCASTRE, A. M., Notice sur ses travaux adressée au Congrès
Britannique de la tuberculose. Trad. du portugais. Lisbonne 1901.
8:o.

London. *Geologists' Association.*

Proceedings. Vol. 17 (1901/02): P. 6. 8:o.

— *Royal Institution of Great Britain.*

Proceedings. Vol. 16: P. 3. 1902. 8:o.

— *Meteorological office.*

British rainfall. 1901. 8:o.

— *Royal Astronomical society.*

Monthly notices. 62 (1901/02): N:o 7-8. 8:o.

Sep. ur Monthly notices. No 45, 48, 54-65. 1900-1902. 8:o.

— *Chemical society.*

Journal. Vols. 81-82 (1902): 7-9. 8:o.

Proceedings. Vol. 18 (1902): No 253-254. 8:o.

— *Geological society.*

Geological literature added to the Geological society's library. Year
1901. 8:o.

— *Linnean society.*

Journal. Botany. Vol. 35: N:o 245. 1902. 8:o.

 ' Zoology. Vol. 28: No. 185. 1902. 8:o.

Transactions. Botany. (2) Vol. 6: P. 2-3. 1901-1902. 4:o.

 ' Zoology. (2) Vol. 8: P. 5-8. 1901-1902. 4:o.

— *R. Meteorological society.*

The meteorological record. Vol. 21 (1901): N:o 81-84. 8:o.

— *R. Microscopical Society.*

Journal. 1902: P. 3-4. 8:o.

— *Royal society.*

Proceedings. Vol. 70 (1902): No 460-465. 8:o.

Reports to the Malaria Committee. Ser. 7. 1902. 8:o.

— *Zoological society.*

Proceedings. 1902: Vol. 1: P. 1. 8:o.

Transactions. Vol. 16: P. 4. 1902. 4:o.

London, Ontario. *Entomological society.*

The Canadian entomologist. Vol. 34 (1902): No 6-8. 8:o.

Lübeck. *Geographische Gesellschaft und Naturhistorisches Museum.*

Mitteilungen. Reihe 2: H. 16. 1902. 8:o.

Lussinpioolo. *Manora-Sternwarte.*

Astronomische Rundschau. Bd 4 (1902): No 35-36. 8:o.

Lyon. *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*

Mémoires. Sciences et lettres. (3) T. 6. 1901. 8:o.

— *Société d'agriculture, sciences et industrie.*

Annales. (7) T. 7-8 (1899-1900). 8:o.

— *Société Linnéenne.*

Annales. Année 1900, 1901. 8:o.

Manchester. *Literary and philosophical society.*

Memoirs and proceedings. Vol. 46 (1901/02): P. 6. 8:o.

- Manchester.** *Conchological society of Great Britain and Ireland.*
Journal of conchology. Vol. 10 (1901/1902): No 2-3, 6-7. 8:o.
- Manila.** *Philippine weather bureau.*
Report. 1901/1902: P. 1. 4:o.
— *Observatorio de la compañía de Jesús.*
Boletín mensual. Año 1901: 2. Fol.
- Marseille.** *Musée d'histoire naturelle.*
Annales. Sect. de zool. T. 6. 1900—1901. 4:o.
- Melbourne.** *Observatory.*
Results of observations in meteorology and terrestrial magnetism.
1900: 1. 8:o.
- Mexico.** *Instituto médico nacional.*
Anales. T. 5 (1901): Num. 3-4. 8:o.
— *Observatorio meteorológico central.*
Boletín mensual. 1901: 8-10. Fol.
Informe sobre las observaciones ejecutadas durante el eclipse total de sol de 28 de Mayo de 1900. Texto & Atlas. 1901. 8:o.
— *Sociedad científica »Antonio Alzate«.*
Memorias y revista. T. 13 (1899): Núms. 3-4; 16 (1901): 2-3. 8:o.
- Middelburg.** *Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen.*
Archief. D. 8: St. 4. 1901. 8:o.
Levensberichten van zeeuwsche medici. 1901. 8:o.
- Milano.** *Comitato per le onoranze a Francesco Brioschi.*
BRIOSCHI, F., Opere matematiche. T. 2. 1902. 4:o.
— *R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.*
Memorie. Cl. di scienze mat. e nat. Vol. 19: Fasc. 5-8. 1902. 4:o.
Rendiconti. (2) Vol. 34. 1901. 8:o.
— *Società Italiana di scienze naturali.*
Atti. Vol. 41 (1902): Fasc. 2. 8:o.
- Montevideo.** *Observatorio meteorológico del colegio Pío de Villa Colón.*
Boletín mensual. Año 13 (1901): Núms. 4-9. 8:o.
— *Sociedad meteorologica Uruguay.*
Resumen de las observaciones pluviométricas. Año 9 (1900): 1-4. 8:o.
- Montpellier.** *Académie des sciences et lettres.*
Catalogue de la bibliothèque. P. 1. 1901. 8:o.
- München.** *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Philos.-philol. u. hist. Classe. 1902: H. 1. 8:o.
- Nantes.** *Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France.*
Bulletin. (2) T. 1 (1901): Trim. 3-4; 2 (1902): 1. 8:o.
- Napoli.** *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (3) Vol. 8 (1902): Fasc. 4-5. 8:o.
- Neuchâtel.** *Observatoire cantonal.*
Rapport du directeur. Année 1901. 8:o.
- New York.** *Academy of sciences.*
Annals. Vol. 14 (1901/02): P. 2. 8:o.
Memoirs. Vol. 4: P. 3; 5: 1; 7: 1. 1902. 4:o.
— *American Museum of natural history.*
Bulletin. Vol. 17 (1902): P. 1-2. 8:o.

New York. *American Museum of natural history.*

Annual report of the president. Year 1901. 8:o.

Oberlin, Ohio. *College library.*

The Wilson bulletin. N. S. Vol. 9 (1902): No. 2. 8:o.

Odessa. *Observatoire magnétique et météorologique de l'Univ. Imp.*

Annales. 1900. 4:o.

Revue météorologique. Année 1900. 4:o.

Ottawa. *Field-naturalists' club.*

The Ottawa Naturalist. Vol. 16 (1902): No 4-5. 8:o.

Palermo. *R. Accademia di scienze, lettere e belle arti.*

Atti. (3) Vol. 6. 1901-1902. 4:o.

— *Circolo matematico.*

Rendiconti. T. 16 (1902): Fasc. 3-5. 8:o.

— *Istituto botanico.*

Contribuzione alla biologia vegetale. Vol. 3: Fasc. 1. 1902. 8:o.

Palo Alto. *Leland Stanford junior university.*

Contributions to biology from the Hopkins seaside laboratory. 27. 1902. 8:o.

Paris. *Bureau des longitudes.*

Connaissance des temps. Extrait à l'usage des écoles hydrogr. Année 1903. 1901. 8:o.

Éphémérides des étoiles de culmination lunaire et de longitude. An 1903. 4:o.

— *Bureau international des poids et mesures.*

Travaux et mémoires. T. 12. 4:o.

Procès-verbaux des séances. 1901. 8:o.

— *Comité des travaux historiques et scientifiques.*

Bulletin de géographie historique et descriptive. Année 1901: N:o 3. 8:o.

— *École des hautes études.*

Bulletin des sciences mathématiques. (2) T. 25 (1901): 10-12; 26 (1902): 1-3. 8:o.

— *École des mines.*

Annales. (9) T. 20 (1901): Livr. 9-12; (10) 1 (1902): 1. 8:o.

— *Muséum d'histoire naturelle.*

Bulletin. Année 1901: N:o 7-8; 1902: 1-2. 8:o.

— *Observatoire.*

Carte photographique du Ciel. 63 st. kartblad. Fol.

— *Société astronomique de France.*

Bulletin. 1902: 6-8. 8:o.

— *Société entomologique de France.*

Annales. Vol. 69 (1900): Trim. 1-4. 8:o.

Bulletin. Année 1900. 8:o.

— *Société de géographie.*

La Géographie. Année 1902: N:o 6. 8:o.

— *Société géologique de France.*

Bulletin. (4) T. 1 (1901): N:o 5; 2 (1902): 1. 8:o.

Mémoires. Paléontologie. T. 9: Fasc. 1-4; 10: 1. 1901-1902. 4:o.

- Paris.** *Société zoologique de France.*
Mémoires. T. 14 (1901). 8:o.
Bulletin. T. 26 (1901). 8:o.
- Perth.** *Observatory.*
Meteorological observations. Year 1900. Fol.
- Philadelphia.** *Academy of Natural Sciences.*
Proceedings. Vol. 53 (1901): P. 3. 8:o.
— *American philosophical society.*
Proceedings. Vol. 40 (1901): N:o 167; 41 (1902): 168. 8:o.
- Pisa.** *Società Toscana di Scienze Naturali.*
Memorie. Vol. 18. 1902. 8:o.
- Pola.** *Hydrographisches Amt der k. u. k. Kriegs-Marine.*
Meteorologische Termin-Beobachtungen. 1902: 4—7. tv. Fol.
Veröffentlichungen. Nr 13—15. 1902. 4:o.
- Potsdam.** *Centralbureau der internationalen Erdmessung.*
Veröffentlichungen. N. F. N:o 6. 1902. 8:o.
— *Astrophysikalisches Observatorium.*
Publicationen. Bd 12. 1902. 4:o.
- Prag.** *Česká akademie věd Františka Josefa.*
Bulletin international. Année 6 (1901): Sc. math. et nat.; Médecine. 8:o.
Rozpravy. Třída 2: Ročník 10 (1901). 8:o.
— *K. k. Sternwarte.*
Magnetische u. meteorologische Beobachtungen. Jahrg. 62 (1901). 4:o.
- Pressburg.** *Verein für Natur- und Heilkunde.*
Verhandlungen. N. F. Bd 13 (1901). 8:o.
- Roma.** *Reale accademia dei Lincei.*
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.
Rendiconti. (5) Vol. 11 (1902): Sem. 1: Fasc. 10—12; 2: 1—4. 8:o.
Classe di scienze morali, storiche e filologiche.
Atti. (5) P. 2: Notizie degli Scavi. 1902: 2—5. 4:o.
Rendiconti. (5) Vol. 11: Fasc. 3—6. 1902. 8:o.
Rendiconto dell' adunanza solenne del 1/6 1902. 4:o.
— *R. Comitato geologico d'Italia.*
Bollettino. Anno 1902: N. 1—2. 8:o.
— *R. Osservatorio del collegio Romano.*
Memorie. (3) Vol. 3. 1902. 4:o.
- Rousdon.** *Observatory.*
Meteorological observations. Vol. 18 (1901). 4:o.
- St. Pétersbourg.** *Comité géologique.*
Explorations géologiques dans les régions aurifères de la Sibérie.
Région aurifère de l'Amour. Livr 1—2. 1900—1901. 8:o.
» » d'Jénisséi. » 1—2. » 8:o.
» » de Léna. » 1. 1901. 8:o.
— *Russisch-Kaiserliche Mineralogische Gesellschaft.*
Verhandlungen. (2) Bd 39: Lief. 2. 1902. 8:o.
— *Laboratoire biologique.*
Bulletin. T. 6: 1—2. 1902. 8:o.

- St. Pétersbourg.** *Musée zoologique de l'Académie imp. des sciences.*
 Annuaire. T. 6 (1901): N:o 4. 8:o.
- *Société Imp. Russe de géographie.*
 Izvjestija. T. 38 (1902): 1. 8:o.
 Otschet. 1901. 8:o.
- San Francisco.** *Astronomical society of the Pacific.*
 Publications. Vol. 14 (1902): N. 84. 8:o.
- San José.** *Instituto físico-geográfico de Costa Rica.*
 Boletín. Año 2 (1901/1902): No. 16—18. 8:o.
- Stettin.** *Entomologischer Verein.*
 Stettiner entomologische Zeitung. Jahrg. 63. 1902. 8:o.
- Strassburg.** *Meteorologischer Landesdienst in Elsass-Lothringen.*
 Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Reichsland Elsass-Lothringen. Jahr 1898. 4:o.
- Stuttgart.** *Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg.*
 Jahreshefte. Jahrg. 58 (1902) & Beilage. 8:o.
- Sydney.** *Department of mines and agriculture, Geological survey branch.*
 Handbook to the mining and geol. museum. 1902. 8:o.
- *Australian Museum.*
 Records. Vol. 4: No 6. 1902. 8:o.
- *Linnean society of N. S. Wales.*
 Proceedings. Vol. 26 (1901): P. 4. 8:o.
- Tokyo.** *Earthquake investigation committee.*
 Publications. N:o 8—9. 1902. 8:o.
- *Medicinische Faculté der Kaiserlich-Japanischen Universität.*
 Mittheilungen. Bd. 5: No 4. 1902. 8:o.
- *Geographical Society.*
 Journal of geography. Vol. 14 (1902): N:o 157—162. 8:o.
- *Imperial university.*
 Calendar. 2561—62 (1901/1902). 8:o.
- — *College of science.*
 Journal. Vol. 16: Art. 3—6; 17: 3—9. 1902. 4:o.
- Torino.** *Società meteorologica Italiana.*
 Bollettino mensile. (2) Vol. 22 (1901/02): 1—3. 8:o.
- Toronto.** *Meteorological service.*
 Report 1899. 4:o.
- *University.*
 Studies. Biol. ser. N:o 2. 1902. 8:o.
- Toulouse.** *Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres.*
 Mémoires. (10) T. 1. 1901. 8:o.
- Troyes.** *Société académique d'agriculture, des sciences, arts et belles-lettres du dép. de l'Aube.*
 Mémoires. (3) T. 38 (1901). 8:o.
- Tunis.** *Service météorologique.*
 Les pluies en Tunisie. 1895—1900. 8:o.
- Utrecht.** *K. Nederlandsch meteorologisch Instituut.*
 Meteorologisch Jaarboek. 1899. 4:o.

- Washington. *National academy of sciences.*
 Memoirs. Vol. 8: Mem. 6. 1902. 4:o.
- *Academy of sciences.*
 Proceedings. Vol. 4: pp. 117—454. 1902. 8:o.
- *U. S. Weather Bureau.*
 Monthly weather review. 1902: 2—3. 4:o.
 Bulletin. No. 31—32. 1902. 8:o.
 Weather map. 1902: 1—5. Fol.
- *U. S. Dep. of the interior. Census office.*
 Census bulletin. No 210. 1902. 4:o.
- *U. S. Department of agriculture.*
 Crop reporter. Vol. 3 (1901/02): 11—12; 4 (1902/03): 1—3. 4:o.
 List of bulletins and circulars. $\frac{1}{1}$ 1902. 8:o.
 Bureau of animal industry. Bulletin. No. 34—37, 39—42. 1902. 8:o.
 " " " " Circular. N:o 36—37. 1902. 8:o.
 " " " " Annual report. Year 1900. 8:o.
 Division of biological survey. Bulletin. No. 12 (Revised). 1902. 8:o.
 " " " " Circular. No. 35. 1902. 8:o.
 Division of chemistry. Bulletin. No. 13: P. 5; 65, 67. 1902. 8:o.
 Bureau of chemistry. Circular. No. 7 (Revised); 10. 1902. 8:o.
 Division of entomology. Bulletin. N. S. No. 32—34. 1902. 8:o.
 " " " Circular. (2) No. 42, 44—51. 1902. 8:o.
 Office of experiment stations. Bulletin. No. 103—104, 106, 108—
 112, 114. 1902. 8:o.
 — Experiment station record. Vol. 13: No. 7—9. 1902. 8:o.
 Farmers' bulletin. No. 142, 147—155. 1902. 8:o.
 Division of forestry. Bulletin. No. 32. 1902. 8:o.
 Section of foreign markets. Bulletin. No. 27. 1902. 8:o.
 — Circular. No. 24. 1902. 8:o.
 Bureau of plant industry. Bulletin. No. 7, 12—19, 25: p. 1—4. 1902. 8:o.
 Division of publications. Circular. No. 439—442. 1902. 8:o.
 Division of soils. Bulletin. No. 19—20. 1902. 8:o.
 — Field operations. 1900: Text & Maps. 8:o.
 Library. Bulletin. No. 40. 1902. 8:o.
- *Director Nautical Almanac.*
 American ephemeris and naut. almanac. Year 1905. 8:o.
- *Smithsonian institution.*
 Contributions to knowledge. No. 1309. 1901. 4:o.
- *Library of congress.*
 Report. 1900/1901. 8:o.
 A List of books on Samoa and Guam. 1901. 8:o.
 Handbook of the new library ... 1901. 8:o.
- *Philosophical Society.*
 Bulletin. Vol. 14 (1899/02): pp. 179—204. 8:o.
- *U. S. Coast and geodetic survey.*
 Report of the superintendent. 1899/1900. 4:o.
- *U. S. Geological survey.*
 Annual report. 21 (1899/1900): P. 2—4. 4:o.

Wien. Commission für oceanographische Forschungen.

Expedition S. M. »Pola« in das Rothe Meer.

Beschreibender Theil, verfasst v. P. E. VON POTT. 1899. 4:o.

Wissenschaftliche Ergebnisse. 10—13. 1899. 4:o.

— **K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.**

Verhandlungen. Bd. 52 (1902): H. 4—5. 8:o.

— **K. K. Geologische Reichsanstalt.**

Abhandlungen. Bd 19: H. 1. 1902. Fol.

Jahrbuch. Bd 52 (1902): H. 1. 8:o.

Verhandlungen. 1902: No 7—8. 8:o.

Winnipeg. Historical and scientific society of Manitoba.

Annual report. Year 1901. 8:o.

Transactions. No 61—62. 1901—1902. 8:o.

Af prins Albert I af Monaco.

Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son yacht. Fasc. 21. 1902. Fol.

Notes de géographie biologique marine. Berlin 1900. 8:o.

RICHARD, J., Campagne scientifique de la princesse Alice en 1901. Paris 1902. 8:o.

— 2 st. småskifter.

Af Madame Veuve Godin, Guise.

Le Devoir. T. 26 (1902): 6—8. 8:o.

Af Herrar Wahlström & Widstrand.

Bilder ur Nordens flora. Efter Palmstruch m. fl. Svensk Botanik af C. A. M. LINDMAN. H. 7. 1902. 8:o.

Af utgifvarne:

La feuille des jeunes naturalistes, publ. par A. DOLLFUS. (4) Année 32 (1901/02): N:o 379—383. 8:o.

Revista Chilena de historia natural. Red. C. E. PORTER. Año 6 (1902): Núm. 2. 8:o.

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen, hrag. von A. SEIDEL. Jahrg. 6: H. 2. 1902. 8:o.

Svenska jägareförbundets nya tidskrift, utg. af A. WAHLGREN. Årg. 40 (1902): H. 2—3. 8:o.

Af författarne:

ARNELL, H. W., Om allmogeträdgårdar i Gestrikland. Sthlm 1902. 8:o.

BERGSTRAND, C. E., Öfversigt af svenska landtbrukets historia... 1: Hednatiden. Sthlm 1902. 8:o.

BOHLIN, K., Beobachtungen von veränderlichen Sternen. Kiel 1902. 4:o.

— Differentialformen zur Bahnverbesserung bei kleinen Excentricitäten u. Neigungen. Kiel 1902. 4:o.

EKHOLM, N., Über die Höhe der homogenen Atmosphäre... Wien 1902. 8:o.

JÄGERSKIÖLD, L. A., Några valda drag ur djurens vård om sina ungar. Sthlm 1902. 8:o.

Af författarne:

- NATHORST, A. G., Forntida kärlekryptogamer och gymnospermer. Sthlm 1902. 12:o.
 — 2 st. småskrifter.
- REUTER, E., Berättelse öfver skadeinsekters uppträdande i Finland 1899—1900. Hfors 1900—01. 8:o.
 — 2 st. småskrifter.
- TRYBOM, F., Fisket i Halland 1901. Halmstad 1902. 8:o.
- BROWNLIE, A., The tides in the midt of the Pacific Ocean. New York 1902. 8:o.
- CAVAZZUTTI, E. M., Projet d'organisation du mouvement scient. universel . . . Buenos Aires 1902. 8:o.
- GIGLIO-TOS, E., Sull' origine embrionale del nervo trigemino nell' uomo. Jena 1902. 8:o.
 — 3 st. småskrifter.
- GALLEGOS, J., Magnetismo universal . . . 1902. Guatemala 1902. 8:o.
- KÖLLIKER, A., Über die oberflächlichen Nervenkerne im Marke der Vögel u. Reptilien. Lpz 1902. 8:o.
- MAC DONALD, A., A plan for the study of man. Washington 1902. 8:o.
- NIEDERLEIN, G., Ressources végétales des colonies françaises. Paris 1902. 4:o.
- WAGNER, H., A. E. von Nordenskiöld. Göttingen 1902. 8:o.

Utgifningsdag 8 oktober 1902.

Stockholm 1902. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 59.

1902.

Nº 8.

Onsdagen den 8 oktober.

INNEHÅLL:

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 261.
ADLERZ, G., Myrmecologiska studier. IV. <i>Formica suecica</i> n. sp.	> 263.
BOHLIN, K., Ueber Elementar-Wurzel-Funtionen	> 267.
Skänker till Naturhistoriska Riksmuseet och Akademiens bibliotek sid. 262, 266, 281.	

Tillkännagafs att Akademiens utländske ledamot af fjärde klassen f. d. direktören för fysikaliska centralobservatoriet i St. Petersburg HEINRICH WILD med döden afgått.

Till delegerad att å Akademiens vägnar deltaga i den internationella akademiska associationens arbeten utsågs Herr RETZIUS.

Herr ARRHENIUS lämnade med anledning deraf, att den 9 oktober 100 år förflutit, sedan Akademiens framlidne ledamot friherre FABIAN WREDE föddes, en redogörelse för dennes stora betydelse såsom forskare och uppfinnare, och beslöt Akademien med anledning deraf, att på hundraårsdagen nedlägga en minneskrans å friherre WREDES graf.

Herr BOHLIN förevisade en fotografi af PERRINES nu synliga komet samt redogjorde för innehållet af de af honom författade här nedan omnämnda båda afhandlingar.

Herr AURIVILLIUS redogjorde för lektor ADLERZ's iakttagelser öfver den lilla vägstekeln *Ceropales maculata's* lefnadssätt.

På framställning af biblioteksinspektionen och bibliotekarien beslöt Akademien att genom Herr SÖDERBAUM låta utgifva BERZELIUS' reseanteckningar.

Genom anställt val kallade Akademien till utländsk ledamot af fjärde klassen direktören för den fysikaliskt-tekniska riksanstalten i Charlottenburg FRIEDRICH KOHLRAUSCH.

På tillstyrkan af kommitterade antogos följande afhandlingar till införande i Akademiens skrifter:

i Bihanget till Akademiens Handlingar: 1:a) Beiträge zur Kenntniss der Phyllopodenfamilie Polyartemiidæ af fil. kand. SVEN EKMAN; 2:a) Die Hydroiden der schwedischen zoologischen Polarexpedition 1900 af Doktor E. JÄDERHOLM; 3:e) Neue oder wenig bekannte ostasiatische Hydroiden, af densamme; 4:e) *Ceropales maculata*, FABR., en parasitisk Pompilid af lektor G. ADLERZ samt 5:e) Eine Untersuchung über die Darstellung mehrwertiger Functionen, af professor K. BOHLIN;

i Öfversigten: de i innehållsförteckningen upptagna tvänne uppsatserna.

Följande skänker anmälades:

Till Naturhistoriska Riksmuseet:

En samling af fåglar från Australien skänkt af Herr J. M. NICHOLSON genom herr P. O. SEFFER.

Till Akademiens Bibliotek:

Herr RETZIUS förärade akademien det af honom och professor CARL M. FÜRST utgifna stora arbetet »Antropologia suecica, Beiträge zur Anthropologie der Schweden», och framförde akademiens præses till herr RETZIUS akademiens tack för den värdefulla gåfvan.

Stockholm. *K. Statistiska Centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. L: 39: b. 1902. 4:o.

— *Sveriges geologiska undersökning.*

Ser. Aa. Kartblad med beskrifningar. N:o 117. 1902. 8:o.

› Ac. Kartblad med beskrifningar. N:o 1—4, 6. 1902. 8:o.

› C. Afhandlingar och uppsatser. N:o 190—192. 1902. 8:o.

› Ca. Afhandlingar och uppsatser i 4:o. N:o 2 & Kartor. 1902.

— *Svenska Akademiens Nobelbibliotek.*

Reglemente och ordningsregler. 1902. 8:o.

Berlin. *K. Preussisches meteorologisches Institut.*

Ergebnisse d. meteorologischen Beobachtungen in Potsdam. Jahr 1900. 4:o.

(Forts. å sid. 266.)

Myrmecologiska Studier. IV.

Formica suecica n. sp., Eine neue schwedische Ameise.

Von GOTTFRID ADLERZ.

Fast unerwartet war es, nach mehr als zwanzigjährigem Durchmustern der Ameisenfauna Schwedens eine neue *Formica*-Art zu entdecken. Verfloßenen Sommer wurde eine solche in der Provinz Medelpad des mittleren Schwedens gefunden. Da sie bisher die einzige nur in Schweden angetroffene Ameisenart ist, und da es nur wenig wahrscheinlich ist, dass sie in den genau untersuchten Ländern Mittel- und Süd-Europas angetroffen werden wird, gebe ich ihr den Namen *Formica suecica*. Sie ist mit *F. exsecta* am nächsten verwandt, wie es aber aus der nachstehenden Beschreibung hervorgehen wird, sowohl morphologisch als biologisch von dieser Art verschieden.

Formica suecica n. sp.

Arbeiter: Länge 4—6 mm. Kopf, Thorax und Petiolus rostrot; Stirn, Scheitel und Hinterkopf, besonders bei ♂ min., oft dunkler; Fühlergeißel, Vorderrand des Clypeus, Kaurand und Aussenrand der Mandibeln, bisweilen auch die Beine zum Teil, bräunlich; der Hinterleib schwarzbraun. Körper auffallend spärlich behaart; nur der Clypeus und die Mundteile sind mit verschiedenen abstehenden Haaren besetzt. Kopf und Hinterleib ziemlich glatt und glänzend. Der Hinterkopf schief niedergedrückt; der Hinterrand ausgebuchtet (weniger tief als bei *exsecta*) mit wenig vorspringenden, abgerundeten Hinterecken; die Seiten des Kopfes unterhalb der Augen angeschwollen. Der

Clypeus wenig deutlich gekielt mit dem Vorderteil abgeflacht und dem Vorderrand ein wenig aufgebogen, ohne Einschnitt. Stirnfeld seitlich nicht scharf begrenzt, etwas glänzend. Mandibeln breit, mit 7—8 zähmigem Kaurand. Wie bei *exsecta* trägt auch der Oberrand der Mandibeln 2—3, besonders bei grösseren Arbeitern deutliche Zähne. Taster lang. Maxillartaster 6-gliedrig.

Metanotum hat die Basalfläche kürzer und die abschüssige steiler herabfallend als bei *exsecta*. Schuppe oben mit scharfem Rand, in der Mitte ausgeschnitten.

Weibchen: Ich habe nur geflügelte Weibchen gesehen. Ihre Grösse ist auffallend gering, kaum die der grössten Arbeiter übertreffend, 5—6,3 mm. Oberseite des Kopfes, Hinterrand des Pronotum, Metanotum, Scutellum, Oberrand der Schuppe und der Hinterleib, mit Ausnahme des Pygidiums, schwärzlichbraun. Übrige Körperteile mehr oder weniger dunkel gelblich oder rötlich braun. Körper sehr spärlich behaart. Die schwärzlichen Körperteile glänzend. Stirnfeld, Clypeus, Mandibeln und Taster wie beim Arbeiter. Die Flügel sehr wenig angeraucht. Schuppe oben mit breitem, fast rechtwinkligem Einschnitt, jederseits von einem schmalen, in der Spitze abgerundeten Lappen begrenzt.

Männchen: Länge 6—6,5 mm. Etwas schlanker als bei *exsecta*; schwarz, wenig behaart, glänzend; die Beine zum Teil (Kniee, Tarsen, Hintertibien gänzlich, Vordertibien zum Teil) und die äusseren Genitalien gelblich. Der Hinterrand des Kopfes breit ausgerandet, oft jedoch ziemlich undeutlich. Augen nicht behaart. Die längsgerunzelten und grob punktierten Oberkiefer haben einen schneidigen Kaurand, welcher unten in einen starken Zahn endigt, oben mit scharfem Winkel vom Oberrand abgesetzt ist. Taster wie beim Arbeiter. Die niedrige Schuppe ist dick, ebenso hoch als breit, oben gerade abgestutzt, mit stumpfem Rande, ohne Einschnitt.

In biologischer Hinsicht bestehen unter den Arten *exsecta* und *suecica* ungefähr dieselben Verschiedenheiten wie unter *rufa* i. sp. und deren Rasse *truncicola*. Dieser Parallelismus giebt

sich besonders in der Bauindustrie zu erkennen. Ganz wie *truncicola* baut *suecica* keine freistehenden Haufen. Wie jene höhlt sie ihre Kammern im weichen Holze der morschen Baumstrünke oder in auf der Erde liegenden morschen Baumstämmen aus, um welche sie oft, keineswegs aber immer, zusammengeschnitztes Material in geringer Menge anhäuft. Gewöhnlich begnügt sie sich damit, die Schnittfläche des Baumstrunkes mit einem dünnen Lager von solchem Material zu bedecken. Dieses zusammengeschnitzte Material ist dem von *exsecta* angewendeten ganz ähnlich, d. h. es besteht aus Grasstengelchen und dergleichen feinerem Pflanzenabfall.

In denselben Baumstrünken, wo *suecica* nistet, habe ich bisweilen Kolonien von *Formica fusca* und besonders von *Camponotus herculeanus* gefunden. Diese Nachbarschaft wird wenigstens für *Camponotus* sehr verhängnisvoll, denn ich habe oft tote Arbeiter der letzteren Art in den Kammern von *suecica* als Beuten hereingeschleppt gesehen. Ebenso wie *exsecta* baut *suecica* keine Strassen. Ob sie wie *exsecta* mächtige Kolonien mit mehrfachen Nestern bilden kann, muss bis auf weiteres dahingestellt werden. Ich habe es wenigstens noch nicht gesehen.

Formica suecica ist bisher nur auf der Insel Alnö im Bottnischen Meerbusen, unweit Sundswall, gefunden worden. Da sie aber an dieser Localität in zahlreichen Kolonien vorkommt, wird sich ihre Verbreitung wahrscheinlich als eine weit grössere herausstellen, seitdem die Aufmerksamkeit auf ihr Dasein gerichtet worden ist. Es wächst auch durch diesen Fund die Wahrscheinlichkeit, dass in den nur wenig erforschten weiten Gegenden des nördlichen Schwedens noch verschiedene Arten zu entdecken sind.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts från sid. 262.)

- Bern.** *Hydrometrische Abteilung des eidgenössischen Oberbauinspektors.*
 Graphische Darstellungen d. Schweiz. hydrometr. Beobacht. u. d. Luft-Temperaturen u. Niederschlags-Höhen. Jahr 1900. Fol.
 — *Schweizerische Landesbibliothek.*
 Jahresber. 6 (1900/01). 8:o.
- Boston.** *American academy of arts and sciences.*
 Proceedings. Vol. 37 (1901/1902): N:o 21—22. 8:o.
- Bremen.** *Meteorologisches Observatorium.*
 Meteorologisches Jahrbuch. Jahrg. 12 (1901). 4:o.
- Bruxelles.** *Académie Royale de Belgique.*
 Classe des lettres... Bulletin. 1902: N:o 6—7. 8:o.
 Classe des sciences. Bulletin. 1902: N:o 6—7. 8:o.
- Buenos Aires.** *Sociedad científica Argentina.*
 Anales. T. 54 (1902): Entr. 1. 8:o.
- Cape Town.** *South African Museum.*
 Annals. Vol. 2: P. 9. 1902. 8:o.
- Cincinnati.** *Lloyd library.*
 Bulletin. N:o 4—5. 1902. 8:o.
 Mycological notes. N:o 9. 1902. 8:o.
- Davenport.** *Academy of sciences.*
 Proceedings. Vol. 8 (1899/1900). 8:o.
- Dorpat.** *Naturforscher-Gesellschaft.*
 Archiv f. d. Naturkunde Liv-, Ehst- u. Kurlands. Ser. 2. Biolog. Naturkunde. Bd 12: Lief. 1. 1902. 8:o.
- Granville.** *Denison university.*
 Bulletin of the scientific laboratories. Vol. 11: 11; 12: 1. 1902. 8:o.
- Göttingen.** *K. Gesellschaft d. Wissenschaften.*
 Abhandlungen. Math.-phys. Kl. N. F. Bd 2: Nro. 3—4. 1902. 4:o.
- Helsingfors.** *Commission géologique de Finlande.*
 Bulletin. N:o 12—13. 1902. 8:o.
- Krakau.** *Académie des sciences.*
 Bulletin international. Cl. des sc. math. et nat. 1902: N:r 7. 8:o.
 » » Cl. de philol. 1902: N:o 7. 8:o.
 Sprawozdania z czynności i posiedzeń. T. 7: N:o 7. 1902. 8:o.
- Kristiania.** *Videnskabs-Selskabet.*
 Catalog d. in Norwegen bis Juni 1878 beobachteten Nordlichter zusammengestellt v. S. Tromholt. 1902. 4:o.
- La Plata.** *Museo.*
 Anales. Secc. geol. y mineral. 3. 1900. Fol.
- Llinás.** *Observatorio Belloch.*
 Hojas meteorológicas. Año 1902: 1—6. tv. Fol.

(Forts. å sid. 281.)

Ueber Elementar-Wurzel-Functionen.

VON KARL BOHLIN.

Vorgelegt am 8. Oktober 1902.

1. In einigen einfachen Fällen des Integral-Calculs tritt, wie bekannt, die Function

$$u = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad (1)$$

auf und zwar besonders unter gewissen Functionszeichen wie z. B. dem Logarithmus. Öfters ist dies, wie ich mich überzeugt habe, einem Zufalle nicht zuzuschreiben, sondern beruht auf dem Umstande, dass die betrachtete Function einen unendlichen Werth nur für

$$x = \infty$$

annimmt. Hat man nämlich eine Function darzustellen, die z. B. für

$$x = \infty$$

unendlich wird von der Form

$$\text{Log } x,$$

so wird man dieselbe im allgemeinen nicht mit Hülfe der Function

$$\text{Log } x$$

darstellen können, weil diese Function auch für

$$x = 0$$

von logarithmischem Grade unendlich wird. Dagegen wird man öfters die Function

$$\text{Log} (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

anwenden können, weil dieselbe für keinen anderen Werth von x als

$$x = \infty$$

unendlich wird.

Selbstverständlich ist aber die Function

$$u = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

nicht die einzige, die die angegebene Eigenschaft hat, denn z. B. die Function

$$w = x - \sqrt[3]{x^3 + 1}$$

besitzt denselben Character.

Indessen habe ich mir aus besonderen Gründen, die mit der Theorie der Auflösung algebraischer Gleichungen in Zusammenhang stehen, vorgenommen eine gewisse Gruppe von Functionen aufzusuchen, die mit der oben angeführten Function u analog sind. Massgebend für die fraglichen Betrachtungen war nämlich der Umstand, dass die Wurzel einer algebraischen Gleichung

$$y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_{n-1} y = \tau \quad (2)$$

sich im allgemeinen nach Potenzen von

$$\tau - \tau_0 \quad (a)$$

entwickelt lässt, nämlich sobald die Gleichung für

$$\tau = \tau_0$$

keine gleiche Wurzel besitzt; dass ferner, wenn zwei gleiche Wurzel vorhanden sind, die Entwicklung nach Potenzen von

$$\sqrt{\tau - \tau_0} \quad (b)$$

sich ausführen lässt, und wenn drei gleiche Wurzeln vorkommen, nach Potenzen von

$$\sqrt[3]{\tau - \tau_0} \quad (c)$$

fortläuft, u. s. w.

Hat man z. B. die Gleichung dritten Grades

$$f(y, \tau) = y^3 - 3py - 2\tau = 0$$

und bildet man die erste derivirte Gleichung

$$f'(y, \tau) = y^2 - p = 0;$$

eliminiert man ferner y zwischen diesen Gleichungen, um eine Gleichung

$$\varphi(\tau) = \tau^2 - p^3 = 0$$

zu bekommen, und bezeichnet man endlich die Wurzeln dieser letzten Gleichung mit

$$\tau_1 \text{ und } \tau_2,$$

so lassen sich die Wurzeln der Gleichung dritten Grades in der Form

$$y = \sqrt[3]{V\tau - \tau_1}$$

oder

$$y = \sqrt[3]{V\tau - \tau_2}$$

darstellen. Nur wenn ausserdem

$$\tau_1 = \tau_2$$

erhält man

$$y = c(\tau - \tau_1)^{1/3}.$$

2. Wir betrachten zunächst die einfache Function

$$u = \sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_2}, \quad (3)$$

die, wie unmittelbar ersichtlich ist, nur für

$$\tau = \infty$$

verschwinden kann. Dies ist folgendermassen mit der Auflösung der Gleichung dritten Grades in Zusammenhang zu bringen.

Wie wir gesehen haben, lässt sich die Wurzel der Gleichung dritten Grades in der Umgebung von

$$\tau_1 \text{ oder } \tau_2$$

folgendermassen darstellen:

$$y - a = \sqrt{\tau - \tau_1} \{a_0 + a_1 \sqrt{\tau - \tau_1} + \dots\}$$

oder

$$y - b = \sqrt{\tau - \tau_2} \{b_0 + b_1 \sqrt{\tau - \tau_1} + \dots\}. \quad (A)$$

Ausser den beiden singulären Stellen

$$\tau_1 \text{ und } \tau_2$$

haben wir noch den Punkt

$$\tau = \infty$$

zu berücksichtigen, woselbst die Wurzel die Form

$$y = P \cdot \tau^{1/3} + \frac{Q}{\tau^{1/3}} + R \quad (B)$$

annimmt, wobei

$$P, Q, R$$

eindeutige Functionen von τ sind. Die Constante in R ist übrigens, wie leicht ersichtlich, gleich Null und das constante Glied in P ist gleich $2^{1/3}$. Ausserdem haben wir darauf Rücksicht zu nehmen, dass die Wurzel y für

$$\tau_1 = \tau_2$$

die Form

$$y = c(\tau - \tau_1)^{1/3} \quad (C)$$

annimmt.

Dies kann aber nur sein, wenn y dargestellt wird als homogene Function von den beiden Grössen

$$\sqrt{\tau - \tau_1} \text{ und } \sqrt{\tau - \tau_2}.$$

Sonst würde nämlich in C ein konstantes Glied auftreten. Diese Constante könnte allerdings so beschaffen sein, dass dieselbe für

$$\tau_2 - \tau_1 = 0$$

verschwindete. Es ist aber leicht einzusehen, dass die Entwicklungsform (B) auch eine solche Constante nicht zulässt, weil sonst die P, Q, R nicht ausschliesslich ganze Potenzen von τ enthalten würde.

Versuchen wir es jetzt die Wurzel y mit einer symmetrischen Function von

$$\sqrt{\tau - \tau_1} \text{ und } \sqrt{\tau - \tau_2}$$

darzustellen, so eignet sich hierfür, wie ersichtlich ist, eben die Function

$$u = \sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_2}. \quad (4)$$

Bildet man nämlich hieraus eine Combination

$$Y = A \cdot u^{2/3} + \frac{B}{u^{2/3}}, \quad (5)$$

so hat diese Function für

$$\tau = \infty$$

zunächst die Eigenschaft (*B*). Dabei ist es aber von grösster Bedeutung, dass die Function nicht auch in anderen Punkten eine Entwicklungsform von derselben Art wie in (*B*) besitzt, so dass also etwa im Punkte

$$\tau = \tau_0$$

$$Y = P(\tau - \tau_0)^{1/3} + \frac{Q}{(\tau - \tau_0)^{1/3}}$$

wäre, denn so würde man eine Singularität einführen die für die Gleichung dritten Grades fremd ist. Bei unserer Wahl der Function

$$u,$$

die nur für

$$\tau = \infty$$

verschwindet, hat aber die angegebene Combination

$$Y$$

die charakteristischen Eigenschaften der Wurzelfunction *y* und keine andere Singularitäten, denn sie lässt sich einerseits nach Potenzen von

$$\sqrt{\tau - \tau_1} \text{ oder } \sqrt{\tau - \tau_2}$$

entwickeln und nimmt für

$$\tau = \infty$$

die Form (*B*) an. Für

$$\tau_1 = \tau_2$$

müsste sie die Form (C) annehmen, wozu es aber nur erforderlich ist, dass der Coëfficient B mit

$$\tau_2 - \tau_1$$

verschwindet. Wir können dann setzen

$$y = Y. \quad (6)$$

Nun ist für

$$\tau = \tau_1$$

$$y = +\sqrt{p}.$$

Setzen wir also in unserer Wurzel

$$y = Au^{2/3} + \frac{B}{u^{2/3}} \quad (7)$$

den Werth

$$\tau = \tau_1$$

ein, so wird

$$\sqrt{p} = A(\tau_1 - \tau_2)^{1/3} + \frac{B}{(\tau_1 - \tau_2)^{1/3}}. \quad (a)$$

Ebenfalls wird für

$$\tau = \tau_2$$

$$-\sqrt{p} = A(\tau_2 - \tau_1)^{1/3} + \frac{B}{(\tau_2 - \tau_1)^{1/3}}. \quad (b)$$

Da nun aber

$$\tau_1 = p^{2/3}; \quad \tau_2 = -p^{2/3}$$

so wird

$$\tau_1 - \tau_2 = 2p^{2/3},$$

also auch

$$\sqrt{p} = + \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{2} \right)^{1/3}.$$

Nach der Gleichung (a) haben wir also

$$\frac{(\tau_1 - \tau_2)^{1/3}}{2^{1/3}} = A(\tau_1 - \tau_2)^{1/3} + \frac{B}{(\tau_1 - \tau_2)^{1/3}}. \quad (8)$$

Da nun ferner

$$P = 2^{1/3} + \dots$$

sich ergibt, so erhält man durch Vergleichung der Formeln (B) und (7) in der Umgebung von

$$\tau = \infty$$

die Beziehung

$$2^{1/3}\tau^3 = A \cdot 2^{2/3}\tau^3.$$

Wir haben also

$$A = \frac{1}{2^{1/3}}.$$

Es ergibt sich jetzt indem man auf der rechten Seite unserer Gleichung (8) diejenigen Wurzeln aus der Einheit nimmt welche gleichen Wurzeln entsprechen

$$\frac{(\tau_1 - \tau_2)^{1/3}}{2^{1/3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot A(\tau_1 - \tau_2)^{1/3} + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \frac{B}{(\tau_1 - \tau_2)^{1/3}}$$

oder

$$\frac{(\tau_1 - \tau_2)^{1/3}}{2^{1/3}} \left[1 - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} B,$$

woraus folgt

$$B = \frac{(\tau_1 - \tau_2)^{2/3}}{2^{1/3}}. \quad (9)$$

Zur Bestimmung der Coëfficienten A und B in (7) kann man auch und mit grösserem Vortheil diese Formel generel nach fallenden Potenzen von τ entwickeln und diese Entwicklung mit der Gleichung (B), deren Coëfficienten bekannt sind, vergleichen.

Die gesuchte Wurzel hat nun die Form

$$y = \frac{[\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_2}]^{2/3}}{2^{1/3}} + \frac{(\tau_1 - \tau_2)^{2/3}}{2^{1/3}} \frac{1}{[\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_2}]^{2/3}}$$

oder auch

$$y = \frac{[\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_2}]^{2/3} + [\sqrt{\tau - \tau_1} - \sqrt{\tau - \tau_2}]^{2/3}}{2^{1/3}}. \quad (10)$$

Dieses ist eine ganz symmetrische und leicht zu behaltende Form der Wurzel der Gleichung dritten Grades. Dieselbe ist ausserdem direct und nur mittels rein functionstheoretischen Be-

trachtungen aufgestellt worden. In dieser Beziehung scheint mir die angegebene Methode einen Vorzug vor den sonst gebräuchlichen Methoden, die gewissermassen zufälligen Characters sind, darzubieten.

Aus dem Ausdrucke (10) ergibt sich ohne weiteres die gewöhnliche Form der Wurzeln der Gleichung dritten Grades. Man erhält nämlich zunächst

$$y = \left[\tau - \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} + \sqrt{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)} \right]^{1/3} + \\ + \left[\tau - \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} - \sqrt{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)} \right]^{1/3}$$

und hiernach, weil

$$\tau_1 + \tau_2 = 0$$

$$\tau_1 \tau_2 = -p^3,$$

die bekannte Formel

$$y = [\tau + \sqrt{\tau^2 - p^3}]^{1/3} + [\tau - \sqrt{\tau^2 - p^3}]^{1/3}.$$

3. Die im vorigen Abschnitte betrachtete Function

$$u = \sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_2}$$

hat als wichtigste Eigenschaft diejenige, nur für $\tau = \infty$ zu verschwinden und gleichzeitig unendlich zu werden. Selbstverständlich hat die Function

$$u' = \sqrt{\tau - \tau_1} - \sqrt{\tau - \tau_2}$$

dieselbe wichtige Eigenschaft. Es ist dies aber keine neue selbstständige Function, denn sie wird aus u erhalten, wenn man mit der Veränderlichen τ den Punkt τ_2 umkreist.

Es ist nun leicht ähnliche Functionen höherer Ordnung zu bilden. Nehmen wir drei willkürliche Punkte

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3,$$

und bilden wir die Function

$$u = [\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_2}]^{1/3} - [\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_3}]^{1/3}$$

so sehen wir sofort, dass auch diese Function dritter Ordnung nur für

$$\tau = \infty$$

unendlich wird oder verschwindet. Durch Vertauschung der Indices nach dem Schema

$$\left| \begin{array}{cc|cc|cc} 12 & 13 & 13 & 12 & 23 & 12 \\ 12 & 23 & 13 & 23 & 23 & 13 \end{array} \right|$$

erhalten wir sechs Functionen dieser Art, von denen aber nur drei bis auf constante Factoren selbständig sind, nämlich entsprechend den Combinationen:

$$| 12, 13 | 12, 23 | 13, 23 |$$

oder, vollständig ausgeschrieben

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= (\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_2})^{1/3} - (\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3} \\ u_2 &= (\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_2})^{1/3} - (\sqrt{\tau - \tau_2} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3} \\ u_3 &= (\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3} - (\sqrt{\tau - \tau_2} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3} \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Wir erhalten diese Functionen am einfachsten durch die folgende Überlegung, die das vollständige System solcher Functionen *ersten Grades* generirt.

Gehen wir nämlich von der Beziehung

$$\tau - \tau_1 = \tau - \tau_2$$

aus, die jedenfalls nur für $\tau = \infty$ erfüllt sein kann, so erhalten wir durch Bildung der Quadratwurzel

$$\sqrt{\tau - \tau_1} = \pm \sqrt{\tau - \tau_2}, \quad (12)$$

woraus folgt, dass die Function

$$u = \sqrt{\tau - \tau_1} \mp \sqrt{\tau - \tau_2}$$

nicht verschwinden kann. Das doppelte Zeichen ist nicht wesentlich und wir erhalten deshalb nur eine *Elementar-Function zweiter Ordnung*, nämlich

$$u = \sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_2}.$$

Addiren wir in der Gleichung (12) beiderseits die neue Grösse

$$\sqrt{\tau - \tau_3},$$

so erhalten wir die Beziehung

$$\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_3} = \sqrt{\tau - \tau_2} + \sqrt{\tau - \tau_3}, \quad (13)$$

welche jedenfalls auch nur für $\tau = \infty$ erfüllt sein kann.

Durch Ziehung der dritten Wurzel ergibt sich hieraus die Gleichung

$$(\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3} = (\sqrt{\tau - \tau_2} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3} \quad (14)$$

und die Function

$$u = (\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3} - (\sqrt{\tau - \tau_2} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3}. \quad (15)$$

Geht man wieder von der Beziehung

$$\sqrt{\tau - \tau_1} = -\sqrt{\tau - \tau_2}$$

aus, so erhält man in derselben Weise

$$\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_3} = -\sqrt{\tau - \tau_2} + \sqrt{\tau - \tau_3},$$

woraus die Gleichung

$$(\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3} = -(\sqrt{\tau - \tau_2} - \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3}$$

und die Function

$$u' = (\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3} + (\sqrt{\tau - \tau_2} - \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3} \quad (15 a)$$

entstehen. Es ist aber vorauszusehen, dass diese Function nicht eine selbständige ist, und dies ist auch leicht zu zeigen. Denn lässt man τ den Punkt τ_2 umkreisen, so verwandelt sich die Function (15 a), weil auch

$$(-1)^{1/3} = -1 \cdot (1)^{1/3},$$

in den Ausdruck

$$(\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3} - (\sqrt{\tau - \tau_2} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3},$$

d. h. in die Function u . Ebenso ergibt sich durch Anbringung von $-\sqrt{\tau - \tau_3}$ statt $\sqrt{\tau - \tau_3}$ keine neue selbständige Function.

Wir erhalten deshalb nur drei *Elementar-Functionen dritter Ordnung* nemlich:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= (\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_2})^{1/3} - (\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_3})^{1/3} \\ u_2 &= (\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_2})^{1/3} - (\sqrt{x-t_2} + \sqrt{x-t_3})^{1/3} \\ u_3 &= (\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_3})^{1/3} - (\sqrt{x-t_2} + \sqrt{x-t_3})^{1/3} \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

In derselben Weise bildet man mit Anwendung von vier willkürlichen Punkten

$$t_1, t_2, t_3, t_4$$

ähnliche *Elementar-Functionen vierter Ordnung*. Addiren wir nemlich in der Gleichung (14) beiderseits die Grösse

$$(\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_4})^{1/3} \quad (A)$$

und ziehen nachher die vierten Wurzel, so entsteht die Beziehung

$$\begin{aligned} [(\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_3})^{1/3} + (\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_4})^{1/3}]^{1/4} = \\ = [(\sqrt{x-t_2} + \sqrt{x-t_3})^{1/3} + (\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_4})^{1/3}]^{1/4} \end{aligned}$$

und hieraus die *Elementarfunction*:

$$\begin{aligned} u &= [(\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_3})^{1/3} + (\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_4})^{1/3}]^{1/4} - \\ &- [(\sqrt{x-t_2} + \sqrt{x-t_3})^{1/3} + (\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_4})^{1/3}]^{1/4}. \end{aligned} \quad (17)$$

Wenn wir aber die Grösse

$$-[\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_4}]^{1/3} \quad (B)$$

die jedenfalls von (A) wesentlich verschieden ist in derselben Weise anbringen, erhalten wir in diesem Falle eine neue Function

$$\begin{aligned} u' &= [(\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_3})^{1/3} - (\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_4})^{1/3}]^{1/4} - \\ &- [(\sqrt{x-t_2} + \sqrt{x-t_3})^{1/3} - (\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_4})^{1/3}]^{1/4} \end{aligned} \quad (17 a)$$

welche aus (17) nicht ohne weiteres erhalten werden kann.

Ebenso würde man anscheinend zu neuen Functionen geführt werden, wenn man statt (14) die Beziehung

$$\varepsilon[\sqrt{x-t_1} + \sqrt{x-t_3}]^{1/3} = [\sqrt{x-t_2} + \sqrt{x-t_3}]^{1/3}; \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad (14 a)$$

zum Ausgangspunkt nehmen würde. Es ist aber leicht diese Fälle auf den zuerst besprochenen zurückzuführen, wenn man die Veränderlichkeit sämtlicher Grössen

$$\tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3$$

wahrnimmt. Von Gesichtspunkte der algebraischen Gleichungen ist dies ja auch angezeigt, weil die besonderen Eigenthümlichkeiten der Wurzeln eben bei dem Zusammenfallen von Grössen wie τ_1, τ_2, τ_3 entstehen. Nehmen wir aber hierauf Rücksicht, so können wir in der Beziehung (14):

$$(\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3} = (\sqrt{\tau - \tau_2} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3}$$

erstens τ_3 mit τ_1 zusammenfallen lassen, hiernach den Punkt (τ_1, τ_3) mit τ umkreisen und nachher die Grössen τ_1 und τ_3 wieder trennen. So entsteht die Beziehung

$$e^{2\pi i/3} (\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3} = (\sqrt{\tau - \tau_2} - \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3}$$

und wiederholen wir nochmal dasselbe Verfahren, so entsteht die Beziehung

$$e^{4\pi i/3} (\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3} = (\sqrt{\tau - \tau_2} + \sqrt{\tau - \tau_3})^{1/3}$$

— was eben der Gleichung (14 a) entspricht. Letztere ist also nicht unabhängig.

Dagegen kann man, wie schon hervorgehoben wurde, die Function (17) nicht in die Function (17 c) überführen. Denn führt man eine ähnliche Transformation auf das Punktpaar

$$\tau_1, \tau_4$$

im Ausdrucke

$$[\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_4}]^{1/3}$$

dreimal aus so ergibt sich zwar die neue Function

$$- [\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_4}]^{1/3},$$

dabei ändert sich aber auch das Glied

$$[\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_3}]^{1/3} \text{ in } [-\sqrt{\tau - \tau_1} + \sqrt{\tau - \tau_3}]^{1/3}.$$

Ausser der Function (A), die an der Beziehung (14) angebracht, die Function (17) ergibt, ist es deshalb angezeigt noch die Zuschüsse zu der erwähnten Beziehung zu betrachten, welche erhalten werden, wenn man die Factoren

$$e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{3\pi i}{3}}, e^{\frac{5\pi i}{3}}$$

an (A) anbringt. Von diesen Factoren ist aber nur eine, nämlich die mittlere

$$e^{\pi i}$$

selbständig. Denn wir haben

$$e^{\frac{5\pi i}{3}} = e^{\pi i} \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$e^{\frac{\pi i}{3}} = e^{-\pi i} e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

und da die Factoren

$$e^{\frac{2\pi i}{3}} \text{ und } e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

nicht selbständige Formen bilden, haben wir also bloss den Factor

$$e^{\pi i}$$

zu betrachten. Demnach sind auch nur die Zuschüsse (A) und (B) in Betracht zu ziehen und hiernach bekommen wir zwei unabhängige Gruppen von Functionen vierter Ordnung, nämlich

$$u \text{ und } u'$$

vergl. [(17), (17 a)].

Hier tritt also eine Divergenz auf, indem nämlich bei den Functionen von niedrigerer Ordnung nur *eine* unabhängige Gruppe von u -Functionen existirte. Es liegt nahe anzunehmen, dass dieses Verhalten mit den besonderen Eigenthümlichkeiten, die der Gleichung fünften Grades betreffen, in Zusammenhange steht, obgleich es auf grosse praktische Schwierigkeiten führt, eine diesbezügliche Untersuchung wirklich durchzuführen.

Die beiden Gruppen vierter Ordnung werden durch die folgenden Functionen characterisirt:

$$u = [(\sqrt[3]{x-x_1} + \sqrt[3]{x-x_2})^{1/3} + (\sqrt[3]{x-x_1} + \sqrt[3]{x-x_3})^{1/3}]^{1/4} + \\ + [(\sqrt[3]{x-x_1} + \sqrt[3]{x-x_3})^{1/3} + (\sqrt[3]{x-x_1} + \sqrt[3]{x-x_4})^{1/3}]^{1/4} \quad \text{I}$$

$$u' = [(\sqrt[3]{x-x_1} + \sqrt[3]{x-x_2})^{1/3} - (\sqrt[3]{x-x_1} + \sqrt[3]{x-x_3})^{1/3}]^{1/4} + \\ + [- (\sqrt[3]{x-x_1} + \sqrt[3]{x-x_3})^{1/3} + (\sqrt[3]{x-x_1} + \sqrt[3]{x-x_4})^{1/3}]^{1/4} \quad \text{II}$$

und man erhält die übrigen Functionen dieser Art wenn man die vier Indices

1, 2, 3, 4

in der folgenden Weise variirt:

12	13	14	23	24	21	34	32	31	41	42	43
12	14	13	23	21	24	34	31	32	41	43	42
13	12	14	24	21	23	32	31	34	42	41	43
13	14	12	24	23	21	32	34	31	42	43	41
14	12	13	21	23	24	31	32	34	43	42	41
14	13	12	21	24	23	31	34	32	43	41	42

Indessen sind von diesen nur die folgenden selbständig:

12	13	14	23	24	21	34	32	31	41	42	43
12	14	13	23	21	24	34	31	32	41	43	42
13	12	14	24	23	21	32	34	31	42	41	43

Es existiren demnach im Ganzen zwölf Functionen jeder Gruppe.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 266.)

London. *Chemical society.*

Journal. Vols. 81—82 (1902): 10. 8:o.

— *British Museum.*

Annual return of progress, . . . Year 1901. 8:o.

— *Meteorological office.*

Daily weather report. 1901: 1—12. 4:o.

London, Ontario. *Entomological society.*

The Canadian entomologist. Vol. 34 (1902): No 9. 8:o.

Manchester. *Geological society.*

Transactions. Vol. 27 (1901/1902): P. 10—12. 8:o.

Melbourne. *Royal society of Victoria.*

Proceedings. N. S. Vol. 15 (1902/03): P. 1. 8:o.

Mexico. *Sociedad científica »Antonio Alzate».*

Memorias y revista. T. 16 (1901): Núms. 4—6. 8:o.

— *Observatorio astronomico nacional.*

Informes presentados a la Secretaria de Fomento sobre los trabajos del establecimiento. 1899/1901. 8:o.

Milano. *R. Osservatorio astronomico di Brera.*

Osservazioni meteorologiche. Anno 1901. 4:o.

München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*

Sitzungsberichte. Math.-phys. Classe. 1902: H. 2. 8:o.

Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*

Rendiconto. (3) Vol. 8 (1902): Fasc. 6—7. 8:o.

Paris. *Société astronomique de France.*

Bulletin. 1902: 9. 8:o.

— *Société géologique de France.*

Bulletin. (4) T. 2 (1902): No 2. 8:o.

Perpignan. *Observatoire météorologique et magnétique.*

Bulletin. 27 (1898)—29 (1900). 4:o.

Philadelphia. *Geographical Society.*

Bulletin. Vol. 3 (1901/02): No 4. 8:o.

Rio de Janeiro. *Observatorio.*

Boletim mensal. 1901: 7—12. 8:o.

Roma. *Reale accademia dei Lincei.*

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Rendiconti. (5) Vol. 11 (1902): Sem. 2: Fasc. 5. 8:o.

Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

Atti. (5) P. 2: Notizie degli Scavi. 1902: 6. 4:o.

— *Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei.*

Atti. Anno 55 (1901/1902): Sess. 1—7. 4:o.

San Francisco. *California Academy of sciences.*

Proceedings. Botany. Vol. 2: No 3—9. 1901—1902. 8:o.

Zoology. Vol. 2: No 7—11; 3: 1—4 1901—02. 8:o.

Occasional papers. 8. 1901. 8:o.

San Paulo. *Horto botanico.*

Relatorio. 1901. 8:o.

Strassburg. *K. Hauptstation für Erdbebenforschung.*

Monatsbericht. 1902: 1—5. 8:o.

Sydney. *Australian Museum.*

Memoir. 4: P. 4—5. 1902. 8:o.

— *Geological survey.*

Records. Vol. 7: P. 2. 1902. 8:o.

Torino. *R. Accademia delle scienze.*

Atti. Vol. 37 (1901/02): Disp. 11—15. 8:o.

— *Osservatorio centrale del R. collegio Carlo Alberto in Moncalieri.*

Bollettino mensile. (2) Vol. 21 (1900/01): Num. 1—12. 8:o.

Tufts College. *Studies.*

No 7. 1902. 8:o.

Washington. *U. S. Weather Bureau.*

Monthly weather review. 1902: 4—5. 4:o.

Bulletin. 1. 1902. 4:o.

— *U. S. Department of agriculture.*

Crop reporter. Vol. 4 (1902/03): 4. 4:o.

Report. No. 72. 1902. 8:o.

Division of biological survey. Circular. No. 38. 1902. 8:o.

Office of experiment stations. Experiment station record. Vol. 13: No. 10. 1902. 8:o.

Farmers' bulletin. No. 157—158. 1902. 8:o.

Bureau of plant industry. Bulletin. No. 23. 1902. 8:o.

Division of pomology. Bulletin. No 6. 1902. 8:o.

Division of publications. Circular. No. 444. 1902. 8:o.

Public road inquiries. Bulletin. No. 22. 1902. 8:o.

— *U. S. Geological survey.*

SCHRADER, F. C., & SPENCER, A. C., The geology and mineral resources of a portion of the copper river district, Alaska. 1901. 8:o.

BROOKS, A. H., Reconnaissances in the Cape Nome and Norton Bay regions, Alaska, in 1900. 1901. 8:o.

Wien. *K. Akademie der Wissenschaften.*

Denkschriften. Math.-naturwiss. Classe. Bd 70. 1901. 4:o.

» Philos.-hist. Classe. Bd 47. 1902. 4:o.

Sitzungsberichte. Math.-naturwiss. Classe.

Abth. 1. Bd 110: H. 5—7. 1901. 8:o.

» 2a. Bd 110: H. 8—10. 1901. 8:o.

» 2b. Bd 110: H. 8—9. 1901. 8:o.

» 3. Bd 110: H. 1—10. 1901. 8:o.

Archiv f. österreichische Geschichte. Bd 91: H. 1. 1902. 8:o.

— *Erdbeben-Commission d. K. Akademie der Wissenschaften.*

Mitteilungen. N. F. No 7—8. 1902. 8:o.

— *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.*

Verhandlungen. Bd. 52 (1902): H. 6—7. 8:o.

Af Madame Veuve Godin, Guise.

Le Devoir. T. 26 (1902): 9. 8:o.

Af utgifvarne:

La feuille des jeunes naturalistes, publ. par A. DOLLFUS. (4) Année 32 (1901/02): N:o 384. 8:o.

The American monthly microscopical Journal, ed. by W. C. DOBSON. Vol. 22 (1901): N:o 8-12; 23 (1902): 1-4. 8:o.

Kunst-Formen der Natur von ERNST HAECKEL. Lief. 7. 1902. 4:o.

Af författarne:

NORDENSKIÖLD, E., Explorations dans les régions frontières entre la république Argentine et la Bolivie. Paris 1902. 8:o.

OLSSON, P., Väderleken i Östersund år 1901. Östersund 1901. 8:o.

BAKHUYZEN, H. G. V. D. S., Catalog von Sternen . . . Amsterdam 1901. 4:o.

HEILPRIN, A., A defense of the Panama route. Philadelphia 1902. 8:o.

LÖWENTHAL, E., Die Fulguro-Genesis im Gegensatz zur Evolutions-theorie . . . Berlin 1902. 8:o.

SCHÄFER, W., Königin Kristine v. Schweden. Zürich 1902. 8:o.

WELCKER, A., A dream of realms beyond us. San Francisco 1902. 8:o.



Tryckt den 12 november 1902.

Stockholm 1902. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 59.

1902.

N:o 9.

Onsdagen den 12 november.

INNEHÅLL.

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 285.
OSSEN, C. W., Om ett fall af hvirvelrörelse i en vätska.	» 289.
MALMQUIST, J., Bana för planet (429)	» 309.
KULLGREN, C., Studien über die Inversion II	» 317.
WESTMAN, J., Einige Messungen über die Ablationsgeschwindigkeit der Schneedecke in Stockholm und bei Kärrgrufvan im Frühling 1902.	» 325.
Skänker till Akademiens Bibliotek	sidd. 287, 316, 324, 335.

Tillkännagafs, att Akademiens inländske ledamot af fjärde klassen f. d. föreståndaren för Statens meteorologiska Centralanstalt professor ROBERT RUBENSON med döden afgått.

Med anledning af Kungl. Maj:ts remisser afgåfvos af särskildt utsedde kommitterade följande utlåtanden, som af Akademien godkändes: 1:o) af Herrar LINDHAGEN, DUNÉR, ROSEN och HASSELBERG om upprättandet af en dansk astronomisk-geodetisk station å ön Hven; 2:o) af Herrar NATHORST, SJÖGREN och DAHLGREN om understöd för utgifvande af ett vetenskapligt arbete öfver doktor SVEN HEDIN's resa i Centralasien åren 1899—1902; 3:o) af Herrar LINDHAGEN och HASSELBERG om understöd för 1904 åt tidskriften Acta Mathematica.

Akademien beslöt att i närmaste öfverensstämmelse med af kommitterade framlagdt förslag från och med år 1903 upphöra med utgifvandet af »Öfversigten» och »Bihanget» och i deras ställe utgifva fyra fullt själfständiga facktidskrifter under namn af:

Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik.

Arkiv för Kemi, Mineralogi och Geologi.

Arkiv för Botanik.

Arkiv för Zoologi.

En af bibliotekarien O. GRANBERG upprättad förteckning öfver Akademien tillhöriga porträtt och skulpturer framlades för Akademien.

Hälften af den disponibla årsräntan å Wallmarkska donationen beslöt Akademien tilldela lektorn vid Tekniska Högskolan, doktor K. W. PALMÉR såsom understöd för bestämmandet af de absoluta potentialdifferenserna emellan metaller och elektrolyter; den andra hälften skulle läggas till kapitalet.

Från Regnells zoologiska gäfvomedel beslöt Akademien utdela följande understöd:

åt docenten S. BENGTSSON i Lund 500 kronor för att i norra Sverige, särskildt dess fjällområde, undersöka och insamla *Ephemeroidea* och *Plecopterer*;

åt docenten L. A. JÄGERSKIÖLD i Upsala 500 kronor för bekostandet af ritningar öfver af honom och hans följeslagare å en resa till Egypten och Sudan hemförda zoologiska samlingar;

åt filosofie licentiaten HJ. ÖSTERGREN 400 kronor för fortsatta undersökningar öfver de skandinaviska och arktiska holoturerna;

åt filosofie kandidaten, friherre E. NORDENSKIÖLD 400 kronor för bearbetning af de land- och sötvattensmollusker samt slampref, som han hemfört från gränstrakterna mellan Argentina och Bolivien samt

åt filosofie kandidaten A. TULLGREN 600 kronor för bearbetning af vissa grupper exotiska hymenopterer i Riksmuseets entomologiska afdelning.

Till professor och föreståndare för den meteorologiska Centralanstalten kallade och antog Akademien t. f. föreståndaren doktor HUGO EMANUEL HAMBERG.

Till intendent för riksmuseets etnografiska afdelning kallade och antog Akademien t. f. föreståndaren för denna afdelning doktor KNUT HJALMAR STOLPE.

Herr RETZIUS höll ett föredrag om de af honom utförda undersökningar om nervceller i ryggmärgens ytlager.

Herr BOHLIN meddelade, att ett normalur blifvit i observatoriet uppsatt af Aktiebolaget för svensk normaltid, inlemnade vidare till införande i Öfversigten af Vetenskapsakademiens förhandlingar en afhandling af studeranden MALMQUIST med titel »Bana för planet (429)» samt redogjorde dels för en afhandling af fil. lic. H. VON ZEIPPEL öfver »Angenäherte Jupiterstörungen für die Hecuba-Gruppe», dels ock för en vid Stockholms observatorium utförd undersökning med titel »Determination des corrections du reseau employé depuis 1897 pour les mesures astrophotographiques à l'observatoire de Stockholm».

På tillstyrkan af kommitterade antogos följande afhandlingar till införande i Akademiens skrifter:

i Bihanget till Akademiens Handlingar: 1:o) Einige Theoreme über elektrischen Ladungen und Entladungen von Kondensatoren af doktor A. EKSTRÖM; 2:o) Kvantitativ bestämning af små mängder arsenik i färger, tapeter m. m. af professor P. KLASON och J. KÖHLER; 3:o) Comparaison entre les baromètres normaux d'Upsal et d'Helsingfors af docenten J. WESTMAN samt 4:o) Das Labyrinth der Fische, ein Organ zur Empfindung der Wasserbewegungen af professor T. TULLBERG;

i Öfversigten: de i innehållsförteckningen upptagna fyra afhandlingarne.

Följande skänker anmälde:

Till porträttsamlingen:

af professor HJ. LINDGREN i Lund:

ett porträtt i olja af BERZELIUS, utfördt under hans fyrtiosjunde år af professor Way.

Till biblioteket:

Nio bref från BERZELIUS till pastor H. M. ESMARK i Brevig samt ett från densamme till professor JENS ESMARK i Kristiania, skänkta af Esmarkska släkten genom afdelningsingenjören vid de norska statsbanorna D. ESMARK.

Banden 13—26 af tidskriften Acta Mathematica, skänkta af tidskriftens redaktör professor G. MITTAG-LEFFLER.

Af H. M.T KONUNGEN.

The Fauna of British India. Vol. 1: Heteroptera by W. L. DISTANT.
London 1902. 8:o.

Stockholm. *K. Statistiska Centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. I: N. F. 41; L: 40 a; M: 38;
N: XXXVI; O: XXXIV. 1901—1902. 4:o.

— *Medicinska föreningen.*

Katalog öfver Karol. Inst. och Med. Fören. 1902: Höstterm.

— *Svenska sällskapet för antropologi och geografi.*

Ymer. Årg. 22 (1902): H. 3. 8:o.

Uppsala. *Studentkåren.*

Katalog. 1902: Höstterm. 8:o.

Baltimore. *Maryland Geological Survey.*

Vol. 4 (1902). 8:o.

Belfast. *Natural history and philosophical society.*

Report and proceedings. Sess. 1901/1902. 8:o.

Belgrad. *Académie Royale de Serbie.*

Etnografski spornik. 3—4 & Atlas. 8:o & 4:o.

Bergen. *Museum.*

SARS, G. O., An account of the Crustacea of Norway. Vol. 4 (Copepoda, Calanoida): P. 9—10. 1902. 8:o.

Berlin. *Deutsche entomologische Gesellschaft.*

Deutsche entomologische Zeitschrift. Jahrg. 1901: H. 2; 1902: 1. 8:o.

— *K. Preussisches meteorologisches Institut.*

Bericht über die Thätigkeit. Jahr 1901. 8:o.

Deutsches meteorolog. Jahrbuch. 1901: H. 2. 4:o.

— *K. Preuss. geologische Landesanstalt u. Bergakademie.*

Abhandlungen. L. F. H. 30, 31 & Atlas, 34—36. 1900—1901. 8:o & 4:o.
Jahrbuch. 20 (1899)—21 (1900). 8:o.

Boston. *Amer. Academy of arts and sciences.*

Memoirs. Vol. 12: N:o 5. 1902. 4:o.

Breslau. *Verein f. schlesische Insektenkunde.*

Zeitschrift f. Entomologie. N. F. H. 27. 1902. 8:o.

Brisbane. *R. Geographical Society of Australasia.*

Queensland geographical journal. Vol. 17 (1901/1902). 8:o.

Bruxelles. *Académie Royale de Belgique.*

Classe des lettres... Bulletin. 1902: N:o 8. 8:o.

Classe des sciences. Bulletin. 1902: N:o 8. 8:o.

— *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*

Mémoires. T. 54: Fasc. 5. 1902. 4:o.

Mémoires couronnés et autres mémoires. T. 62: Fasc. 1. 1902. 8:o.

Mémoires couronnés et mém. des savants étrangers. T. 59: Fasc. 3.
1902. 4:o.

— *Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie.*

Bulletin. T. 13 (1899): Fasc. 3. 8:o.

(Forts. i sid. 316.)

Om ett fall af hvirfvelrörelse i en vätska.

Af C. W. OSEEN.

(Meddelad den 12 November 1902 af A. V. BÄCKLUND.)

Denna uppsats behandlar rörelsen i en ideell, åt alla håll oändligt utsträckt vätska under förutsättning, att denna rörelse är rotationslös öfverallt utom i en tunn skrufformig hvirfveltråd. Detta problem har intresse för det första af det skäl, att det i väsentliga punkter erbjuder analogier med de båda klassiska fall af hvirfvelrörelse, då endast en rätlinig eller endast en cirkulär hvirfveltråd finnes, och emedan det dessutom i vissa afseenden är det enda fall af hvirfvelrörelse, som bör sidoställas med dessa. Men vidare tyckas oss de här uppträdande rörelsefenomenen i och för sig förtjäna ett icke obetydligt intresse.

1. Vi antaga, att en ideell, åt alla håll oändligt utsträckt vätska vid en tidpunkt är stadd i en rörelse af följande beskaffenhet. Den skall vara hvirfvellös öfverallt utom i en enda hvirfveltråd. Låt:

$$1. \quad \begin{cases} a = \alpha \cos(\varepsilon + \varphi), \\ b = \alpha \sin(\varepsilon + \varphi), \\ c = h\varepsilon, \end{cases}$$

hvarest a , b , c äro koordinater i ett rätvinkligt koordinat-system, definiera en hvirfvellinie, i det ε är parametern för dess punkter. Låter man α och φ variera kontinuerligt inom ett

litet område, får man en oändlig skara af linier, hvilka utfylla en tråd. Denna tråd skall vara hvirfveltråden, och de nämnda linierna skola vara hvirfvellinier. Rotationshastigheten skall vara konstant längs hvarje hvirfvellinie. Den kan således betraktas som funktion af en punkts läge på ett godtyckligt tvärsnitt. Om denna funktions egenskaper antaga vi, att den är kontinuerlig, att den är $= 0$ på tvärsnittets gräns, och att den öfverallt har samma tecken.

Vi skola undersöka vätskans rörelse, därvid först hvirfvelträdens förändring.

Låt σ vara rotationshastigheten i en punkt på kurvan 1. Emedan denna kurva skall vara en hvirfvellinie, måste den tangeras af rotationsaxeln, och således får man för hvirfvelkomponenterna följande värden:

$$\xi = -\frac{\alpha\sigma \sin(\varepsilon + \varphi)}{\sqrt{\alpha^2 + h^2}}, \quad \eta = \frac{\alpha\sigma \cos(\varepsilon + \varphi)}{\sqrt{\alpha^2 + h^2}}, \quad \zeta = \frac{h\sigma}{\sqrt{\alpha^2 + h^2}}.$$

Enligt den HELMHOLTZ'ska teorien erhåller man följande uttryck för en punkts hastighetskomponenter:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\xi_a(y-b) - \eta_a(z-c)}{q^3} da db dc + \frac{\partial P}{\partial x}, \\ v &= \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\xi_a(z-c) - \zeta_a(x-a)}{q^3} da db dc + \frac{\partial P}{\partial y}, \\ w &= \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\eta_a(x-a) - \xi_a(y-b)}{q^3} da db dc + \frac{\partial P}{\partial z}, \end{aligned}$$

hvarrest ξ_a , η_a , ζ_a betyda hvirfvelkomponenterna i punkten a , b , c , q betyder afståndet mellan punkten x , y , z och punkten a , b , c , och integrationen skall utsträckas öfver hela den del af vätskan, som är stadd i hvirfvelrörelse. Då vi endast vilja betrakta den rörelse, som är en följd af den skrufformiga hvirfvelträdens närvaro, kunna vi sätta $P = 0$. Vi sätta vidare:

$$2. \quad x = r \cos(e + f), \quad y = r \sin(e + f), \quad z = he$$

och få då:

$$3. \begin{cases} u = \frac{h}{2\pi} \iint \frac{r \sin(e+f) - \alpha [\sin(\varepsilon + \varphi) + (e - \varepsilon) \cos(\varepsilon + \varphi)]}{\varrho^3} \sigma d\omega d\varepsilon \\ v = -\frac{h}{2\pi} \iint \frac{r \cos(e+f) + \alpha [(e - \varepsilon) \sin(\varepsilon + \varphi) - \cos(\varepsilon + \varphi)]}{\varrho^3} \sigma d\omega d\varepsilon \\ w = \frac{2\pi}{1} \iint \frac{r\alpha \cos(e+f-\varepsilon-\varphi) - \alpha^2}{\varrho^3} \sigma d\omega d\varepsilon, \end{cases}$$

hvärest:

$$\varrho^2 = r^2 + \alpha^2 - 2r\alpha \cos(e+f-\varepsilon-\varphi) + h^2(e-\varepsilon)^2$$

och $d\omega$ betyder ett ytelement af hvirfelträdens tvärsnitt, vinkelrätt mot hvirfvellinierna.

Uttrycket för w skiljer sig i ett anmärkningsvärdt afseende från uttrycken för u och v , nämligen därigenom att i integralen ε ingår endast i kombinationen $e - \varepsilon$, hvilket har till följd, att w är oberoende af e . Hastighetskomponenten utåt z -axeln är densamma för alla punkter på en skruflinie med steghöjden $2\pi h$. Detta är icke fallet med u och v , men man kan lätt bilda två lineära kombinationer af u , v och w , som ha samma egenskap. Vi betrakta $xu + yv$ samt $yu - xv - hw$. Vi få:

$$\left\{ \begin{aligned} xu + yv &= \\ &= \frac{h}{2\pi} \iint \frac{\{\sin e + f - \varepsilon - \varphi\} - (e - \varepsilon) \cos(e + f - \varepsilon - \varphi)}{\varrho^3} r\alpha \sigma d\omega d\varepsilon \\ yu - xv - hw &= \\ &= \frac{h}{2\pi} \iint \frac{r^2 - 2\alpha r \cos(e + f - \varepsilon - \varphi) + \alpha^2 - \alpha r (e - \varepsilon) \sin(e + f - \varepsilon - \varphi)}{\varrho^3} \sigma d\omega d\varepsilon. \end{aligned} \right.$$

I hvarje punkt på den nyssnämnda skruflinien äro hastighetskomponenterna utåt kurvans tangent, utåt dess principalnormal, således utåt r samt utåt z -axeln och därmed också utåt binormalen desamma, oberoende af punktens läge på spiralen.

Vi skola nu närmare betrakta formlerna 4. Vi bilda integralen:

$$\int (xu + yv) \sigma' d\omega',$$

hvärest x och y hänföra sig till en punkt inom hvirfelträden,

σ' är det tillhörande värdet på hvirfelintensiteten och $d\omega'$ är ett närliggande element af hvirfelträdens tvärsnitt. Vi ha:

$$\int (xu + yv) \sigma' d\omega' = \\ = \frac{h}{2\pi} \iint \frac{\{\sin(e + f - \varepsilon - \varphi) - (e - \varepsilon) \cos(e + f - \varepsilon - \varphi)\}}{q^3} r \alpha \sigma' d\omega' d\varepsilon.$$

Den sista integralen är emellertid $= 0$, ty dess elementer taga två och två ut hvarandra. Mot hvarje element: $\varepsilon = e + u$, α , φ , e , r , f svarar nämligen ett element: $\varepsilon = e - u$, α , f , e , r , φ . Dessa båda element äro numeriskt lika och ha motsatta tecken. Vi ha alltså:

$$\int (xu + yv) \sigma' d\omega' = \int \frac{\partial r^2}{\partial t} \sigma' d\omega' = 0.$$

Då för hvarje hvirfeltråd $\sigma' d\omega'$ är konstant, oberoende af t , så följer af denna formel:

$$\int r^2 \sigma' d\omega' = \text{konst.}$$

Enligt den nämnda satsen af HELMHOLTZ är vidare:

$$\int \sigma' d\omega' = \text{konst.}$$

Till våra förutsättningar om hvirfelträdens beskaffenhet vid den till utgångspunkt valda tiden hörde, att σ' skulle ha samma tecken i alla punkter på tvärsnittet. Definiera vi ett r -värde, r_0 , genom formeln:

$$r_0^2 \int \sigma' d\omega' = \int r^2 \sigma' d\omega',$$

kan detta r_0 betraktas såsom till hörande en centrallinie i hvirfeltråden. Detta r_0 är konstant.¹⁾

Vi öfvergå till den andra af formlerna 4. Dess högra medlem kan skrivas:

$$-\frac{h}{2\pi} \iint \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{(e - \varepsilon)}{q} \sigma d\omega d\varepsilon.$$

¹⁾ Man jämföre härmed en analog sats i teorien för en oändligt tunn cirkulär hvirvelring. Se HELMHOLTZ: Über die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen; KIRSCHOFF: Vorlesungen über Mechanik sid. 265 ff.

Det är alltså, om punkten x, y, z ligger utanför hvirfveltråden, =

$$-\frac{h}{2\pi} \int \sigma d\omega \int_{\epsilon=-\infty}^{\epsilon=+\infty} \frac{(e-\epsilon)}{\varrho} = \frac{I}{\pi},$$

hvarrest:

$$I = \int \sigma d\omega.$$

Härvid är förutsatt, att $h \geq 0$. Är $h = 0$, d. v. s. hvirfveltråden cirkulär, erhåller man i stället:

$$yu - xv = 0,$$

hvilken ekvation helt enkelt utsäger, att i detta fall vätskans partiklar röra sig i plan genom cirkelns axel, vinkelräta mot dess plan.

Den funna formeln:

$$5. \quad \pi(yu - xv - hw) = I$$

gäller äfven i det fall, då punkten x, y, z ligger inom hvirfveltråden. För att uppvisa detta uppdelar vi integralen i den andra af ekvationerna 4. på följande sätt. Vi taga först integralen öfver hela hvirfveltråden med undantag af en oändligt tunn hvirfveltråd, som omsluter punkten i fråga. Den sistnämnda hvirfveltråden skall hafva ett tvärsnitt, som är oändligt litet äfven i förhållande till hela hvirfveltrådens. Den nämnda integralen

skiljer sig från $\frac{I}{\pi}$ med en storhet, som är af samma storhetsordning som $\sigma d\omega$, om σ är rotationshastigheten i punkten x, y, z och $d\omega$ är ytan af den utskurna hvirfveltrådens tvärsnitt. Integralens värde är alltså i limes $= \frac{I}{\pi}$. Integralen öfver den ut-

skurna hvirfveltråden uppdelar vi vidare i tre delar genom två tvärsnitt liggande oändligt nära punkten x, y, z , ett på hvardera sidan. Integralen öfver det i alla dimensioner lilla volumelementet omkring x, y, z är i limes $= 0$, hvilket kanske lättast ses genom införande af polarkoordinater i de ursprungliga formlerna för u, v och w . De båda återstående delarna af

integrationsområdet kunna behandlas på samma sätt som det första fallet. Integralerna bli små, och om man går mot limes, försvinna de. Därmed är satsen bevisad.

Af det föregående framgår följande om hvirfvelträdens förändring med tiden. Tråden kommer alltid att ha form af en skruflinie med steghöjden $2\pi h$. Den har en centrallinie, som alltid kommer att bli på samma afstånd från skrufliniens axel. Skruflinien vrider sig omkring sin axel samtidigt därmed att dess punkter glida utåt kurvan.

Det återstår att besvara två frågor. Behåller hvirfveltråden sin form af en oändligt tunn tråd? Och för det andra: hvilken är den hastighet, hvarmed systemet roterar omkring axeln?

Beträffande den första frågan framhålla vi, att hastighetskomponenterna u , v , w i en punkt x , y , z äro kontinuerliga funktioner af x , y , z , detta äfven om punkten x , y , z ligger inom eller på gränsen af hvirfveltråden. Detta följer omedelbart däraf, att u , v , w äro byggda på samma sätt som komponenterna för den kraft, hvarmed materiella massor attrahera en punkt. Lägga vi till våra föregående förutsättningar om funktionen σ den, att den skall vara en deriverbar funktion af koordinaterna för en punkt på hvirfvelträdens tvärsnitt, så följer däraf vidare, att u , v och w ha kontinuerliga första derivator. Vi taga nu en punkt inom tvärsnittet på afståndet r_0 från axeln. Hastighetskomponenterna i en punkt på tvärsnittet skilja sig från motsvarande hastighetskomponenter i den nyssnämnda punkten med storheter, som äro små af samma ordning som afståndet mellan de båda punkterna. Då detta afstånd är litet för alla punkter på tvärsnittet, så följer, att på mycket små storheter när hastighetskomponenterna äro desamma för alla punkter på tvärsnittet och således, att hvirfveltråden behåller sin form af tråd.

Vi hafva ofvan talat om en centrallinie i hvirfveltråden. Dennas läge vid tiden t kan anges genom följande ekvationer:

$$6. \begin{cases} x = r_0 \cos \left(\varepsilon + \kappa t - \frac{h^2 \mu}{h^2 + r_0^2} t \right), & y = r_0 \sin \left(\varepsilon + \kappa t - \frac{h^2 \mu}{h^2 + r_0^2} t \right), \\ z = h(\varepsilon + \kappa t) + \frac{r_0^2 h \mu}{h^2 + r_0^2} t, \end{cases}$$

hvilka ange läget vid tiden t af den punkt, som vid $t = 0$ har koordinaterna: $x = r_0 \cos \varepsilon$, $y = r_0 \sin \varepsilon$, $z = h\varepsilon$. Här kan κ betraktas som mått på den hastighet, hvarmed trådens punkter glida utåt tråden. Vi få nämligen:

$$\frac{xv - yu + hw}{\sqrt{h^2 + r_0^2}} = \kappa \sqrt{h^2 + r_0^2}.$$

Således:

$$\kappa = -\frac{I}{\pi(r_0^2 + h^2)}.$$

Men vidare finna vi, att μ kan betraktas som mått på den hastighet, hvarmed skruflinien roterar omkring sin axel. Om det endast är fråga om centralliniens läge vid tiden t , kan man nämligen i ofvanstående formler införa $\varepsilon + \kappa t + \frac{r_0^2 \mu t}{h^2 + r_0^2} = \delta$ som parameter i stället för ε . Skrufliniens ekvationer bli då:

$$7. \quad x = r_0 \cos(\delta - \mu t), \quad y = r_0 \sin(\delta - \mu t), \quad z = h\delta.$$

Centrallinien använder således till ett hvarf tiden $\frac{2\pi}{\mu}$.

För att bestämma μ gå vi tillbaka till ekv. 6. Vi finna af denna:

$$h \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) + r_0^2 \frac{dz}{dt} = h r_0^2 \mu.$$

Vi måste göra klar för oss betydelsen af denna ekvation. Den hastighet, hvarmed centrallinien i punkten x, y, z rör sig, har till komponent utåt dess binormal:

$$\frac{h \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) + r_0^2 \frac{dz}{dt}}{r_0 \sqrt{h^2 + r_0^2}}.$$

Bestämningen af μ har således reducerats till bestämningen af denna hastighetskomponent.

Vi betrakta först ett gränsfall. Vi ha tänkt oss hvirfeltrådens tvärsnitt mycket litet. Vi låta nu tvärsnittets area tendera mot noll, och samtidigt låta vi σ växa, så att $I = \int \sigma d\omega$ förblir oförändradt, d. v. s. vi låta hvirfeltråden öfvergå i en hvirfvellinie med samma intensitet som tråden. Den nyssnämnda hastighetskomponenten blir då = motsvarande hastighetskomponent hos liniens materiella punkter. Detta följer omedelbart däraf, att en hvirfvellinie alltid består af samma materiella punkter. Men hastighetskomponenten blir nu ∞ . Ty i det ofvanstående uttrycket har man:

$$\frac{dz}{dt} = w = \frac{Ir_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos(e - \varepsilon) - 1) d\varepsilon}{[2r_0^2 - 2r_0^2 \cos(e - \varepsilon) + h^2(e - \varepsilon)^2]^{3/2}}.$$

Integranden blir ∞ för $\varepsilon = e$, och integralen blir oändlig.

Vi ställa oss nu den uppgiften att finna det sätt, hvarpå hastighetskomponenten växer mot ∞ , när tvärsnittets area på det ofvan angifna sättet tenderar mot 0. Vi betrakta punkten $x = r_0$, $y = 0$, $z = 0$. Omkring denna punkt utbreder hvirvelskrufven ett fält af hastigheter. Detta fält skola vi jämföra med det, som omkring samma punkt framkallas af en cirkulär hvirvelring, som vi konstruera på följande sätt. Dess tvärsnitt skall vara detsamma som hvirvelskrufvens och rotationshastigheten därinom skall vara fördelad på samma sätt som inom hvirvelskrufvens hastighet. Det återstår att fastställa cirkelns storlek och läge i rummet. För detta ändamål lägga vi genom punkten $x = r_0$, $y = 0$, $z = 0$ det oskulerande planet till hvirvelskrufvens centrallinie. Detta utskär en ellips på den räta cylinder, på hvilken centrallinien ligger. Oskulerande cirkeln till denna ellips i punkten $x = r_0$, $y = 0$, $z = 0$ skall vara centrallinie i den cirkulära hvirvelringen.

Denna centrallinie är analytiskt definierad genom ekvationerna:

$$\begin{aligned}
 x + \frac{h^2}{r_0} &= \frac{h^2 + r_0^2}{r_0} \cos \varepsilon, \\
 y &= \frac{h^2 + r_0^2}{r_0} \sin \varepsilon \cos \bar{\omega}, \\
 z &= \frac{h^2 + r_0^2}{r_0} \sin \varepsilon \sin \bar{\omega},
 \end{aligned}$$

hvarest ε är parameter och:

$$\sin \bar{\omega} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r_0^2}}, \quad \cos \bar{\omega} = \frac{r_0}{\sqrt{h^2 + r_0^2}}.$$

Hvirfvelträdens punkter äro gifna genom ekvationerna:

$$a + \frac{h^2}{r_0} = r' \cos \varepsilon, \quad b = r' \sin \varepsilon \cos \bar{\omega}, \quad c = r' \sin \varepsilon \sin \bar{\omega} + \delta,$$

hvarest r' varierar inom ett litet område, som omsluter $\frac{h^2 + r_0^2}{r_0}$,

och δ inom ett litet område omkring 0. De hastighetskomponenter, som genom tråden framkallas i en punkt: $r_0 + x, y, z$, belägen i närheten af $r_0, 0, 0$ äro:

$$\begin{aligned}
 v' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int \frac{r' (\cos \varepsilon \sin \bar{\omega} y - \cos \varepsilon \cos \bar{\omega} z)}{\varrho'^3} \\
 w' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int \frac{r' \left(-\sin \varepsilon z - \cos \varepsilon \sin \bar{\omega} x + r' \sin \bar{\omega} - \left(r_0 + \frac{h^2}{r_0} \right) \cos \varepsilon \sin \bar{\omega} + \delta \sin \varepsilon \right)}{\varrho'^3} \sigma d\omega \\
 u' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int \frac{r' \left(\cos \varepsilon \cos \bar{\omega} x + \sin \varepsilon y - r' \cos \bar{\omega} + \left(r_0 + \frac{h^2}{r_0} \right) \cos \varepsilon \cos \bar{\omega} \right)}{\varrho'^3} \sigma d\omega \\
 v'^2 &= \left(x + \frac{h^2 + r_0^2}{r_0} - r' \cos \varepsilon \right)^2 + (y - r' \sin \varepsilon \cos \bar{\omega})^2 + (z - r' \sin \varepsilon \sin \bar{\omega} - \delta)^2.
 \end{aligned}$$

Så länge hvirfvelträdens tvärsnitt tänkes ändligt, äro dessa komponenter alla ändliga på grund af de förutsättningar, som gjorts om funktionen σ . Gör man däremot den ofvan omtalade gränsöfvergången, bli v' och w' oändliga för $x = y = z = 0$. Bildar man nu differenserna $u - u', v - v', w - w'$ för $x = y = z = 0$,

så finner man, att dessa bli ändliga äfven vid den nämnda gränsöfvergången. Alltså följer, att komponenten af hvirfvelskrufvens hastighet utåt dess binormal vid gränsöfvergången blir oändlig på samma sätt som den cirkulära hvirfveltrådens hastighet vinkelrät mot dess plan, alltså af storhetsordningen $\frac{I r_0}{h^2 + r_0^2} \log \frac{h^2 + r_0^2}{r_0 \delta}$, hvarest δ är en storhet, som är liten af samma ordning som tvärsnittets dimensioner.¹⁾ För en mycket tunn hvirfveltråd har alltså μ samma storhetsordning som $\frac{I}{h \sqrt{h^2 + r_0^2}} \log \frac{h^2 + r_0^2}{r_0 \delta}$.

Om den riktning, i hvilken skrufven roterar, kunna vi säga, att det är den, i hvilken punkterna i dess närhet innanför den röra sig.

Jämte den här betraktade rörelsen har hvirfveltråden en annan, i det dess hvirfvellinier röra sig inom tråden och därvid ändra sitt läge i förhållande till hvarandra. I öfverensstämmelse därmed, att vi betraktat tråden såsom oändligt tunn, ha vi i det föregående bortsett från denna rörelse.

2. Vi öfvergå till en undersökning af de utanför hvirfveltråden liggande delarnes af vätskan rörelse. Hastighetskomponenten i en punkt utåt tangenten till den genomgående skruf-linien med steghöjden $2\pi h$ är:

$$\frac{xv - yu + hw}{\sqrt{r^2 + h^2}} = - \frac{I}{\pi \sqrt{r^2 + h^2}}.$$

Sitt maximum har denna hastighetskomponent i punkterna på z -axeln. Där sammanfaller den med komponenterna utåt z -axeln med tecknet $+$ eller $-$, allteftersom h är $>$ eller < 0 . För oändligt aflägsna punkter ($r = \infty$) är komponenten $= 0$.

Vi skola vidare undersöka medelvärdena af $xu + yv$ och w under den tid som hvirfvelskrufven behöfver för att göra en svängning. För att ha ett bestämdt fall för ögenen antaga vi, att μ är > 0 . Vi betrakta först:

$$\int_0^{t + \frac{\pi}{2\mu}} (xu + yv) dt.$$

¹⁾ Se t. ex. LAMB, Hydrodynamics sid. 259.

För att undersöka värdet af denna integral utgå vi från den första af formlerna 4, hvilken vi likväl skrifa:

$$xu + yv = \frac{Ih}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{\sin(e + f - \varepsilon - \varphi) - (e - \varepsilon) \cos(e + f - \varepsilon - \varphi)\} rr_0}{\varrho^3} d\varepsilon$$

$$\varrho^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(e + f - \varepsilon - \varphi) + h^2(e - \varepsilon)^2,$$

då det nu är fråga om yttre punkter i förhållande till hvirfvel-tråden. Det enda sätt, hvarpå t ingår i uttrycket för $xu + yv$ är i φ . Enligt ekvationerna 7 kan man sätta $\varphi = -\mu t$. Man öfvertygar sig härefter lätt att:

$$\int_t^{t + \frac{2\pi}{\mu}} (xu + yv) dt = 0,$$

i det integralens elementer två och två taga ut hvarandra. Den erhållna formeln kunna vi också skrifa:

$$\int_t^{t + \frac{2\pi}{\mu}} r \frac{\partial r}{\partial t} dt = 0$$

eller, såvida icke $r = 0$:

$$\int_t^{t + \frac{2\pi}{\mu}} \frac{\partial r}{\partial t} dt = 0.$$

Betrakta vi ett ytelement af en cylinder: $r = \text{konst. } (\geq r_0, > 0)$, kunna vi således säga: genom ett sådant ytelement strömmar under den tid, under hvilken hvirfvelskrufven gör en svängning omkring sin axel, lika mycket vätska ut som in. Man kunde vara böjd att tro, att den strömning utåt z -axeln, som äger rum i närheten af skrufvens axel, skulle underhållas genom en tillströmning från sidorna, men enligt det föregående är detta icke fallet.

I det föregående äro de punkter uteslutna, hvilka ligga på hvirfvelskrufvens axel. Bildar man, under antagande att $r = 0$, de båda integralerna:

$$\int_t^{t + \frac{2\pi}{\mu}} u dt, \quad \int_t^{t + \frac{2\pi}{\mu}} v dt,$$

så finner man, att båda försvinna.

Vi vända oss nu till:

$$\int_t^{t + \frac{2\pi}{\mu}} w dt = \frac{Ir_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_t^{t + \frac{2\pi}{\mu}} \frac{(r \cos(e + f - \varepsilon - \mu t) - r_0) d\varepsilon dt}{[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(e + f - \varepsilon - \mu t)^2 + h(\varepsilon - e)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

som vi också kunna skriva:

$$\frac{Ir_0}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_W^{W + 2\pi} \frac{(r \cos W - r_0) dU dW}{[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos W + h^2 U^2]^{\frac{3}{2}}},$$

i det vi sätta:

$$e - \varepsilon = -U, \quad e + f - \varepsilon - \mu t = -W.$$

Denna integral låter lätt beräkna sig. Vi få:

$$\int_t^{t + \frac{2\pi}{\mu}} w dt = \frac{Ir_0}{\pi\mu h} \int_W^{W + 2\pi} \frac{(r \cos W - r_0) dW}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos W} = -\frac{2I}{\mu h},$$

om $r < r_0$, samt:

$$= 0,$$

om $r > r_0$.

Vi betrakta ett plant ytelement, dY vinkelrät mot z -axeln. För att ha ett bestämdt fall för ögonen, antaga vi nu, liksom förut, att μ är > 0 . Genom dY strömmar då under tiden t till $t + \frac{2\pi}{\mu}$ en vätskemängd:

$$\varrho dY \int_t^{t + \frac{2\pi}{\mu}} w dt = -\frac{2I}{\mu h} \cdot \varrho dY,$$

(ϱ = vätskans täthet), om det ifrågavarande ytelementet ligger

inom den cirkulära cylinder, som innehåller hvirvelträdens central-linie. Ligger däremot ytelementet utanför denna cylinder, är denna vätskemängd $= 0$.

Om man endast tar hänsyn till medelvärdena af de hastighetskomponenter, som hvirvelskruften framkallar i vätskan, kunna vi nu göra oss reda för dessa hastighetskomponenter. Vi betrakta först en punkt, som ligger utanför den ofvannämnda cirkulära cylindern. I denna försvinner komponenten utåt z -axeln och likaledes utåt radius vector från z -axeln. Däremot är:

$$\frac{yu - xv - hw}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{I}{\pi \sqrt{r^2 + h^2}}.$$

Hastigheten är således riktad utåt tangenten till en cirkel, gående genom den ifrågavarande punkten, med sitt plan vinkelrät mot z -axeln och sitt centrum liggande på denna. Dess storlek är numeriskt:

$$= \frac{I}{\pi r}.$$

Hvad dess riktning angår, öfvertygar man sig lätt, att den är motsatt den, i hvilken hvirveltråden vridet sig.

Helt annat är förhållandet i en punkt inom den ofvannämnda cirkulära cylindern. Komponenterna utåt radius vector från z -axeln är $= 0$. Däremot är komponenten utåt z -axeln, $w' =$:

$$\frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{2I}{\mu h} = -\frac{I}{\pi h}.$$

Vidare gäller likheten:

$$\frac{yu - xv - hw}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{I}{\pi \sqrt{r^2 + h^2}}.$$

Alltså, om vi multiplicera med dt , integrera från t till $t + \frac{2\pi}{\mu}$ och sätta:

$$u' = \frac{\mu}{2\pi} \int_t^{t + \frac{2\pi}{\mu}} u dt, \quad v' = \frac{\mu}{2\pi} \int_t^{t + \frac{2\pi}{\mu}} v dt, \quad w' = \frac{\mu}{2\pi} \int_t^{t + \frac{2\pi}{\mu}} w dt = -\frac{I}{\pi h}:$$

$$yu' - xv' = 0.$$

Lägger man genom punkten en cirkel, vinkelrät mot z -axeln och med sitt centrum på denna, så är alltså hastighetskomponenten utåt dess tangent $= 0$. För så vidt det endast gäller de här betraktade medelrörelserna, rör sig den förutnämnda cylindern såsom en fast kropp, med hastigheten:

$$-\frac{I}{\pi h}$$

utåt z -axeln.

3. För ett närmare studium af den ifrågavarande rörelsen är det nödvändigt att känna w och $xu + yv$. I det följande skola vi söka serientvecklingar för dem. Ehuru dessa utvecklingar teoretiskt äga ett vidsträckt område för sin giltighet, ägna de sig för verklig beräkning endast, om antingen $\frac{r}{r_0}$ eller $\frac{r_0}{r}$ är en liten storhet, således för punkter, som ligga i närheten af hvirfvelskruvens axel eller som ligga långt ifrån denna axel. För deras användbarhet för punkter i närheten af axeln förutsettes dessutom, att $\frac{h}{r_0}$ skall vara en liten storhet.

Vi betrakta först w , som vi kunna skriva:

$$\frac{Ir_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{r \cos(e + f - \delta - \mu t) - r_0\} d\delta}{\varrho^3},$$

$$\varrho^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(e + f - \delta - \mu t) + h^2(e - \delta)^2.$$

Vi sätta nu:

$$e - \delta = -U, \quad f - \mu t = -V$$

och få då:

$$w = \frac{Ir_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{r \cos(U + V) - r_0\} dU}{[r^2 + r_0^2 + h^2 U^2 - 2rr_0 \cos(U + V)]^{3/2}}.$$

Vi vilja utveckla w i trigonometrisk serie med afseende på V och sätta alltså:

$$\frac{2\pi}{Ir_0} w = \frac{1}{2} A_0 + \sum A_m \cos m V,$$

eftersom w är en jämn funktion af V . Här är:

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dU \int_0^{2\pi} \frac{\{r \cos(U+V) - r_0\} \cos m V dU dV}{[r^2 + r_0^2 + h^2 U^2 - 2rr_0 \cos(U+V)]^{3/2}}.$$

Sätta vi $U + V = W$, kunna vi också skriva:

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dU \int_0^{2\pi} \frac{\{r \cos W - r_0\} \cos m(W-U) dW}{[r^2 + r_0^2 + h^2 U^2 - 2rr_0 \cos W]^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dU \int_0^{2\pi} \frac{\{r \cos W - r_0\} \cos m W \cos m U dW}{[r^2 + r_0^2 + h^2 U^2 - 2rr_0 \cos W]^{3/2}}, \end{aligned}$$

eftersom:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dU \int_0^{2\pi} \frac{\{r \cos W - r_0\} \sin m W \sin m U dW}{[r^2 + r_0^2 + h^2 U^2 - 2rr_0 \cos W]^{3/2}} = 0.$$

Vi sätta nu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 + r_0^2 + h^2 U^2 - 2rr_0 \cos W]^{3/2}} &= \frac{1}{R^3} + \frac{3}{1} \frac{rr_0 \cos W}{R^5} + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} \frac{r^2 r_0^2 \cos^2 W}{R^7} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n (n!)^2} \frac{r^n r_0^n \cos^n W}{R^{2n+3}}, \end{aligned}$$

hvarest:

$$R = [r^2 + r_0^2 + h^2 U^2]^{1/2}.$$

Denna utveckling gäller utom för de punkter, för hvilka $r = r_0$, $W = U = 0$, således för alla punkter utom för dem, som tillhöra hvirveltråden. Vi erhålla häraf:

$$I_m = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n (n!)^2} r^n r_0^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos m U}{R^{2n+3}} dU \int_0^{2\pi} (r \cos W - r_0) \cos^n W \cos m W dW.$$

Som bekant gäller följande sats:

$$\int_0^{\pi} \cos^n W \cos m W dW$$

är = 0, om $n - m$ är udda eller negativt och:

$$= \frac{\pi}{2^n} \frac{n!}{\frac{n-m}{2}! \frac{n+m}{2}!},$$

om $n - m$ är jämnt och positivt eller = 0. Vi få alltså:

$$A_m = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{2m-1+4i!}{2^{m-1+2i}(m-1+2i!)^2} \frac{m+2i!}{2^{m-1+2i}i!m+i!} r_0^{m+2i} r_0^{m-1+2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos m U dU}{R^{2m+1+4i}} -$$

$$- \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{2m+1+4i!}{2^{m+2i}(m+2i!)^2} \frac{m+2i!}{2^{m+2i-1}i!m+i!} r_0^{m+2i} r_0^{m+1+2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos m U dU}{R^{2m+3+4i}}$$

eller också:

$$A_n = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{2m-1+4i!}{2^{m-1+2i}(m-1+2i!)^2} \cdot$$

$$\frac{m+2i!}{2^{m-1+2i}i!m+i!} \frac{r_0^{m+2i} r_0^{m-1+2i}}{h[r^2+r_0^2]^{m+2i}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{m \sqrt{r^2+r_0^2}}{h} U}{[1+U^2]^{\frac{2m+1+4i}{2}}} dU -$$

$$- \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{2m+1+4i!}{2^{m+2i}(m+2i!)^2}$$

$$\frac{m+2i!}{2^{m+2i-1}i!m+i!} \frac{r_0^{m+2i} r_0^{m+2i+1}}{h[r^2+r_0^2]^{m+2i+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{m \sqrt{r^2+r_0^2}}{h} U \cdot dU}{[1+U^2]^{\frac{2m+4i+3}{2}}}.$$

Denna formel gäller för $m > 0$. Hvad A_0 beträffar, låter dess värde beräkna sig direkt, och i själfva verket ha vi redan utfört denna räkning. Man finner, att:

$$A_0 \text{ ant.} = -\frac{4}{hr_0} \text{ eller } = 0,$$

allt eftersom $r < r_0$ eller $r > r_0$.

Beräkningen af A_m har återförts till beräkningen af funktionerna:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{m \sqrt{r^2 + r_0^2}}{h} U \cdot dU}{[1 + U^2]^{\frac{2p+1}{2}}},$$

där p är ett positivt helt tal > 1 . Vi sätta:

$$K(x)_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x U \cdot dU}{[1 + U^2]^{\frac{2p+1}{2}}},$$

och här framträder den uppgiften att beräkna funktionerna K_p . Om vi begagna oss af den begränsning vi förut pålagt oss angående storleken af r , finna vi emellertid att det endast är nödvändigt att beräkna de första af funktionerna K_p . Dessa ha förut funnit uppmärksamhet inom teorien för hvirfvelrörelse i vätskor. J. J. THOMSON har för dem angifvit följande semi-konvergenta utveckling:¹⁾

$$K(x)_p = \sqrt{2\pi} x^p \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2p-1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \left\{ 1 + \frac{p^2 - \frac{1}{2^2}}{2x} + \frac{\left(p^2 - \frac{1}{2^2}\right) \left(p^2 - \frac{3^2}{2^2}\right)}{(2x)^2 \cdot 2} + \dots \right\}.$$

Härmed är utvecklingen af w verkställd.

De första termerna af utvecklingen äro:

$$= \frac{I A_0 r_0}{4\pi} + \frac{I}{\sqrt{2\pi}} \frac{r r_0}{[r^2 + r_0^2]^{3/4}} e^{-\frac{\sqrt{r^2 + r_0^2}}{h}} \cos(f - \mu t) \left[-\frac{r_0^2}{h \sqrt{r^2 + r_0^2}} + \frac{8r^2 - 7r_0^2}{2^3 (r^2 + r_0^2)} + \frac{3h(16r^2 - 19r_0^2)}{2^7 (r^2 + r_0^2)^{3/2}} + \dots \right] + \dots,$$

där A_0 har det förut angifna värdet, nämligen antingen $-\frac{4}{hr_0}$ eller 0.

Vi öfvergå till beräkningen af $xu + yv$. Då detta är en udda funktion af $V = f - \mu t$, sätta vi:

$$xu + yv = \Sigma A'_m \sin mV.$$

Man har:

¹⁾ Motion of vortex rings. Sid. 61.

$$xu + yv = -\frac{Ihrr_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\sin(U+V) - U \cos(U+V)] dU}{[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(U+V) + h^2 U^2]^{\frac{2n+3}{2}}} =$$

$$\frac{Ihrr_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\sin(U+V) - U \cos(U+V)\} dU \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1!}{2^n (n!)^2} \frac{r^n r_0^n \cos^n(U+V)}{[r^2 + r_0^2 + h^2 U^2]^{\frac{2n+3}{2}}}.$$

Man har vidare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(U+V) \cos^n(U+V) dU}{[r^2 + r_0^2 + h^2 U^2]^{\frac{2n+3}{2}}} = -\frac{2n+3}{n+1} h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U \cos^{n+1}(U+V) dU}{[r^2 + r_0^2 + h^2 U^2]^{\frac{2n+5}{2}}}.$$

Alltså:

$$xu + yv = -\frac{Ihrr_0}{2\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3!}{2^{n+1} (n+1)!^2} h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U \cos^{n+1}(U+V) dU}{[r^2 + r_0^2 + h^2 U^2]^{\frac{2n+5}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1!}{2^n (n!)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U \cos^{n+1}(U+V) dU}{[r^2 + r_0^2 + h^2 U^2]^{\frac{2n+3}{2}}} \right\}.$$

Vidare är:

$$\cos^{n+1}(U+V) = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{l=1}^{l=n} b_l \cos l(U+V),$$

hvaräst $b_l = 0$, om $n+1-l$ är udda eller negativt och =

$$\frac{n+1!}{2^n \frac{n+1-l}{2}! \frac{n+1+l}{2}!},$$

om $n+1-l$ är jämnt. Häraf erhåller man:

$$xu + yv = -\frac{Ihrr_0}{2\pi} \sum_0^{\infty} m \left\{ \sum_0^{\infty} i \left[\frac{2m+1+2i!}{2^{m+2i} (m+2i)!^2} \cdot \frac{m+2i!}{2^{m-1+2i} i! (m+i)!} r^{m-1+2i} r_0^{m-1+2i} \right. \right.$$

$$\left. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U \cos m(U+V) dU}{[r^2 + r_0^2 + h^2 U^2]^{\frac{2m+3+4i}{2}}} \cdot \frac{2m-1+2i!}{2^{m-1+2i} (m-1+2i)!^2} \cdot \frac{m+2i!}{2^{m-1+2i} i! (m+i)!} r^{m-1+2i} r_0^{m-1+2i} \right.$$

$$\left. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U \cos m(U+V) dU}{[r^2 + r_0^2 + h^2 U^2]^{\frac{2m+1+4i}{2}}} \right\}.$$

De i denna utveckling förekommande integralerna:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U \cos m(U + V) dU}{[r^2 + r_0^2 + h^2 U^2]^{\frac{2p+1}{2}}}$$

kunna omformas på följande sätt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U \cos m(U + V) dU}{[r^2 + r_0^2 + h^2 U^2]^{\frac{2p+1}{2}}} &= -\frac{m}{h^2(2p-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin m(U + V) dV}{[r^2 + r_0^2 + h^2 U^2]^{\frac{2p-1}{2}}} = \\ &= -\frac{m \sin mV}{h^3(2p-1)(r^2 + r_0^2)^{p-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{m \sqrt{r^2 + r_0^2}}{h} U \cdot dU}{[1 + U^2]^{\frac{2p+1}{2}}} = \\ &= -\frac{m \sin mV}{h^3(2p-1)(r^2 + r_0^2)^{p-1}} K\left(\frac{m \sqrt{r^2 + r_0^2}}{h}\right)_p. \end{aligned}$$

Beräkningen af integralerna är således återförd till beräkningen af funktionerna K_p . Åro dessa beräknade, erhåller man A'_m i form af en oändlig serie.

De första termerna af utvecklingen äro:

$$x + yv = \frac{I r r_0}{\sqrt{2\pi} h^2} \left(\frac{\sqrt{r^2 + r_0^2}}{h}\right)^{1/2} e^{-\frac{\sqrt{r^2 + r_0^2}}{h}} \sin(f - \mu t) \left(1 + \frac{17}{24} \frac{h}{\sqrt{r^2 + r_0^2}} + \dots\right) + \dots$$

En föreställning om storleken af koefficienterna för de periodiska termerna i w och $xu + yv$ får man genom att beräkna dem numeriskt för speciella fall. Sätter man:

$$I = 1 [L^2 T^{-1}], \quad r_0 = 1, \quad r = h = \frac{1}{10}$$

så får man:

$$\begin{aligned} w &= -3,184 - 0,00059 \cos(f - \mu t) + \dots \\ xu + yv &= 0,00058 \sin(f - \mu t) + \dots \end{aligned}$$

De periodiska termerna kunna i detta fall försummas. Behåller man värdena på r_0 , h och I , men sätter $r = 10$, bli koefficienterna fullständigt försvinnande.

Är h litet i förhållande till r_0 , kunna punkterna i närheten af hvirfvelskrufvens axel anses röra sig rätlinigt med konstant hastighet utåt z -axeln. Hurudant än förhållandet mellan h och r_0 är, kunna punkter, hvilkas afstånd från z -axeln är stort, anses röra sig i cirklar omkring denna. Denna del af vätskan rör sig på samma sätt, som om i z -axeln vore placerad en rät hvirfvellinie med intensiteten I .

Bana för planet (429).

Af J. MALMQUIST.

(Meddeladt den 12 november 1902 af KARL BOHLIN.)

1. Planeten 429 upptäcktes år 1897 i Nizza af CHARLOIS. Ur fyra observationer under tiden från den 24 november till den 22 december har af CONIEL härledts följande elementsystem, som finnes angifvet i Bulletin Astronomique, band XVI, sid. 322:

Epok 1897 nov. 24.5. Berl. medeltid.

M_0	39° 2' 43".0	
ω	144 21 33 .6	} 1900.0
Ω	220 39 12 .8	
i	9 48 20 .1	
φ	8 24 13 .0	
μ	846".714	
$\log a$	0.414 845	

2. Förutom de af CONIEL använda observationerna har jag begagnat några stycken till, som gjorts under samma tid som dessa. Samtliga observationerna finnas här sammanställda; numren i sista kolumnen hänvisa till komporationsstjärnorna, som finnas angifna i följande §.

Datum 1897	Observations- ort.	Medeltid.	α app.	log f. p.	δ app.	log f. p. *
nov 27	Marseille	8 ^h 56 ^m 53 ^s	3 ^h 16 ^m 31 ^s .45	9.820 _n	13° 17' 34" .7	0.664 4
29	„	9 46 26	3 14 58 .87	8.964 _n	13 3 11 .6	0.654 3
30	„	7 50 7	3 14 19 .05	9.468 _n	12 56 56 .2	0.686 3
27	Rom	9 56 44	3 16 29 .64	9.004 _n	13 17 20 .6	0.628 5
30	„	6 18 41	3 14 22 .96	9.608 _n	12 57 34 .6	0.706 3
27	Toulouse	9 15 3	3 16 30 .40	9.287 _n	13 17 26 .2	0.662 4
29	„	10 5 15	3 14 58 .18	8.810 _n	13 3 9 .0	0.651 3
30	„	10 49 12	3 14 11 .88	9.148	12 55 51 .8	0.658 3
25	Paris	10 58 50	3 18 0 .80	7.808 _n	13 31 24 .3	0.706 5
24	Nizza	8 39 40	3 18 55 .22	9.410 _n	13 39 44 .1	0.671 6
dec. 17	„	8 59 34	3 5 38 .95	8.562 _n	11 28 53 .1	0.672 2
22	„	10 14 14	3 4 37 .08	9.154	11 13 33 .8	0.681 1

Anmärkningar:

Toulouse, nov. 30. — Medeltiden har här ändrats med -2^h , ty vid jämförelsen mellan efemeriden och observationerna befanns det vara en diskontinuitet i differenserna och denna utjämnades genom den omnämnda korrektionen. Ett skäl som äfven talar för denna ändring är att de motsvarande parallaxfaktorerna höra till den korrigerade tiden.

Marseille, nov. 29. — Parallaxfaktorn för rectacension var oriktig, så att den har ändrats från 7.005_n till 8.964_n.

Den fjärde observationen i Nizza, som CONIEL använt, har jag ej kunnat taga med, emedan den motsvarande differensen från efemeriden afvek för mycket från de i närheten liggande.

En observation, som utförts i Heidelberg i oktober 1901, och som finnes i Astronomische Nachrichten N:o 3765, måste tillhöra en annan planet än denna.

Tabell öfver komporationsstjärnorna.

Ordnings- nummer	α 1897.0	δ 1897.0	Källa
1.	3 ^h 0 ^m 40 ^s .38	+ 11° 15' 57" .5	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \text{ (Glasgow 713 + Paris 3717 +} \\ \text{Weisse I 1032).} \end{array} \right.$
2.	3 5 1 .30	+ 11 28 55 .4	Paris 3798.
3.	3 14 11 .05	+ 13 0 11 .3	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \text{ (Y, 1430 + Glasgow 7680 +} \\ \text{Weisse III 205).} \end{array} \right.$
4.	3 14 13 .17	+ 13 27 22 .3	Weisse I 206.
5.	3 18 9 .86	+ 13 28 15 .1	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \text{ (Weisse III 269 + A. G. Leipz. I} \\ \text{997).} \end{array} \right.$
6.	3 19 41 .22	+ 13 43 27 .2	A. G. Leipz. 1004.

4. Vid en förberedande räkning befunnos korrektionerna i elementen och särskildt i medelrörelsen mycket stora. Jag kom då till följande elementsystem, som jag lade till grund för den följande beräkningen:

Epok 1897, nov. 24.5. Berl. medeltid.

M_0	39° 3' 15".8	
ω	144 17 54 .4	} 1900.0
Ω	220 40 50 .5	
i	9 50 49 .0	
φ	8 24 31 .4	
μ	842".400	
$\log a$	0.416 3255	

Af detta elementsystem härledde jag följande efemerid:

Efemerid för Berl. medeltid.

Datum 1897	α app.	δ app.	$\log \Delta$	abberr. tid
Nov. 22.5	3 ^h 20 ^m 28 ^s .07	13° 54' 21".9	0.18802	0.00 7888
23.5	3 19 37 .60	13 46 37 .0	0.18419	0.00 7859
24.5	3 18 47 .95	13 38 59 .8	0.18544	0.00 7882
25.5	3 17 59 .18	13 31 29 .2	0.18678	0.00 7906
26.5	3 17 11 .87	13 24 7 .0	0.18820	0.00 7932
27.5	3 16 24 .57	13 16 53 .8	0.18969	0.00 7959
28.5	3 15 38 .86	13 9 48 .4	0.14126	0.00 7988
29.5	3 14 54 .29	13 2 52 .6	0.14291	0.00 8018
30.5	3 14 10 .92	12 56 6 .3	0.14462	0.00 8050
Dec. 1.5	3 13 28 .81	12 49 29 .8	0.14641	0.00 8083
2.5	3 12 48 .01	12 43 3 .2	0.14827	0.00 8118
14.5	3 6 33 .65	11 40 3 .4	0.17523	0 00 8638
15.5	3 6 12 .91	11 36 4 .3	0.17780	0.00 8690
16.5	3 5 53 .88	11 32 17 .2	0.18042	0.00 8742
17.5	3 5 36 .56	11 28 42 .1	0.18307	0.00 8795
18.5	3 5 20 .97	11 25 19 .0	0.18577	0.00 8850
19.5	3 5 7 .12	11 22 8 .0	0.18850	0.00 8906
20.5	3 4 55 .02	11 19 9 .1	0.19126	0.00 8968
21.5	3 4 44 .67	11 16 22 .1	0.19406	0.00 9021
22.5	3 4 36 .08	11 13 47 .1	0.19688	0.00 9079
23.5	3 4 29 .26	11 11 29 .0	0.19974	0.00 9189
24.5	3 4 24 .22	11 9 12 .6	0.20262	0.00 9200

5. Genom jämförelse mellan denna efemerid och observationerna kom jag till korrekationer $d\alpha$, $d\delta$, som finnas angifna i nedanstående tabell; den andra och tredje kolumnen innehålla de observerade koordinaterna korrigerade för parallax.

Datum	α geoc.	δ geoc.	$d\alpha$	$d\delta$
Nov. 24.369980	3 ^h 18 ^m 54 ^s .96	13° 39' 48" .8	+0 ^s .60	— 9" .6
25.476861	3 18 0 .99	13 31 30 .2	+0 .69	— 9 .3
27.387105	3 16 31 .22	13 17 38 .2	+1 .42	— 3 .6
27.408980	3 16 30 .12	13 17 30 .5	+1 .33	— 1 .7
27.410640	3 16 29 .79	13 17 25 .6	+1 .08	— 6 .1
29.421455	3 14 58 .66	13 3 16 .6	+0 .91	— 8 .3
29.445441	3 14 58 .12	13 3 13 .4	+1 .41	— 1 .6
30.257471	3 14 22 .62	12 57 39 .6	+1 .30	— 4 .3
30.340151	3 14 18 .64	12 57 1 .5	+0 .87	— 9 1.
30.517597	3 14 11 .52	12 55 56 .2	+1 .35	— 3 .1
Dec. 17.382839	3 5 39 .00	11 28 57 .5	+0 .50	— 9 .2
22.434410	3 4 36 .96	11 13 38 .7	+0 .37	— 10 .2

Af dessa bildade jag sedan följande normalafvikelser:

$\cos \delta d\alpha$	$d\delta$	vikt
+ 9" .40	— 9" .45	2
+ 18 .64	— 3 .80	3
+ 17 .10	— 5 .28	5
+ 7 .35	— 9 .20	1
+ 5 .44	— 18 .20	1

6. Vid beräkningen af de mot dessa afvikelser svarande ändringarna i elementen använde jag SCHÖNHELDTS differentialformler med en liten förändring rörande de homogena variablerna x , y , z , u , v , w . Dessa ha här följande betydelse:

$$x = d\omega + \cos i d\Omega$$

$$y = a \sec \varphi dM_0$$

$$z = 10 a \sec \varphi d\mu$$

$$u = a \cos \varphi d\varphi$$

$$v = \sin \omega di - \cos \omega \sin i d\Omega$$

$$w = \cos \omega di + \sin \omega \sin i d\Omega$$

Efter att ha anbragt vikterna på vauligt sätt kom jag då till följande villkorsekvationer:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 x & y & z & u & v & w
 \end{array} \\
 [1.12381] = +[0.88023] + [0.05286] - [0.06593] + [0.17145] - [9.14301] - [9.24042] \\
 [1.50894] = +[0.46487] + [0.13686] - [0.16132] + [0.25613] - [9.23242] - [9.34094] \\
 [1.58249] = +[0.57055] + [0.24287] - [0.27675] + [0.36300] - [9.34318] - [9.46333] \\
 [0.86627] = +[0.17563] + [9.84635] - [9.86394] + [9.97627] - [8.95042] - [9.15060] \\
 [0.73588] = +[0.15954] + [9.82949] - [9.80899] + [9.96370] - [8.92521] - [9.14945] \\
 - [1.12595] = +[9.32681] + [9.02351] - [9.91586] + [9.00062] + [0.17652] + [0.27394] \\
 - [0.81834] = +[9.41554] + [9.11434] - [0.03705] + [9.08070] + [0.25455] + [0.36308] \\
 - [1.07212] = +[9.52501] + [9.22602] - [0.17719] + [9.18177] + [0.85433] + [0.47452] \\
 - [0.96879] = +[9.11892] + [8.83412] - [9.92274] + [8.73565] + [9.91476] + [0.11493] \\
 - [1.26007] = +[9.09081] + [8.80996] - [9.92696] + [8.70159] + [9.88438] + [0.10862]
 \end{array}$$

Sedan jag upplöst dessa med användande af minsta kvadrat-metoden erhöll jag för x, y, z, u, v, w värdena:

$$\begin{array}{l}
 x = [2.07555] \\
 y = [1.41354] \\
 z = [1.13166_n] \\
 u = [2.49720_n] \\
 v = [2.29062] \\
 w = [2.34021_n]
 \end{array}$$

Häraf fås ändringarna i elementen:

$$\begin{array}{l}
 dM_0 = + \quad 9'' .8 \\
 dw = - \quad 57 .9 \\
 d\Omega = + \quad 2'59 .5 \\
 di = + \quad 4 \quad 51 .7 \\
 d\varphi = - \quad 2 \quad 1 .8 \\
 d\mu = - \quad 5 .136
 \end{array}$$

Det nya elementsystemet blir då följande:

Epok 1897 nov. 24.5. Berl. medeltid.					
M_0	39' 3' 25".6
ω	144 16 56 .5
Ω	220 43 50 .1
i	9 55 40 .7
φ	8 22 29 .6
μ	837".264
α	0.4180961

7. Genom att insätta värdena på x, y, z, u, v, w i villkors-
ekvationerna erhöj jag de öfverblifvande felen:

$\cos \delta da$	$d\delta$
— 2".72	— 2".36
— 2 .55	+ 2 .03
— 0 .77	— 0 .32
— 4 .19	+ 1 .78
+ 3 .44	— 2 .73

Summan af deras kvadrater är 63.29.

Jag gjorde nu en ny efemeridberäkning och fick därigenom
följande nya normalafvikelser:

$\cos \delta dx$	$d\delta$
+ 0".95	— 2".30
+ 6 .67	+ 2 .57
+ 2 .34	— 0 .62
— 1 .91	+ 1 .40
+ 5 .44	— 1 .30

Den stora differensen mellan dessa normalafvikelser och de
öfverblifvande felen beror nog på att termerna af andra ord-
ningen i differentialformlerna ej kunna försummas, då ju afvi-
kelserna mellan elementsystemen blefvo ganska stora. Jag före-
tog därför en ny upplösning af normalekvationerna med använ-
dande af de sist erhållna normalafvikelserna. De därigenom er-
hållna värdena på x, y, z, u, v, w äro

$$\begin{aligned} x &= [1.52740] \\ y &= [0.69050] \\ z &= [0.25956] \\ u &= [1.59592_n] \\ v &= [1.30155_n] \\ w &= [1.34632] \end{aligned}$$

och ändringarna i elementen:

$$\begin{aligned} dM_0 &= + 1".86 & di &= 29".62 \\ d\omega &= + 52 .76 & dq &= 15 .29 \\ d\Omega &= - 19 .36 & d\mu &= 0 .689 \end{aligned}$$

Häraf fås det definitiva elementsystemet:

Epok 1897 nov. 24.5. Berl. medeltid.	
M_0	$39^\circ 3' 27''.46$
ω	$144 17 49 .26$
Ω	$220 43 30 .74$
i	$9 55 11 .08$
φ	$8 22 14 .31$
μ	$837''.953$
$\log a$	$0,4178578$

1900.0

De kvarblifvande felen blefvo nu:

$\cos \delta d\alpha$	$d\delta$
— $3''.01$	— $2''.36$
+ $3 .26$	+ $2 .89$
— $0 .45$	— $0 .34$
— $3 .87$	+ $1 .51$
+ $2 .94$	— $1 .61$

och summan af deras kvadrater 59.59.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts från sid. 288.)

Budapest. *Magyar tudományos akadémia.*

Almanach. 1902. 8:o.

Archæologiai értesítő (Archæologisches Bulletin). Kötet 21 (1901): Sz. 3-5; 22 (1902): 1-3. 8:o.

Mathematikai és természettudományi értesítő (Math. u. naturwiss. Anzeiger). Kötet 19: Füz. 3-5; 20: 1-2. 1901-1902. 8:o.

Mathematikai és természettudományi közlemények (Math. u. naturwiss. Mittheilungen). Kötet 28: Sz. 1. 1902. 8:o.

Math. u. naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd 17 (1899). 8:o.

Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*

Anales. T. 54 (1902): Entr. 2. 8:o.

— *Asiatic Society of Bengal.*

Journal. P. 1 (Philol.) Vol. 70 (1901): N:o 2 & Extra N:o 2. 8:o.

» P. 2 (Nat. Hist.) Vol. 71 (1902): N:o 1. 8:o.

» P. 3 (Anthropol.) Vol. 71 (1902): N:o 1. 8:o.

Proceedings. Year 1901: Nos 9-11; 1902: 1-5. 8:o.

— *Indian museum.*

SCHULZE, F. E., An account of the Indian triaxonia coll. by the survey ship Investigator. 1902. 4:o.

Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoölogy.*

Bulletin. Vol. 38: No 7; 40: 3; 41: 1. 1902. 8:o.

Memoirs. Vol. 27: No. 2. 1902. 4:o.

— *Astronomical Observatory of Harvard College.*

Annals. 38. 1902. 4:o.

Cape Town. *Ceological Commission.*

Annual report. 1900. 8:o.

Chambésy. *Herbier Boissier.*

Bulletin. (2) T. 2 (1902): N:o 10-11. 8:o.

Chemnitz. *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*

Decaden-Monatsberichte. Jahrg. 4 (1901). Fol.

Jahrbuch. Jahrg. 17 (1899): Abth. 1, 3. 4:o.

Cordoba. *Academia Nacional de ciencias.*

Boletin. T. 17: Entr. 1. 1902. 8:o.

Edinburgh. *Royal Physical society.*

Proceedings. Sess. 1900/1901. 8:o.

Emden. *Naturforschende Gesellschaft.*

Jahresbericht. 86 (1900/1901). 8:o.

Frankfurt a. M. *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*

Abhandlungen. Bd 25: H. 3. 1902. 4:o.

Glasgow. *Philosophical society.*

Proceedings. Vol. 33 (1901/1902). 8:o.

(Forts. & sid. 324.)

Studien über die Inversion II.¹⁾ Die Änderung der Inversionsgeschwindigkeit mit der Temperatur.

VON CARL KULLGREN.

[Mitgeteilt am 12 November 1902 von S. ARRHENIUS.]

In seiner Arbeit über die Änderung der Reaktionsgeschwindigkeit mit der Temperatur hebt ARRHENIUS²⁾ hervor, dass der Einfluss der Temperatur auf die Reaktionsgeschwindigkeit nicht auf kinetischem Wege erklärt werden kann. Er weist darauf hin, dass die Vermehrung der Beweglichkeit bei den Molekülen, die eine Temperatursteigerung bewirkt, für die Gase nach der kinetischen Gastheorie nur $\frac{1}{6}$ % per Grad beträgt, und wenn, wie man vermuten kann, die Änderung bei den Flüssigkeiten einigermassen ähnlich ist, diese Vermehrung der Beweglichkeit der Moleküle offenbar keine Erklärung für die Änderung der Reaktionsgeschwindigkeit mit der Temperatur abgibt, welche oft bis zu 10—15 % per Grad beträgt. ARRHENIUS macht daher bezüglich der Inversionsgeschwindigkeit die wohlbekannte Annahme, dass Rohrzucker zu einem geringen Teil aus aktiven Molekülen besteht, deren Anzahl stark mit steigender Temperatur anwächst. Hiervon ausgehend gelangt er zu der Formel: $q_1 = q_0 e^{A(T_1 - T_0) : T_1 T_0}$,

¹⁾ Bihang t. K. Vet. Akad. Handl., Bd. 27, Afd. II, N:o 2; auch Ztschr. f. phys. Chem. 41, 407.

²⁾ Ztschr. f. phys. Chem. 4, 232.

Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1902. Årg. 59. N:o 9.

wo q_1 und q_0 die Inversionskonstanten bei den Temperaturen t_1 und t_0 , T_1 und T_0 die entsprechenden absoluten Temperaturen und A die halbe Umwandlungswärme bei der Verwandlung des Rohrzuckers in aktive Moleküle bedeutet. In einer späteren Arbeit behandelt ARRHENIUS diese Fragen weiter und weist unter anderem darauf hin, dass die innere Friktion ohne Bedeutung für die Reaktionsgeschwindigkeit sein muss,¹⁾ wie auch direkte Versuche gezeigt haben.

Bei der Untersuchung der Einwirkung von Nicht-Elektrolyten auf die Saponifikationsgeschwindigkeit²⁾ des Aethylacetats bin ich zu der Auffassung gekommen, dass die Anzahl der reagierenden Ionen geändert wird, wenn Wasser durch andere Lösungsmittel, wie Alkohol, Aceton mit mehreren, ersetzt wird. Da keine nennenswerte Änderung im Dissociationsgrad der saponifizierenden Base bei geringeren Zusätzen von Alkohol stattfindet, so schloss ich daraus, dass die Änderung in der Anzahl der reagierenden Ionen auf verschiedene Verhältnisse des Aethylacetats bezogen werden muss. Durch Vergleichung der Änderungen des Leitungsvermögens der Natronlauge und ihres Saponifikationsvermögens, wie sie Zusätze der genannten Lösungsmittel herbeiführen, suchte ich zu zeigen, dass die Auffassung wohl der Wirklichkeit entsprechen schien. Gleichzeitig zeigte ich, dass zwischen Natronlauge und Rohrzucker eine chemische Reaktion stattfindet, deren Gleichgewichtszustand berechnet wurde und woraus dann die Dissociationskonstante des Rohrzuckers leicht festgestellt werden konnte.³⁾

In späteren Arbeiten hat auch EULER⁴⁾ die Frage aufgenommen, ob die chemischen Verhältnisse der sog. Nicht-Elektrolyte nicht am besten dadurch sich deuten liessen, dass

¹⁾ Ztschr. f. phys. Chem. 28, 323.

²⁾ Bihang t. K. Vet. Akad. Handl. Bd. 24, Afd. II, N:o 3; auch Ztschr. f. phys. Chem. 37, 618.

³⁾ Bihang t. K. Vet. Akad. Handl. Bd. 27, Afd. II, N:o 2; auch Ztschr. f. phys. Chem. 41, 407.

⁴⁾ Öfversikt af K. Vet. Akad. Förhandl., 1899, N:o 4 und N:o 5, 1900, N:o 9.

sie als Elektrolyte behandelt würden. Ein Hindernis für eine solche Auffassung scheint nicht zu bestehen, aber die von EULER gegebene Darstellung kann nur als orientierend angesehen werden.

Denkt man an die ausserordentlichen Verschiedenheiten im Leitungsvermögen gelöster Körper, so kan man natürlich keinem Körper die Eigenschaft aberkennen, in gewissem Grade Elektrolyt zu sein. Es gilt dann, zahlenmässig diese seine Eigenschaft auszudrücken, um dann zu entscheiden, in welchem Grade sie das Verhalten des Körpers beeinflusst. So ist es bekanntlich beim Wasser geschehen.

Ich habe zu wiederholten Malen versucht, die Dissociationskonstante des Rohrzuckers zu bestimmen, dabei mich stützend auf die chemische Umsetzung zwischen Natronlauge und Rohrzucker, den Gleichgewichtszustand aber auf verschiedene Weise bestimmend, teils aus dem Saponifikationsvermögen der Lösung,¹⁾ teils aus ihrem Leitungsvermögen,²⁾ teils endlich aus ihrem optischen Drehungsvermögen. Nach der ersten Methode erhielt ich als Dissociationskonstante des Rohrzuckers: $K_r = 10,5 \times 10^{-14} (20,7^\circ)$; aus dem entsprechenden Gleichgewichtszustand zwischen Natronlauge und Rohrzucker, wurde das Leitungsvermögen berechnet, wobei eine ziemlich gute Übereinstimmung mit dem direkt beobachteten Werte erhalten wurde. Mit Anwendung von THOMSENS Untersuchungen³⁾ über die Einwirkung der Natronlauge auf das Drehungsvermögen des Rohrzuckers konnte ich die Dissociationskonstante des Rohrzuckers einigermaßen berechnen und fand:⁴⁾ $K_r = 6,5 \times 10^{-14}$, was hinreichend gute Übereinstimmung mit dem zuerst gefundenen Wert zeigt, wenn man in Betracht zieht, dass die letzteren Observationen für diese Berechnung ziemlich ungünstig waren. Wollte man versuchen, von diesem Wert für die Dissociationskonstante des Rohrzuckers aus die chemischen Unsetzungen desselben zu behandeln, und ich denke dabei vornehmlich an die vom

¹⁾ Bihang t. K. Vet. Akad. Handl., Bd. 24, Afd. II, N:o 3.

²⁾ Ebenda, S. 22.

³⁾ Ber. d. d. chem. Ges. 14, 1647.

⁴⁾ Die Berechnung wird an anderer stelle wiedergegeben.

physikalisch-chemischen Gesichtspunkt aus wichtigste, nämlich die Inversion, so ist im allgemeinen erforderlich, dass der Reaktionsmechanismus selbst zuerst festgestellt wäre, was ja nicht der Fall ist. Unter diesen Verhältnissen kann offenbar die so bestimmte Dissociationskonstante nun nicht zur Berechnung der Inversionsgeschwindigkeit in den Fällen verwendet werden, wo das Lösungsmittel durch Zusätze von Stoffen verändert wird. Dagegen ist es möglich, unter der Annahme, dass der Dissociationsgrad beim Rohrzucker sein Reaktionsvermögen bei der Inversion bestimmt, die Dissociationskonstante für Berechnungen in den Fällen zu verwenden, wo dem Lösungsmittel nicht neue Stoffe zugeführt werden, also für die Bestimmung der Änderung der Inversionsgeschwindigkeit mit der Temperatur. Wenn wir da den Katalysator unberücksichtigt lassen, der ja in der gleichen Menge und fast völlig in dem gleichen Dissociationszustand bei zwei verschiedenen Temperaturen vorkommen, so können wir für die Inversionsgeschwindigkeit schreiben:

$$\frac{dx}{dt} = kd_1(A - x)d_2,$$

wo k eine Konstante, A die ursprüngliche Menge Rohrzucker, x die zur Zeit t umgesetzte, und endlich d_1 und d_2 den Dissociationsgrad des Rohrzuckers und des Wassers bezeichnen. Die Menge des Wassers wird als konstant angesehen. Da die Ionenanzahl in der Lösung dieselbe bleibt,¹⁾ so können an Stelle der Dissociationsgrade die proportionalen Grössen, die Dissociationskonstanten, eingeführt werden,²⁾ wobei wir also erhalten:

$$\frac{dx}{dt} = k'K_RK_W(A - x)$$

oder:

$$k'K_RK_W = \frac{1}{t} \log \frac{A}{A - x} = q_1 \text{ (bei Temp. } t_1 \text{)}.$$

¹⁾ Vorausgesetzt wird natürlich, dass die Anzahl Ionen vom Rohrzucker und Wasser vernachlässigt werden kann im Vergleich mit der Ionenanzahl vom Katalysator.

²⁾ ARRHENIUS, Ztschr. f. phys. Chem. 5, 1.

Nach der oben referierten Darstellung, die **ARRHENIUS** von der Vermehrung der Inversionsgeschwindigkeit mit der Temperatur gegeben hat, muss diese Vermehrung zum allergrössten Teil auf einem entsprechenden Zuwachs in der Anzahl der aktiven Moleküle beruhen, d. h. auf einer Vermehrung bei K_R und K_W . Die Änderung von K_W mit der Temperatur kennen wir durch **KOHLRANSCH** und **HEYDWEILLERS** Untersuchung:¹⁾ der Wert von K_R bei drei verschiedenen Temperaturen kann leicht erhalten werden²⁾ aus **MADSENS** Bestimmungen³⁾ welche wie bei den meinigen durch Saponifikationsversuche mit Natronlauge und Rohrzucker ausgeführt werden sind.

Die gesuchten Werte sind:

Temp.:	10,5°	$K_W = 0,325 \times 10^{-14}$	$K_R = 7,24 \times 10^{-14}$
»	26,6°	$K_W = 1,23 \times 10^{-14}$	$K_R = 20,4 \times 10^{-14}$
»	39,8°	$K_W = 3,24 \times 10^{-14}$	$K_R = 41,8 \times 10^{-14}$

Die faktische Vermehrung der Inversionskonstante kann berechnet werden mit **ARRHENIUS'** Formel ($A = 12810$), welche sich sehr nahe an die beobachteten Werte anschliesst. Wir finden da, dass bei

den Temperaturen 10,5° 26,6° 39,8°
 $K_R \cdot K_W$ zunimmt in den Verhältnissen 1 : 10,66 : 57,6,
 während ρ » 1 : 11,34 : 68,9.

Dieses Resultat weist mit Bestimmtheit darauf hin, dass die Änderung der Inversionsgeschwindigkeit mit der Temperatur zum allergrössten Teil auf der Erhöhung der Dissociationskonstanten des Wassers und des Rohrzuckers beruht. Wären diese beiden letzteren unabhängig von der Temperatur gewesen,

¹⁾ Wied. Ann. 53, 209.

²⁾ **KULLGREN**, Bihang t. K. Vet. Akad. Handl., Bd. 27, Afd. II, N:o 2, S. 31.

³⁾ Ztschr. f. phys. Chem. 36, 290. — Der von mir bei 20,7° gefundene Wert weicht ziemlich bedeutend von **MADSENS** Werten ab. Da bei meinen Versuchen der Zuckergehalt stark variiert wurde, dürfte er der sicherere sein; hier oben werden natürlich **MADSENS** Bestimmungen bei allen drei Temperaturen angewendet, da hierdurch die einander best entsprechenden Werte erhalten werden.

so hätte bei den betreffenden Temperaturen die Inversionskonstante in den Proportionen 1 : 1,06 : 1,20 zunehmen müssen. Diese Vermehrung, die also der vermehrten Beweglichkeit der Moleküle entspräche, ist zwar etwas grösser als man erwarten könnte, und scheint ausserdem mit der Temperatur zuzunehmen, aber diese Verhältnisse können sehr wohl auf Fehlbestimmung der Dissoziationsgrade des Wassers ¹⁾ und des Rohrzuckers beruhen, da z. B. eine Erhöhung des Dissoziationsgrades des Wassers bei 39,8° um 2 % dieselbe Vermehrung in der Beweglichkeit der Moleküle per Grad bewirkt, wie sie bei der niedrigeren Temperatur gefunden worden ist.

Hiermit ist also — wohl zum ersten Male — nachgewiesen worden, wie die Änderung der Reaktionsgeschwindigkeit mit der Temperatur der Hauptsache nach auf eine Änderung der Dissoziationsverhältnisse der reagierenden Körper zurückgeführt werden kann. Es ist klar, dass in den Fällen, wo die Dissoziationsgrade wenig mit der Temperatur sich ändern, die vermehrte Beweglichkeit der Ionen eine relativ sehr viel grössere Einwirkung ausüben werden.

Die Änderung der Inversionsgeschwindigkeit mit der Temperatur kann nun auf thermodynamischem Wege behandelt werden. Für die Dissoziationskonstante des Rohrzuckers gilt die VAN'T HOFFSCHE Formel:

$$\frac{d \log_{\text{nat}} K_R}{dT} = \frac{q_1}{2T^2},$$

wo q_1 die Dissoziationswärme des Wassers ist, und für die Dissoziationskonstante des Wassers ebenso:

$$\frac{d \log_{\text{nat}} K_W}{dT} = \frac{q_2}{2T^2},$$

wo q_2 die Dissoziationswärme des Wassers ist.

Wir erhalten also:

$$\frac{d \log_{\text{nat}} K_R \cdot K_W}{dT} = \frac{q_1 + q_2}{2T^2}.$$

¹⁾ Die verschiedenen Methoden, nach welchen die Dissoziation des Wassers bestimmt ist, geben Resultate, die mit 5 Proc., 10 Proc. oder noch mehr variieren.

Wird dann für die Änderung in kinetischer Hinsicht (welche für alle Körper in verdünnten Lösungen gleich gross sein dürfte) korrigiert, so kann also aus q_1 und q_2 die Änderung der Reaktionsgeschwindigkeit mit der Temperatur erhalten werden.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademien's Bibliotek.

(Forts. från sid. 316.)

Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*

Nachrichten. Math.-phys. Klasse. 1902: H. 5. 8:o.

» Phil.-hist. Klasse. 1902: H. 4. 8:o.

Halle a. S. *Verein für Erdkunde.*

Mitteilungen. 1902. 8:o.

Harlem. *Société Hollandaise des sciences.*

Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. (2) T. 7:

Livr. 2-5. 1902. 8:o.

Herenking van het honderdvijftigjarig bestaan van de Hollandsche

Maatschappij d. Wetenschappen op 7 juni 1902. 8:o.

Heidelberg. *Grossherzogl. Badische Universitäts-Bibliothek.*

Akademische Schriften. 1901/1902. 154 st. 8:o & 4:o.

Helsingfors. *Société Finno-Ougrienne.*

Mémoires. 18. 1902. 8:o.

Innsbruck. *Ferdinandum f. Tirol und Vorarlberg.*

Zeitschrift. (3) H. 45. 1901. 8:o.

Krakau. *Académie des sciences.*

Rozprawy. Wydział hist.-filozoficzny. (2) T. 18. 1902. 8:o.

La Plata. *Museo.*

Revista. T. 10. 1902. 8:o.

Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*

Bulletin. (4) Vol. 39: No. 144. 1902. 8:o.

London. *Royal Astronomical society.*

Monthly notices. 62 (1901/02): N:o 9. 8:o.

— *Linnean society.*

Journal. Botany. Vol. 26: N:o 179-180. 1902. 8:o.

Proceedings. Sess. 114 (1901/1902). 8:o.

— *R. Microscopical Society.*

Journal. 1902: P. 5. 8:o.

— *Royal society.*

Proceedings. Vol. 71 (1902/03): No 467-468. 8:o.

— *Zoological society.*

Proceedings. 1902: Vol. 1: P. 2. 8:o.

List. 1901/1902. 8:o.

London, Ontario. *Entomological society.*

The Canadian entomologist. Vol. 34 (1902): No 10. 8:o.

Magdeburg. *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Jahresbericht u. Abhandlungen. 1900/1902. 8:o.

Manchester. *Geological society.*

Transactions. Vol. 27 (1901/1902): P. 14-16. 8:o.

(Forts. & sid. 335.)

Einige Messungen über die Ablationsgeschwindigkeit der Schneedecke in Stockholm und bei Kärngrufvan im Frühling 1902.

Von J. WESTMAN.

(Mitgeteilt am 12 November 1902 von H. HILDEBRANDSSON.)

Im Folgenden werden einige Messungen über die Ablationsgeschwindigkeit der Schneedecke mitgeteilt, die im Frühling 1902 auf Skansen ($\varphi = 59^{\circ} 20'$, $\lambda = 18^{\circ} 7' \text{ E}$ von Gr.) in der Nähe von Stockholm und bei Kärngrufvan, Bergwerk im mittleren Schweden ($\varphi = 60^{\circ} 5'$, $\lambda = 15^{\circ} 57' \text{ E}$ von Gr.), ausgeführt wurden. Der Zweck der Messungen war in erster Linie, einen Beitrag zur Kenntnis der Ablationsgeschwindigkeit der Schneedecke im Tieflande zu liefern. Im Zusammenhang damit wurden auch Beobachtungen über die Mächtigkeit der Schneedecke an den beiden Orten während der Schmelzperiode angestellt. Bei Kärngrufvan sind sämtliche Messungen auf meine Initiative von Herrn THOR ANGELDORFF, dem ich dafür meinen besten Dank sage, ausgeführt worden.

Skansen, eine ungefähr 48 m hohe Berganhöhe am östlichen Aussenrande der Stadt Stockholm, ist ein besonders geeigneter Ort für Untersuchungen der berührten Art aus dem Grunde, weil verschiedenartige Terrainverhältnisse mit teils freien, teils baumbewachsenen Plätzen verschiedener Neigung vorhanden sind. Auf der nordwestlichen, nördlichen und nord-

östlichen Seite der Anhöhe und auf ihrem höchsten Plateau wurden für die Messungen 14 Stellen ausgewählt, deren Höhe über dem Meere, Neigung und Beschattung aus Tab. 1 zu ersehen sind.

Tab. 1.

Punkt N:o	Höhe über dem Meere	Maximalneigung des Terrains		Bemerkungen.
		Grösse	Richtung	
Skansen bei Stockholm: $\varphi = 59^{\circ} 20' \lambda = 18^{\circ} 7' \text{ E von Gr.}$				
1	6 m	25°	NW	Freier Abhang.
2	12	15	NW	} Abhang mit einzelnen Bäumen.
3	12	12	NW	
4	14	15	NW	
5	27	10	NNW	Lichter Nadel- und Laubwald.
6	21	0	—	Freier Platz.
7	25	8	N	Abhang, spärlich bewachsen mit niedrigen Laubbäumen.
8	35	0	—	Baumloser Gipfel einer kleinen Bergan- höhe.
9	42	0	—	} Ziemlich freie Plätze mit einzelnen klei- neren Bäumen.
10	41	0	—	
11	43	0	—	Spärlich bewachsen mit Nadelbäumen.
12	45	5	SW	Ziemlich freier Platz.
13	38	10	N	Abhang mit vereinzelt Bäumen.
14	48	0	—	Freier Platz.
Kärrgrufvan: $\varphi = 60^{\circ} 5' \lambda = 15^{\circ} 57' \text{ E von Gr.}$				
1	184	gering	S	} Spärlich bewachsen hauptsächlich mit Nadelholz.
2	184	gering	S	
3	183	0	—	} Bewachsen mit einzelnen kleineren Obst- bäumen.
4	183	0	—	
5	183	0	—	

Bei Kärrgrufvan wurden die Messungen an fünf Punkten ausgeführt, deren Lage ebenfalls in Tab. 1 angegeben ist. Von diesen Punkten ist N:o 1 nach 4 Uhr Nm. und N:o 2 während des Vormittags beschattet.

An beiden Orten wurden die Messungen über die Geschwindigkeit des Schneesmelzens mittels einer Millimeterskala bewerkstelligt, die durch die Schneedecke hinutergesteckt wurde, so dass sie gegen den Erdboden stiess. Eine Pappscheibe von ungefähr 4 dm² Oberfläche mit einem für die Skala passenden Loch in der Mitte wurde auf die Schneedecke gelegt und an der Oberfläche dieser Scheibe die Höhe der Schneedecke abgelesen. Die Unebenheit der Schneeoberfläche macht es notwendig, eine solche Scheibe anzuwenden. Die Messungen wurden Tag für Tag an denselben Punkten angestellt, indem die Skala immer in das gleiche Loch der Schneedecke gesenkt wurde. Für die Vergleichbarkeit der Messungen war es offenbar notwendig, dass das untere Ende der Skala stets dieselbe Lage erhielt, und es war daher von Gewicht sich zu überzeugen, dass nicht Eisbildung auf dem Grunde des Loches stattgefunden, was bisweilen vorkommen kann. Ebenso achtete man darauf, dass die Skala nicht in den Erdboden eingedrückt wurde, wenn dieser frostfrei geworden war.

Wegen der Nähe der Stadt war die Schneeoberfläche auf Skansen sehr verunreinigt. An den Stellen hingegen, wo die Messungen bei Kärrgrufvan angestellt wurden, war die Schneeoberfläche ziemlich rein. Aus diesem Grunde darf man eine Tendenz zu grösserer Schmelzgeschwindigkeit auf Skansen erwarten als bei Kärrgrufvan.

Die Geschwindigkeit des Schneeabschmelzens auf Skansen in der Zeit von 16 bis zum 30 April geht aus Tab. 2 hervor. Jeder angegebene Wert ist in der Regel das Mittel aus Messungen an drei verschiedenen Punkten, ausser für die Serie N:r 5, wo die angegebenen Zahlen Mittel aus fünf einzelnen Messungen sind. Bisweilen kam es vor, dass ein Messloch zerstört war oder dass es nicht wiedergefunden werden konnte. In einigen wenigen Fällen sind aus diesem Anlass die Mittel aus zwei oder vier Werten gebildet worden. Die Messungen wurden täglich ungefähr um 5 Uhr Nm. angestellt, und die in Tab. 2 gegebenen Zahlen beziehen sich auf die vorhergehenden 24 Stunden.

Tab. 2.

Ablationsgeschwindigkeit (cm in 24 Stunden) auf Skansen.

Datum 1902	N:o 1	N:o 2	N:o 3	N:o 4	N:o 5	N:o 6	N:o 7	N:o 8	N:o 9	N:o 10	N:o 11	N:o 12	N:o 13	N:o 14	Mittel
April 17	1.9	1.2	1.7	—	1.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.6
18	1.1	1.0	2.2	—	1.7	—	—	1.2	—	—	—	—	—	—	3.6
19	5.0	4.8	4.1	—	3.8	—	—	6.1	—	—	—	—	—	—	4.7
20	2.4	2.4	2.4	—	3.1	4.0	—	8.8	—	—	—	—	—	—	3.9
21	—	2.8	2.3	—	3.6	5.9	—	10.6	—	—	—	—	—	—	5.0
22	—	3.2	2.6	—	2.5	3.7	—	7.1	—	—	—	—	—	—	3.8
23	—	2.8	2.6	—	3.0	5.2	1.1	—	4.1	—	1.2	2.5	3.9	1.8	2.6
24	—	4.4	4.9	5.7	3.0	6.0	3.8	—	5.5	—	2.8	5.1	5.3	4.8	5.1
25	—	2.2	4.5	—	3.4	6.1	3.2	—	4.4	—	2.4	4.6	—	3.5	3.8
26	—	3.0	3.6	2.6	2.2	3.5	1.8	—	3.5	—	2.4	2.4	—	3.7	2.8
27	—	1.1	1.2	0.7	0.9	3.2	0.8	—	3.0	—	0.8	2.5	—	1.0	1.5
28	—	2.0	1.2	2.1	1.1	—	1.8	—	5.0	—	2.9	3.7	4.8	2.9	2.7
29	—	3.5	3.4	2.2	2.6	—	2.1	—	3.2	—	2.6	3.8	5.3	3.6	3.2
30	—	3.6	4.3	2.8	2.3	—	3.2	—	—	4.5	2.9	4.7	4.2	3.7	4.0
Mittel	2.6	2.7	2.9	2.7	2.5	4.7	2.2	6.7	4.1	(4.5)	2.3	3.7	4.7	3.1	3.3

Tab. 3.

Mächtigkeit der Schneedecke und Ablationsgeschwindigkeit (cm in 24 Stunden) bei Kärrgruvan.

Datum 1902	Mächtigkeit der Schneedecke					Ablationsgeschwindigkeit (cm in 24 Stunden)									
	N:o 1	N:o 2	N:o 3	N:o 4	N:o 5	N:o 1	N:o 2	N:o 3	N:o 4	N:o 5	Mittel				
	cm	cm	cm	cm	cm										
April 19	44.5	47.0	40.5	56.2	—	—	—	—	—	—	—				
20	41.8	44.9	36.9	52.4	—	2.7	2.1	3.6	3.8	—	3.1				
21	39.6	43.4	33.1	49.5	—	2.2	1.5	3.8	2.9	—	2.6				
22	37.3	41.6	28.1	46.2	—	2.8	1.8	5.0	3.8	—	3.1				
23	34.6	39.1	23.6	42.5	—	2.7	2.5	4.5	3.7	—	3.4				
24	33.2	37.5	19.7	38.1	—	1.4	1.6	3.9	4.4	—	2.8				
25	32.0	36.7	18.7	35.5	—	1.2	0.8	—	2.6	—	1.5				
26	31.4	36.2	17.0	33.5	—	0.6	0.5	1.7	2.0	—	1.2				
27	30.5	35.2	14.8	29.5	—	0.9	1.0	2.2	4.0	—	2.0				
28	28.3	32.5	8.5	24.0	—	2.2	2.7	6.3	5.5	—	4.2				
29	25.7	29.0	(0.0)	19.4	—	2.6	3.5	—	4.6	—	3.6				
30	—	—	—	16.8	—	2.3	2.4	—	2.6	—	2.4				
Mai 1	—	—	—	13.0	—	2.4	2.4	—	3.8	—	2.9				
2	—	—	—	6.5	—	2.3	2.4	—	6.5	—	3.7				
3	16.3	19.4	—	(0.0)	11.4	2.4	2.4	—	—	—	2.4				
4	15.5	17.6	—	—	8.6	1.8	1.8	—	—	—	2.1				
5	13.6	14.9	—	—	2.0	1.9	2.7	—	—	—	2.8				
6	12.0	13.2	—	—	—	1.6	1.7	—	—	—	1.7				
7	9.5	8.0	—	—	—	2.5	5.2	—	—	—	3.8				
Mittel						2.0	2.2	3.9	3.8	4.7	2.8				

In Tab. 3 sind die Messungen über die Ablationsgeschwindigkeit der Schneedecke bei Kärngrufvan zusammengestellt und ausserdem enthält diese Tabelle Angaben über die Mächtigkeit der Schneedecke an den Punkten, wo die Schmelzgeschwindigkeit gemessen wurde. Jede in der Tabelle angegebene Zahl ist das Ergebnis einer einzigen Messung. Diese Messungen wurden täglich ungefähr um 8 Uhr Nm. angestellt. In der Beobachtungsserie für den Punkt N:r 3 findet sich eine Diskontinuität zwischen dem 24 und 25 April. Die späteren Messungen sind an einer Stelle dicht bei der früheren angestellt worden.

Die *Maximalgeschwindigkeit* der Ablation der Schneedecke betrug auf Skansen 10.6 cm und bei Kärngrufvan 6.6 cm in 24 Stunden. In Upsala war der entsprechende Wert 7.6 cm im Jahre 1902¹⁾ und 3.9 cm im Jahre 1901,²⁾ wo das Schmelzen ungefähr einen Monat früher als im 1902 stattfand. Es ist auch klar, dass die Maximalgeschwindigkeit der Ablation im Tieflande und bei den fraglichen Breitengraden um so grösser muss werden können, je später im Frühling das Abschmelzen stattfindet. Der ungewöhnlich grosse Maximalwert für Skansen ist das Mittel aus folgenden vier Messungen:

1902, April 20, 5 Uhr Nm.:	Mächtigkeit der Schneedecke =	15,2	17,3	14,5	20,2	cm
„ „ 21, 5 „ „ :	„ „	7,5	4,0	2,8	11,0	„
	Ablation =	7,7	18,8	12,2	9,2	„

Diese Messungen wurden auf dem Gipfel einer kleinen Berganhöhe (Punkt N:o 8 in Tab. 1) in vereinzeltten Schneeflecken angestellt, die von nacktem Erdboden und teilweise von dunklem Felsengrund umgeben waren. Sowohl am 20 wie am 21 April war der Himmel klar und die Schneeflecke, die nicht von Bäumen oder Büschen beschattet wurden, waren daher teils der direkten Sonnenstrahlung, teils aber auch der Strahlung ausgesetzt, die von dem sie umgebenden Erdboden und vor allem

¹⁾ M. JANSSON et J. WESTMAN: Quelques recherches sur la couverture de neige (Bull. of the Geol. Inst. of Upsala, Upsala 1902).

²⁾ J. WESTMAN: Einige Beobachtungen über das Schwinden einer Schneedecke (Met. Zeitschr. 1901).

vom dem Felsengrunde reflektiert wurde. Dieser letztere Beitrag zu der für die Schmelzung erforderlichen Wärmemenge dürfte der grösste gewesen sein. Da die Windstärke gering war, so dürfte die durch Berührung mit der erwärmten Luft zugeführte Wärmemenge relativ unbedeutend gewesen sein.

Aus den Messungen geht deutlich hervor, dass die Schmelzung schneller vor sich geht, wenn die Schneedecke dünn geworden ist. Die Ursache hierfür dürfte wohl zu einem gewissen Grade in dem Umstande liegen, dass die Schneeoberfläche, je weiter die Schmelzung fortschreitet, mehr und mehr durch die Partikeln mineralischen und organischen Ursprungs, die den Winter über sich in die Schneedecke eingebettet haben, verunreinigt wird. Weil diese Partikeln mehr von der zugestrahlten Wärme absorbieren und weniger durch Reflexion aussenden als eine reine Schneeoberfläche, wird bei ihrer Gegenwart die Schmelzung grösser als bei reiner Schneeoberfläche. Die Hauptursache zu der vermehrten Ablationsgeschwindigkeit ist indessen darin zu suchen, dass der Schneedecke Wärme von den blossen Stellen her zugeführt wird. Man kann oft beobachten, dass die steile Kante einer mehrere Decimeter mächtigen Schneedecke neben einer grösseren blossen Stelle während eines klaren Tages sich wenigstens 10 cm zurückziehen kann, hauptsächlich auf Grund der Strahlung von dem blossen Erdboden her.

Die *Variationen* in der Ablationsgeschwindigkeit sind in Tab. 4 gegeben. Man sieht, dass die Differenz zwischen den

Tab. 4.

Anzahl Fälle, wo die Ablationsgeschwindigkeit zwischen folgenden Grenzen gelegen hat:

Station	Ablationsgeschwindigkeit in 24 Stunden in cm										
	0.0 — 0.9	1.0 — 1.9	2.0 — 2.9	3.0 — 3.9	4.0 — 4.9	5.0 — 5.9	6.0 — 6.9	7.0 — 7.9	8.0 — 8.9	9.0 — 9.9	10.0 — 10.9
Skansen	4	18	30	28	15	9	3	1	1	0	1
Kärgrufvan	4	12	17	8	4	3	3	0	0	0	0

extremen Werten wesentlich grösser auf Skansen ist als bei Kärngrufvan. Indessen sind die Fälle, wo die Ablationsgeschwindigkeit 7.0 cm in 24 Stunden überstieg, sehr selten für Skansen und betragen nur 3 % der Zahl der gesammten Messungen. An beiden Orten war eine Ablation von 2 à 3 cm in 24 Stunden die gewöhnlichste, doch war die Frequenz kleiner Ablationsgeschwindigkeiten (< 2.0 cm) relativ grösser bei Kärngrufvan als auf Skansen.

Der *Mittelwert* der Ablationsgeschwindigkeit während der in Tab. 2 und Tab. 3 angegebenen Tage war 3.3 cm in 24 Stunden auf Skansen und 2.8 cm bei Kärngrufvan. Während der eigentlichen Ablationsperiode in Upsala zwischen dem 10 und 20 April betrug er 3.1 cm. Die Bedeutung von derartigen Mittelwerten der Ablationsgeschwindigkeit ist indessen nicht gut definiert, da der Zeitpunkt, für den der Beginn der Abschmelzungsperiode anzusetzen ist, gewöhnlich nicht genau angegeben werden kann. Es ist daher besser, fünftägige Mittelwerte für die Ablationsgeschwindigkeit zur Vergleichung zu benutzen. Einige solche sind in Tab. 5 für Stockholm (Skansen), Upsala und

Tab. 5.

Fünftägige Mittelwerte der Ablationsgeschwindigkeit.

Datum 1902	Stock- holm (Skansen)	Upsala	Kärn- grufvan
April 11—15	—	1.50	—
16—20	(3.02)	4.12	—
21—25	3.90	—	2.27
26—30	2.86	—	2.64
Mai 1—5	—	—	3.01
6—10	—	—	(2.75)

Kärngrufvan gegeben. Nach diesen wenigen Zahlen zu urteilen, lässt sich für 1902 die Ablationsgeschwindigkeit der Scheedecke nach dem 15 April für das Tiefland des mittleren Schwedens im Mittel auf ungefähr 3 cm in 24 Stunden für freie oder spärlich baumbewachsene Plätze veranschlagen. Wenn die Schnee-

decke früher verschwindet, dürfte anzunehmen sein, dass die mittlere Ablationsgeschwindigkeit während des letzten halben Monats, wo die Schneedecke noch vorhanden ist, weniger als 3 cm beträgt. Im Jahre 1901 fand die Schneeschmelzung in Upsala hauptsächlich zwischen dem 10:ten und 24:ten März statt, mit einer mittleren Geschwindigkeit von nur 1.3 cm in 24 Stunden.

Messungen über die Ablationsgeschwindigkeit des Schnees auf den Gletschern in der Nähe von Sulitelma in der schwedischen Lappmark haben folgende Ergebnisse geliefert:¹⁾

	Meereshöhe	Stuorajekna			Älmajalosjekna
		950 m	1025 m	1175 m	1200 m
Mitte Juli 1897	6.0 cm	—		7.2 cm	—
„ „ 1898	5.0 „	4.2 cm		4.1	—
Ende Juli und Anf. Aug. 1898	—	—		3.3 „	3.0 cm

Die Schneeabschmelzung auf diesen und den umliegenden Gletschern während des Hochsommers scheint also bedeutend rascher geschehen zu können als im Frühling im Tieflande. Offenbar ist die Schneeablationsgeschwindigkeit in der teilweise schneefreien Landschaft um die Gletscher herum im allgemeinen noch bedeutend grösser.

Betreffs der *Abhängigkeit der Ablationsgeschwindigkeit von der Lokalität* ergeben sich aus den Messungen auf Skansen einige Zahlen, die von einigem Interesse sein dürften. Zwischen dem 16 und 30 April betrug für die Punkte N:r 2, N:r 3 und N:r 5 die mittlere Ablationsgeschwindigkeit 2.7 bzw. 2.9 und 2.5 cm in 24 Stunden. Sie war also etwas geringer für Punkt N:r 5, der auf dem nördlichen Abhange von Skansen liegt und mit Bäumen bewachsen, also mehr beschattet ist als die beiden Punkte N:r 2 und N:r 3, die der Abendsonne ausgesetzt und freier sind. Der Unterschied zwischen der Ablationsgeschwindigkeit an beschatteten und der an freien Plätzen tritt besser hervor, wenn ihre Mittelwerte aus den vollständigeren

¹⁾ J. WESTMAN: Beobachtungen über die Gletscher von Sulitelma und Älmajalos (Bull. of the Geol. Inst. of Upsala, Upsala 1899, pg 67).

Serien in Tab. 2 zwischen dem 22 und 30 April verglichen werden. Das Ergebnis ist folgendes:

Beschattete Plätze			Freie Plätze					
			Oben auf Skansen			Auf Nordwestabhänge von Skansen.		
N:r 5	N:r 7	N:r 11	N:r 9	N:r 12	N:r 14	N:r 2	N:r 3	
Mittl. Ablations-								
Geschw. ($\frac{22}{4} - \frac{30}{4}$):	2.3	2.2	2.3	4.1	8.7	8.1	2.8	8.2

Es geht hieraus hervor, dass bei den betreffenden Messungen die Ablationsgeschwindigkeit auf den bewachsenen und mehr beschatteten Plätzen im Mittel ungefähr 2.3 cm in 24 Stunden betrug, während sie für die freien Plätze auf dem Skansen-Plateau ungefähr 3.6 cm und für die Abhänge gegen Nordwesten ungefähr 3.0 cm in 24 Stunden betrug. Im vorliegenden Fall betrug also die Ablationsgeschwindigkeit an den beschatteten Plätzen im Mittel zwei Drittel der Ablationsgeschwindigkeit an den freien Plätzen. Eine wesentliche Verschiedenheit im spezifischen Gewicht der Schneedecke an den verschiedenen Plätzen war nicht vorhanden.

Bei Kärrgrufvan betrug die Mächtigkeit der Schneedecke am 19 April 56 cm am Observationsplatz N:r 4, was als ein Maximum für die Mächtigkeit der Schneedecke auf ebenem und freiem Boden in der betreffenden Gegend anzusehen ist. An freien Plätzen war die Schneedecke am 10 Mai verschwunden.

Auf Skansen betrug die grösste Schneetiefe, die am 22 April angetroffen wurde, 35 cm an einem Punkte und ungefähr 30 cm an 6 verschiedenen Punkten. Als die Messungen am 30 April abgeschlossen wurden, betrug die mittlere Tiefe der Schneedecke an den Schneeflecken, wo die Messungen zuletzt angesetzt wurden, ungefähr 10 cm. Ausnahmsweise konnte an einigen Stellen noch grössere Schneetiefe auf unebenem Boden angetroffen werden, an einem Punkt bis zu 27 cm. Auf den freien Ebenen um Stockholm herum war der Boden überwiegend schneefrei vor dem 30 April. Nach den der Meteorologischen Centralanstalt eingesandten Beobachtungen wurde bei dem Experimen-

talfeld der Boden überwiegend schneefrei am 23 April. Vom Belvedere auf Skansen aus wurde die Ausdehnung der Schneedecke in einem naheliegenden Waldgebiet südlich von Stockholm geschätzt und schien 0,8 von der ganzen Oberfläche am 23 und 24, 0.7 am 27 und 0.6 am 28, 29 und 30 April zu betragen. Am 6 Mai waren einzelne Schneeflecke und am 11 Mai noch letzte Reste der Schneeflecke da zu sehen.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 324.)

- Manila.** *Observatorio de la compañía de Jesús.*
Boletín mensual. Año 1901: 3—4. Fol.
- Marseille.** *Commission de météorologie du dép. des Bouches-du-Rhône.*
Bulletin annuel. Année 20 (1901). 4:o.
- Mauritius.** *Meteorological Society.*
Proceedings a. transactions. Vol. 2 (1901). 8:o.
- Melbourne.** *Observatory.*
Results of observations in meteorology and terrestrial magnetism.
1901: 2. 8:o.
- Mexico.** *Instituto médico nacional.*
Anales. T. 5 (1901): Num. 5. 8:o.
- Montevideo.** *Sociedad meteorologica Uruguay.*
Resumen de las observaciones pluviométricas. Año 10 (1901): 3—4. 8:o.
- München.** *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Philos.-philol. u. hist. Classe. 1902: H. 2. 8:o.
- Nürnberg.** *Naturhistorische Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd 14 (1901). 8:o.
Jahresbericht. 1900. 8:o.
- Oberlin, Ohio.** *College.*
Laboratory bulletin. N:o 12. 1902. 8:o.
The Wilson bulletin. N. S. Vol. 9 (1902): No. 3. 8:o.
- Ottawa.** *Meteorological service of Canada.*
Report. 1900. 4:o.
- Palo Alto.** *Leland Stanford junior university.*
Contributions to biology from the Hopkins seaside laboratory. 28—29.
1902. 8:o.
- Paris.** *Comité du cinquanteenaire scientifique de M. Berthelot.*
M. Berthelot 24 Novembre 1901. Paris 1902. 4:o.
— *Société astronomique de France.*
Bulletin. 1902: 10. 8:o.
- Philadelphia.** *Academy of Natural Sciences.*
Proceedings. Vol. 54 (1902). 8:o.
— *American philosophical society.*
Proceedings. Vol. 41 (1902): N:o 169. 8:o.
- Potsdam.** *Centralbureau der internationalen Erdmessung.*
Veröffentlichungen. N. F. N:o 5. 1902. 4:o.
— *K. Preuss. geodätisches Institut.*
Astronomisch-geodätische Arbeiten. I. Ordnung. Jahr 1901. 4:o.
Bestimmung der Polhöhe und der Intensität der Schwerkraft ...
1902. 8:o.
- Rio de Janeiro.** *Repartição da carta maritima. Directoria de meteorologia.*
Boletim semestral. N:o 8 (1901). 8:o.

Rio de Janeiro. Observatorio.

Annuario. Anno 18 (1902). 8:o.

Boletim mensal. 1902: 1-3. 8:o.

Boletim das observações meteorologicas e dos resultados magneticos
Anno 6 (1901/02): N. 10-12. Fol.

Roma. Reale accademia dei Lincei.

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Rendiconti. (5) Vol. 11 (1902): Sem. 2: Fasc. 6-8. 8:o.

Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

Atti. (5) P. 2: Notizie degli Scavi. 1902: 7-8. 4:o.

Rendiconti. (5) Vol. 11: Fasc. 7-8. 1902. 8:o.

— R. Istituto botanico.

Annuario. Anno 9: Fasc. 3. 1902. 4:o.

— Specola Vaticana.

Pubblicazioni. Vol. 6. 1902. 8:o.

Rothamsted. Laboratory.

Plans and summary tables, arranged for reference in the fields. 1902. 8:o.

Saint Louis. Missouri botanical garden.

Annual report. 13 (1902). 8:o.

St Pétersbourg. Institut impérial de médecine expérimentale.

Archives. T. 9: N:o 2-3. 1902. 4:o.

— Societé Imp. Russe de géographie.

Isvjestija. T. 38 (1902): 2. 8:o.

San Fernando. Instituto y observatorio de marina.

Almanaque náutico. Año 1904. 8:o.

San Francisco. Astronomical society of the Pacific.

Publications. Vol. 14 (1902): N. 86. 8:o.

San José. Instituto físico-geográfico de Costa Rica.

Boletín. Año 2 (1901/1902): No. 19. 8:o.

Stavanger. Museum.

Aarshefter. Aarg. 12 (1901). 8:o.

Sydney. Australian Museum.

Records. Vol. 4: No 7. 1902. 8:o.

— Linnean society of N. S. Wales.

Proceedings. Vol. 27 (1902): P. 1. 8:o.

Tokyo. Societas zoologica Tokyoensis.

Annotationes zoologicae Japonenses. Vol. 4: P. 3. 1902. 8:o.

— Mathematico-physical society at the Imp. university.

Tôkyô sôgaku-buturigaku kwai kizi. No 9: 1. 1902. 8:o.

Trondhjem. Det K. Norske Videnskabers Selskab.

Skrifter. 1901. 8:o.

Washington. Academy of sciences.

Proceedings. Vol. 4: pp. 457-573. 1902. 8:o.

— Bureau of american ethnology.

Bulletin. 26. 1901. 8:o.

— U. S. Weather Bureau.

Report of the chief. 1900/1901: Vol. 1. 4:o.

Monthly weather review. 1902: 6. 4:o.

Washington. U. S. Dep. of agriculture. Alaska agricultural experiment stations.

Bulletin. N:o 1. 1902. 8:o.

— *Smithsonian institution.*

Smithsonian miscellaneous collections. Vol. 61: N:o 1259, 1312—1314. 1902. 8:o.

— *Library of congress.*

List of references on reciprocity: books, articles in periodicals, congressional documents. 1902. 8:o.

— *U. S. Naval observatory.*

Publications. (2) Vol. 2. 1902. 4:o.

— *U. S. Coast and geodetic survey.*

Report of the superintendent. 1900/1901. 4:o.

Special publication. N:o 7. 1902. 4:o.

— *U. S. Geological survey.*

Bulletin. N:o 177—190, 192—194. 1901—1902. 8:o.

Annual report. 21 (1899/1900): P. 5 & maps; 7. 4:o.

— *U. S. Geological Survey.*

Mineral resources of the U. S. Year 1900. 8:o.

Wellington. New Zealand Institute.

Transactions and proceedings. Vol. 34 (1901). 8:o.

Wien. K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.

Abhandlungen. Bd 2: H. 1. 1902. 8:o.

Verhandlungen. Bd. 52 (1902): H. 8. 8:o.

— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*

Abhandlungen. Bd 6: H. 1. Suppl. 1873—1902. Fol.

Zürich. Naturforschende Gesellschaft.

Vierteljahrsschrift. Jahrg. 47 (1902): H. 1—2. 8:o.

Af Professor G. Mittag-Leffler:

Acta Mathematica. Bd 14—26 på holländskt papper.

Af Herr Professor G. Retzius:

RETZIUS, G., & FÜRST, C. M., *Anthropologia Suecica*. Stockholm 1902. Fol.

Af T. W. Backhouse:

Publications of West Hendon House Observatory, Sunderland. N:o 2. 1902. 8:o.

Af Madame Veuve Godin, Guise.

Le Devoir. T. 26 (1902): 10. 8:o.

Af Herrar Frölén & Comp.:

CORNISH, CH. J., *De lefvande djuren på jorden*. H. 1—3. 1902. 4:o.

Af Herrar Wahlström & Widstrand.

Bilder ur Nordens flora. Efter Palmstruch m. fl. *Svensk Botanik af C. A. M. LINDMAN*. H. 8. 1902. 8:o.

Af utgifvarne:

La feuille des jeunes naturalistes, publ. par A. DOLLFUS. (4) Année 32 (1901/02): N:o 385. 8:o.

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen, hrag. von A. SEIDEL. Jahrg. 6: H. 3. 1902. 8:o.

Botaniska notiser, utg. af O. NORDSTEDT. separater ur årg. 1902. 8:o.

Af Författarne:

HEÜMAN, G., Über die Beziehungen zwischen Arbeitsdauer u. Pausenwirkung. Lpz. 1902. 8:o.

HOLMGREN, N., Über den Bau der Hoden und die Spermatogenese von *Silpha carinata*. Jena 1902. 8:o.

— 3 st. småskrifter.

NATHORST, A. G., Zur fossilen Flora der Polarländer. Sthlm 1902. 4:o.

NERMAN, G., Något om Trollhätte kanal, därvarande vattenkraft samt om Venerns reglering. Upsala 1902. 8:o.

ROSENBERG, O., Über die Pollenbildung von *Zostera*. Upsala 1901. 8:o.

CURTIS, H. D., Definitive Determination of the orbit of comet 1898 I. Kiel 1902. 4:o.

DI LEGGE, A., & PROSPERI, A., Osservazioni del diametro orizzontale del sole . . . Roma 1902. 8:o.

EXNER, F. M., Versuch einer Berechnung der Luftdruckänderungen von einem Tage zum nächsten. Wien 1902. 8:o.

HERAIN, J., & MATIEGKA, J., Tycho Brahe. Prag 1902. 8:o.

LEVASSEUR, E., Mémoires sur les monnaies du Règne de François 1^{er}. Paris 1902. 4:o.

— Histoire des classes ouvrières et de l'industrie en France avant 1789. Ed. 2. T. 1—2. Paris 1900—1901. 8:o.

MERCH, E., Index. Darmstadt 1902. 8:o.

MOELANS, J. L., Ballon Parachute et Aérostat dirigeable. Anvers 1902. 8:o.

NEWTON, A., Ootheca Wolleyana: an illustr. catalogue of the collection of birds' eggs, begun by the late John Wolley. Vol. 1. London 1902. 8:o.

TIGERSTEDT, R., Zur Psychologie der naturwissenschaftlichen Forschung. Helsingfors 1902. 8:o.

VALENTIN, J., Der Staubfall vom 9. bis 12. März 1901. Wien 1902. 8:o.

WILLE, N., Mittheilungen über einige von C. E. Borchgrevink auf dem antarctischen Festlande gesammelte Pflanzen. Kristiania 1902. 8:o.

VÖCHTING, H., Zur experimentellen Anatomie. 1902. 8:o.

Tryckt den 11 december 1902.

Stockholm 1902. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 59.

1902.

N:o 10.

Tisdagen den 25 november,

Torsdagen den 11 december

och

Tisdagen den 16 december.

INNEHÅLL.

Öfversigt af sammankomstens förhandlingar	sid. 339.
OHAUS, F., Verzeichniss der von Herrn Dr. YNGVE SJÖSTEDT in Kame- run gesammelten Ruteliden	» 343.
LÖNNBERG, E., List of Pycnogonids collected by the Swedish zoological expedition to Spitzbergen and East Greenland in 1900	» 353.
Skänker till Akademiens porträttsamling och bibliotek	sid. 342, 361.

Tisdagen den 25 november.

Till amanuens vid Meteorologiska Centralanstalten kallade
och antog Akademien fil. doktorn NILS EKHOLM.

Till vetenskapligt biträde vid samma anstalt förordnade
Akademien tillsvidare docenten vid Upsala universitet JONAS
WESTMAN.

Genom anställt val kallade Akademien till inländsk ledamot
af åttonde klassen öfveringenjören vid Fagersta bruk JOHAN
AUGUST BRINELL, till utländsk ledamot af första klassen pro-
fessorn vid universitetet i Strassburg HEINRICH WEBER samt
till utländsk ledamot af sjunde klassen professorn vid universitetet
i Paris ANDRÉ VICTOR CORNIL.

På tillstyrkan af kommitterade antogs till införande i
Bihaget till Akademiens Handlingar en afhandling af civil-

ingeniör **BIRGER LINDGREN** med titel »Sur la fonction entière $e^{K(z)}P_1(z) + P(z)$.

Till delegerade att å Akademiens vägnar närvara vid af-täckandet af **SVEN NILSSONS** byst i Lund den 6 december ut-sågos Herrar **RETZIUS** och **NATHORST**.

Hr **TULLBERG** höll ett föredrag om af honom utförda under-sökningar rörande betydelsen af fiskarnes labyrinth.

Torsdagen den 11 december.

Med anledning af Kongl. Maj:ts remiss afgåfvo Herrar **CHR. LOVÉN** och **S. HENSCHEN** yttrande om af med. doktor **ANTON NYSTRÖM** sökt understöd för utgifvande på svenska af ett veten-skapligt arbete. Detta utlåtande blef af Akademien godkändt.

Det Beskowska stipendiet för år 1903 tilldelades docenten **O. CARLGREN** såsom understöd för studier öfver Riksmuseets samlingar af Anthozoeer.

Till ledamot i Stockholms Högskolas styrelse för åren 1903—1906 utsågs Hr. **TÖRNEBOHM**.

Af anslaget till bearbetning af Riksmuseets samlingar till-delades fil. licentiaten **HJ. MÖLLER** ett honorar af 400 kronor för hans bearbetning af växtfossil från Bornholm.

Genom anställt val kallad Akademien till utländsk leda-mot af fjärde klassen professorn i fysik vid Köpenhamns uni-versitet **CHRISTIAN CHRISTIANSEN**.

Hr **KLASON** höll föredrag om sina undersökningar öfver platina-ammoniäkföreningars kemiska konstitution.

Hr **ROSEN** redogjorde för sina arbeten för höjdbestämming af Sveriges högsta fjäll.

Hr **NATHORST** förevisade växtfossil från polartrakterna och uppehöll sig särskildt vid dem, som hemförts af kapten **SVERDRUP**'s senaste polarexpedition, med hvilkas undersökning Hr. **NATHORST** för närvarande vore sysselsatt. Dessa äro med afseende på be-varingstillståndet synnerligen anmärkningsvärda, ty, ehuru deras ålder måste anslås till millioner år, kunde man ur bergarten

utslamma hela bladbärande små grenar af olika slags barrträd såsom *Sequoia*, *Glyptostrobus*, *Taxodium* m. fl. och efter lämplig behandling uppfästa dem på herbariepapper liksom nutida växter.

Hr NATHORST förevisade äfven ett vid Bergsbro aktiebolag i Norrköping af myskoxens vinterull tillverkad tyg, som med hänseende till mjukhet, lätthet och öfriga goda egenskaper kunde anses såsom i sitt slag enastående.

Hr MITTAG-LEFFLER redogjorde för innehållet af hans senaste arbete med titel »Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène» och förärade Akademien ett exemplar af arbetet.

Till införande i Akademiens skrifter antogos följande afhandlingar:

i Handlingarne: 1:a) Bidrag till Bornholms fossila flora, Gymnospermer, af fil. licentiaten HJALMAR MÖLLER; 2:a) Præcolumbische Wohn- und Begräbnissplätze an der Südwestgrenze von Chaco af fil. kandidaten ERLAND NORDENSKIÖLD;

i Bihaget till Akademiens Handlingar: 1:a) Svenska växt-namn. 1. af professor A. G. NATHORST; 2:a) Om en ny metod för separering af sällsynta jordarter. 1. Framställning af ren neodymoxid, af fil. kandidat O. HOLMBERG samt 3:e) Ueber die Befruchtung von *Plasmopara alpina* (JOHANS.) af docenten O. ROSENBERG;

i Öfversigten: de i innehållsförteckningen upptagna båda uppsatserna.

Tisdagen den 16 december.

Akademien beslöt att, under förutsättning af Hans Maj:t Konungens nådiga bifall, till utländsk hedersledamot kalla ryske ordföranden i den svensk-ryska gradmätningsskommittén, kejserliga ryska Vetenskaps-Akademiens ständige president hans kejserliga höghet storfursten KONSTANTIN KONSTANTINOWITSCH.

Vid dessa sammankomster anmälades följande skänker:

Till porträttsamlingen

af enkefru professorskan E. RETZIUS ett litet originalporträtt i olja af LINNÉ, hvilket porträtt utgjort en skänk af LINNÉ till hans broder kyrkoherden LINNÉ i Stenbrohult.

Till Akademiens Bibliotek:

Stockholm. *K. Statistiska Centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. F. 1901. 4:o.

— *Kongl. Landbruksstyrelsen.*

Berättelse. 1900. 8:o.

Göteborg. *Högskolan.*

Årsskrift. Bd 7 (1901). 8:o.

— *K. Vetenskaps- och Vitterhetssamhället.*

Handlingar. (4) H. 4. 1902. 8:o.

Allegheny. *Observatory.*

Miscellaneous scientific papers. No. 5—9. 1902. 8:o.

Bergen. *Museum.*

Aarbog. 1902: H. 2. 8:o.

Berlin. *Deutsche geologische Gesellschaft.*

Zeitschrift. Bd 54 (1902): H. 2. 8:o.

— *K. Preussische Akademie der Wissenschaften.*

Acta Borussica. Beschreibender Teil: H. 1. 1902. 4:o.

Bonn. *Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Sitzungsberichte. 1902: H. 1. 8:o.

— *Naturhistorischer Verein d. preuss. Rheinlande.*

Verhandlungen. Jahrg. 59 (1902): H. 1. 8:o.

Bruxelles. *Musée du Congo.*

Annales. Botanique. Sér. 1: T. 1: Fasc. 8. 1902. Fol.

» Ethnogr. et anthropol. Sér. 3: T. 1: Fasc. 1. 1902. Fol.

Budapest. *K. Ung. Reichs-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*

Bericht über die Thätigkeit. 2 (1901). 8:o.

Jahrbücher. Bd 29 (1899): Th. 3; 30 (1900): 1, 3; 31 (1901): 2. 4:o.

Namen- u. Sachregister der Bibliothek. 1902. 8:o.

Publicationen. Bd 5 (1902). 4:o.

Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*

Anales. T. 54 (1902): Entr. 3. 8:o.

Buitenzorg. *Jardin Botanique.*

Annales. (2) Vol. 3: P. 2. 1902. 8:o.

Bulletin. N:o 12—15. 1902. 8:o.

Mededeelingen. 58. 1902. 8:o.

Verslag. Jaar 1901. 8:o.

Chambésy. *Herbier Boissier.*

Bulletin. (2) T. 2 (1902): N:o 12. 8:o.

(Forts. å sid. 361.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1902. N:o 10.
Stockholm.

Beiträge zur Kenntniss der Insektenfauna von Kamerun.
N:o 13.

Verzeichniss der von Herrn D:r YNGVE SJÖSTEDT in
Kamerun gesammelten Ruteliden (coleoptera
lamellicornia).

Von D:r F. OHAUS.

Mitgetheilt am 11. December 1902.
Geprüft von CHR. AUBIVILLIUS.

Von den drei Hauptgruppen der Ruteliden ist die erste mit den artenreichen Gattungen *Anomala*, *Mimela* und *Popillia*, die dritte mit der Gattung *Adoretus* in Kamerun vertreten; von der zweiten Hauptgruppe, den echten Ruteliden, findet sich auf dem Festland von Afrika nur eine einzige Art, die *Xenoproctis Ohausi* KOLBE, auf dem Goetterberg bei Kamerun. Von den vorliegenden Popillien sind *kameruna* und *rubromaculata* neu für die Wissenschaft; *anthracina* — bisher nur aus Togo bekannt — und *smaragdina* — von Lagos resp. Gabun — sind neu für die Fauna von Kamerun, während *dorsigera*, *callipyga* und *femoralis* von Monrovia bis zum portugiesischen Kongo verbreitet und auch von Kamerun schon mitgetheilt sind. Die Gattung *Mimela* war bisher nur aus der indomalayischen Region bekannt; einige hierher gehörige westafrikanische Arten wurden als Anomalen beschrieben, da das Hauptmerkmal der Gattung *Mimela*, ein die Vorderhüften nach hinten überragender Fortsatz der Vorderbrust, den betr. Autoren entging.

Es lag nahe, im Anschluss an die vorliegenden Anomalen die in den Sammlungen vorhandenen zahlreichen Arten dieser

Gattung aus Kamerun sowie die beschriebenen Arten aus den angrenzenden Gebieten im Zusammenhang zu bearbeiten. Allein eine solche Arbeit erforderte vorhergehend ein genaues Studium der Typen der bereits beschriebenen Arten, speciell der alten Arten von FABRICIUS, OLIVIER und CASTELNAU, und habe ich deshalb, um den Abschluss der Arbeit nicht zu sehr zu verzögern, nur die vorliegenden Arten besprochen.

1. *Anomala denuda* ARROW, 11 ♂, 8 ♀; die ersteren schwanken in der Länge von 14—15½, die letzteren von 15—17½ mm. Die Mehrzahl der Stücke hat die Mitte der Bauchringe schwarzbraun gefärbt.

2. *Anomala chalcophora* n. sp. Ovata, postice paulo ampliata, parum convexa, nitida, supra fusco-viridis aenea, thoracis et pygidii lateribus rufo-flavis, subtus cum femoribus flavo-testacea, viridi — seu cupreo — micans, tibiae fusco-cupreae, tarsi fusci latere exteriore cupreo-nitentes. Clypeus margine parum elevato fusco cum fronte dense et subtiliter rugulosus, vertex multo dispersius vix subtilius punctulatus. Thorax medio paulo ampliatus antice angustatus angulis anticis acutis sat productis, posticis obtusis nonnihil rotundatis, foveola laterali praeditus undique discrete punctulatus, basi ante scutellum paulo productus, sulculo basali medio vix vel non interrupto. Scutellum basi discrete punctulatum apice laevigata interdum cuprascens. Elytra regulariter punctato-seriata, interstitio subsuturali solum irregulariter punctulata, callis humerali apicalique paulo prominentibus, tota superficie punctis minimis oblecta. Pygidium punctis grossis umbilicatis ad latera praecipue confluentibus oblectum apice pilis fulvis sparsis ornatum. Abdominis segmenta fere glabra disperse punctulata; pectus medio glabrum et impunctatum ad latera conflenter punctatum sparsim et breviter fulvo-hirsutum; processus mesosternalis nullus. Tibiae anticae acute bidentatae, unguis major tarsorum quatuor anteriorum apice fissus.

♂. Long. 15—16, lat. max. 8½—9½ mm. Clypeus subsemicircularis viridiaeneus margine summo fuscus; tibiaram anticarum dens apicalis brevior acuminatus.

♀. Long. 17—18, lat. max. 9—10 mm. Clypeus rectangularis angulis anticis rotundatis — interdum cum frontis parte anteriore — fusco-cupreus; tibiaram anticarum dens apicalis elongatus apice rotundatus.

Es liegen von dieser Art 7 ♂ und 3 ♀ vor. Sie gleicht einer kleinen *Mimela heterochropus* BLANCH. (*Hopei* BURM.) in Habitus und Färbung, ist oben glänzend metallisch grün, die Seiten des Halsschildes und der Afterdecke rothgelb, die Unterseite hellgelb mit Erzglanz, die Brust gewöhnlich etwas dunkler, die Schienen hell kupfrig, die Tarsen schwarzbraun an der Aussenseite schwach kupfrig glänzend. Die Fühler, bräunlichgelb mit schwachem Erzglanz, sind in beiden Geschlechtern gleich lang. Die Hinterbrust, in der Mitte der Länge nach gefurcht, reicht mit ihrer Spitze bis zum Hinterrand der Mittelhüften, ohne sich zwischen diese zu schieben; die Mittelbrust ist schmal ohne Fortsatz. Die Sculptur der Deckflügel besteht aus regelmässigen Punktreihen, den primären Punktreihen entsprechend, beim ♀ wie gewöhnlich etwas kräftiger ausgeprägt als beim ♂; das Interstitium I oder subsuturale enthält eine unregelmässige Punktirung, die sich erst kurz vor dem Hinterrand in eine einfache Punktreihe ordnet, das II und III Int. je eine einfache Punktreihe, in der Mitte unregelmässig verdoppelt, das IV und V Int. sind punktfrei.

3. *Anomala immarginata* n. sp. *A. circumcinctae* HOPE proxime affinis plerumque minor, postice minus ampliata differt praecipue scutello concolore elytrisque immarginatis. Ovata, tota superficie densissime subtiliter punctulata et exinde sericeo-micans, supra fusco-viridis aenea, margine clypei et lateribus thoracis sat late rufo-testaceis, subtus cum pygidio et femoribus testacea viridi-micans, tibiae fusco-aeneae, tarsi fusco-cuprei, antennae fusco-testaceae. Variat subtus cum pygidio plus minusve infusca, supra interdum aureo-cupreo splendore suffusa. Clypeus transversus rectangularis angulis rotundatis, cum fronte dense at subtiliter rugulosus, sutura frontalis rectilinea impressa, vertex fronte vix subtilius et sparsius punctulatus. Thorax brevis me-

dio parum dilatatus undique marginatus, sulculo basali ante scutellum plerumque non interrupto, undique densissime confluentur punctulatus, punctis majoribus sparsis intermixtis, foveola laterali praeditus. Scutellum subsemicirculare sicut thorax punctulatum interdum apice incupratum, in ♀ interdum medio indistincte foveolatum. Elytra modice convexa in ♀ plus quam in ♂ postice ampliata fundo dense ruguloso-punctulata, sericea, superea regulariter punctato-seriata et in interstitio subsuturali irregulariter punctata. Pygidium triangulare in ♂ plus quam in ♀ convexum punctis circumvallatis confluentibus obtectum apice sparsim fulvopilosum. Abdominis segmenta medio glabra ad latera confluentur punctata et sparsissime hirsuta; pectus medio longitudinaliter impressum ad latera confluentur punctatum et sparsim hirsutum; mesosternum angustum, processu coxas medias superante non praeditum. Tibiae anticae acute bidentatae, dente apicali maris brevior acuto, feminae elongato, apice rotundato. Tarsorum quatuor anticorum unguis major fissus.

Long. ♂ $18\frac{1}{2}$ — $20\frac{1}{2}$, ♀ $19\frac{1}{2}$ — $20\frac{1}{2}$, lat. max. ♂ $10\frac{1}{2}$ — $11\frac{1}{2}$, ♀ 11— $11\frac{1}{2}$ mm. 6 ♂, 7 ♀.

Der *A. circumcincta* HOPE zunächst verwandt, ist sie gewöhnlich etwas kleiner als diese — die mir vorliegenden Stücke der *circumcincta* messen 19—25 mm. — über den Hinterhüften weniger verbreitert und höher gewölbt, das Schildchen ist braungrün, selten an der Spitze leicht kupferig, die Seiten der Deckflügel nicht breit gelb gerandet, sondern im Gegentheil etwas dunkler braungrün; auch ist die Färbung der Oberseite im Ganzen etwas dunkler als bei der HOPE'schen Art. Wie bei dieser ist die ganze Oberseite dicht und fein runzelig, matt seidenartig glänzend, auf den Deckflügeln hat sie ausserdem regelmässige Reihen gröberer Punkte, den prim. Punktreihen entsprechend, im I oder subsuturalen Interstitium unregelmässig angeordnete grobe Punkte, im II und III je eine einfache, stellenweise etwas unregelmässige Punktreihe, die beiden anderen Interstitien sind frei von gröberer Punkten. Die Afterdecke ist mit umwallten Punkten bedeckt, deren Umwallung vielfach zusammenfliesst; doch

ist diese Umwallung niedriger, nicht so höckerartig aufgeworfen als bei der *circumcincta*. Das Kopfschild ist etwa doppelt so breit als lang, die Seiten beim ♀ parallel, beim ♂ convergirend und die Ecken stärker abgerundet, bei dem ersteren nur der kurz aufgeworfene Rand, bei dem letzteren auch die vordere Hälfte des Kopfschildes kupferig braun. Der obere oder apicale Zahn der 2-zähligen Vorderschienen ist beim ♂ mässig lang, scharf zugespitzt, beim ♀ ist er fast doppelt so lang und an der Spitze gerundet.

Bei einigen Stücken ist die Oberfläche weniger dicht gerunzelt und daher glänzender, bei anderen mit Kupfer- oder Messingschimmer statt des grünen Erzglanzes übergossen.

4. *Mimela rufoprasina* n. sp. Oblongo-ovalis, parum convexa, nitida, supra saturate prasina, capite thorace scutelloque plus minusve aenescentibus, scutelli apice cupreo-marginato, thoracis lateribus rufo-marginatis; subtus cum pygidio fusco-viridis aenea, pygidii maculis duabus lateralibus magnis, segmentorum abdominalium vitta transversa femoribusque rufis, his plus minus aenescentibus; tibiis brunneo-cupreis, tarsis nigris, antennis rufo-testaceis. Variat tota clarior, capite thoraceque rufo-pellucens. Clypeus transversus angulis anticis rotundatis, dense rugulosus, margine reflexo in ♀ plus quam in ♂ rufo-cupreo; frons ad suturam dense et confluentem, vertex disperse punctata. Thorax medio dilatatus angulis anticis haud productis rectis, lateribus postice paulo arcuatis angulis posticis subrectis paulo productis, sulculo longitudinali vage impresso foveolisque lateralibus praeditus, basi ante scutellum paulo lobato-productus, sulculo basali ante scutellum vix vel non interrupto, disco disperse et subtiliter, lateribus densius punctulatus, margine laterali pilis nonnullis longis flavidis ornatus. Scutellum subsemicirculare thorace profundius disperse punctatum viridi-aeneum apice cupreo-marginatum. Elytra sat plana super coxas posteriores vix dilatata dense at discrete punctulata, punctis hic illic in series coordinatis, callis humerali apicalique prominentibus, inter callos humerales et apicales plicaturis brevibus in seriem longitudinalem ordinatis

praedita. Pygidium dense aciculato-rugulosum apice et lateribus pilis sparsis flavidis obsitum. Abdominis segmenta medio polita lateribus aciculato-punctata linea postmediana piligera praedita, pilis ad latera in fasciculos aggregatis; metasternum medio sulcatum ad latera subtiliter aciculato-reticulatum, pilis sparsis brevibus obsitum, apice tumidulum; prosternum inter coxas anteriores descendens parte posteriore in laminam arcuatam coxas superantem productum. Tibiae anticae bidentatae, dentes sat approximati; tarsorum quatuor anticorum unguis major fissus.

♂. Long. 14—16½, lat. max. 7—8½ mm. Clypeus marginibus anteriore et lateralibus aequaliter reflexus summo margine reflexo solum infuscato; antennarum clava quam in ♀ dimidio longior.

♀. Long. 15½—20, lat. max. 8½—10 mm. Clypeus margine anteriore plus quam lateralibus reflexus dimidio anteriore fusco-cupreus; pygidii apex magis acuminatus atque productus.

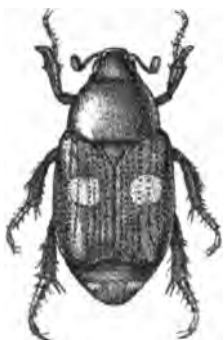
Es liegen von dieser Art 27 ♂ und 19 ♀ vor, ausserdem besitze ich noch einige Stücke von Adamaua, Nord-Kamerun, und vom französ. Kongo, Benito (Donckier). Die Oberseite ist satt grasgrün, wie bei *Euchlora smaragdina* ESCH., die Seiten des Halsschildes gelbroth, das Schildchen stets, zuweilen auch Kopf und Halsschild mit leichtem Erzglanz, das erstere bei der Spitze kupferig gerandet, die letzteren zuweilen röthlich durchscheinend. Die Afterdecke und Unterseite, auch die Vorderhüften, sind dunkel erzgrün, zwei grosse Makeln an der Seite der Afterdecke und ein breiter Querstreifen auf jedem Bauchring mit Ausnahme des letzten hell gelbroth; durch längeres Liegen in Spiritus oder durch Fäulniss der inneren Organe, besonders beim ♀, kann diese rothe Färbung bis auf geringe Reste verschwinden. Die Schenkel sind rothgelb, erzglänzend, die Schienen hell kupferroth, die Tarsen glänzend schwarz, die Fühler braungelb. Von der nächst verwandten *Anomala* (*Mimela*?) *tinctiventris* QUEDENF. vom Kuango (einem südl. Nebenfluss des Kongo) unterscheidet sich die neue Art hauptsächlich durch die Sculptur der Deckflügel. Diese sind bei der *tinctiventris*

»disco distincte sparsim punctata, subtiliter punctato-striata«, resp. »mit einem punktirten Nathstreifen und 8 Rückenstreifen, welche einander paarweis etwas genähert sind; nur der neben dem Nathstreifen liegende, etwas breitere Zwischenraum ist sparsam punktirt, auf den übrigen Zwischenräumen bemerkt man mitunter nur kurze, etwas verworrene Punktreihen«. Bei der *rufoprasina* sind die Deckflügel überall dicht mit feinen, nur unter der Lupe sichtbaren Pünktchen bedeckt, die nur bei der Nath in eine regelmässige, von der Basis bis zum Hinterrand reichende Reihe angeordnet sind; regelmässige Doppelreihen (den primären Punktreihen entsprechend) von Punkten fehlen hier ganz, alle Interstitien und auch die prim. Rippen sind unregelmässig dicht punktirt.

Da die Vorderhüften durch einen Fortsatz der Ventralplatte des Pronotums geschlossen sind, der nach hinten die Vorderhüften überragt, so gehört die Art zur Gattung *Mimela*; auch die nächst verwandte *tinctiventris* QUEDENF. dürfte hierher gehören. Ebenso gehört hierher die als *Euchlora* beschriebene *circumcincta* HOPE, deren lamellenartiger Vorsprung zwischen den Vorderhüften diese deutlich nach hinten überragt. Die weiter oben beschriebene *A. immarginata* bildet gewissermaassen eine Mittelstufe zwischen *Anomala* und *Mimela*; zwischen ihren Vorderhüften senkt sich ein Vorsprung herab, der von der Basis bis zur halben Höhe der Vorderhüften herabreicht, diese jedoch nicht nach hinten überragt. Am stärksten ist der Prosternalzapfen ausgebildet bei der als *Anomala* beschriebenen *pygialis* FAIRM. von Gabun; er reicht hier bis zur Spitze der Vorderhüften und seine untere Kante ist — wie bei vielen orientalischen *Mimelen* — verbreitert.

Auffallend ist bei der *M. rufoprasina* der Geschlechtsunterschied in der Form des Spitzenzahnes der Vorderschienen. Beim ♂ verläuft der Innenrand dieses Zahnes fast in gerader Linie von der Basis bis zur Spitze; beim ♀ dagegen zuerst gerade nach vorn und biegt dann plötzlich nahezu rechtwinklig nach aussen um.

Fig. 1.

*Popillia rubromaculata*

OHAUS. (Vergr. 2,5.)

5. *Popillia dorsigera* NEWM. 1 ♀.
 6. *Popillia callipyga* DOHRN 3 ♂ 2 ♀.
 7. *Popillia anthracina* KOLBE 1 ♀.
 8. *Popillia femoralis* KLUG 1 ♂ 1 ♀.
 9. *Popillia smaragdina* KRAATZ 1 ♀.
 10. *Popillia kameruna* KOLBE 3 ♀.
 11. *Popillia deplanata* OHAUS 1 ♂.
 12. *Popillia bitaeta* KRAATZ 1 ♀.
 13. *Popillia rubromaculata* n. sp. Fig. 1.
1. *P. sankuruensi* n.¹⁾ proxime affinis, minor, differt colore et thorace scutelloque grossius punctatis. Ovata, robusta, depressa, nitidissima, fusco-nigra viridi-aenescens, elytra nigra macula circulari miniata disco medio ornata, pygidium ad basin utrinque fasciculo lineiformi curvato pilorum albo-flavidorum ornatum, abdominis segmenta, pectoris latera femorumque pars anterior dense flavido-pilosa. Clypeus subtrapezoidalis lateribus antice vix convergentibus marginibus parum elevatis, dense rugulosus parum nitidus; frons dense confluent punctata subnitida, vertex pone oculos aciculatus disco disperse punctatus nitidus. Thorax antice aequaliter angustatus pone angulos anteriores paulo impressus, angulis anticis acutis valde productis, posticis obtusis haud rotundatis, disco ante scutellum impunctatus, lateribus et apice dense confluent punctatus, foveolae lateralis loco macula parva impunctata ornatus, sulculo laterali in basi usque ad medium inter angulos posteriores et scutellares producto. Scutellum regulariter trigonum basi et apice punctatum. Elytra plana regulariter at non profunde striato-punctata, callis humerali apicalique prominentibus impunctatis. Pygidium conicum convexum dense arcuatim aciculatum; abdominis segmenta medio glabra linea transversa punctorum postmediana, medio non interrupta praedita, ad latera dense aciculato-punctata et dense flavido-pilosa. Pectus medio glabrum longitudinaliter impressum lateribus dense aciculato-punctatum et dense pilis oppressis vestitum;

¹⁾ Stettin. Ent. Zeit. 1897 p. 361.

processus mesosternalis descendens altus compressus angulo inferiore rotundato, superiore recto inter coxas anteriores prominens. Tibiae anticae bidentatae, dente apicali perlongo angusto apice parum rotundato.

Long. $12\frac{1}{2}$, lat. max. 7 mm. 2 ♀.

Diese Art ist der *P. sankuruensis* m. vom Sankuru, einem südl. Nebenfluss des Kongo am nächsten verwandt und steht zu ihr in demselben Verhältniss wie die *P. anthracina* zur *atra*, die *intermedia* zur *mutabilis*, die *viridicyanea* zur *melanochlora* u. s. w. Die Grundfarbe ist glänzend braunschwarz mit grünem Erzschimmer, besonders an den Rändern, die Deckflügel rein schwarz mit einem scharf begrenzten kreisrunden mennigrothen Fleck auf der Mitte der Scheibe. Am Seitenrand des Halsschildes stehen einige lange gelbe Haare, auf der Afterdecke jederseits bei der Basis ein schmaler strichförmiger gebogener Büschel gelblich-weisser Haare, die Bauchringe, die Brust und die vordere Hälfte der Schenkel sind dicht mit gelblichen Schuppenhaaren bekleidet, die auf dem vorletzten Bauchring nur von der gewöhnlichen Querreihe borstentragender Punkte ausgehen, auf den übrigen Bauchringen aber die ganzen Seiten bedecken. Die Deckflügel sind regelmässig aber seicht gefurcht und punktirt, den primären Punktreihen entsprechend, die prim. Rippen sind nicht höher gewölbt als die Interstitien; das I oder subsuturale Interstitium ist durch eine auch an der Basis einfache und regelmässige Punktreihe, die bis zum Hinterrand reicht, in 2 secund. Rippen getheilt; das II Int. ist sehr breit und trägt eine in der Mitte unterbrochene und nicht bis zum Hinterrand reichende Reihe flacher Punkte. Die Scheibe ist hinter dem Schildchen seicht eingedrückt, Schulter und Spitzenbuckel stark vorspringend und glatt. Der Mesosternalfortsatz ist nach unten gesenkt, seitlich zusammengedrückt, hoch, die untere Ecke abgerundet, die obere rechtwinklig und zwischen die Vorderhüften reichend.

Durch diese Form des Mesosternalfortsatzes unterscheidet sich die *P. rubromaculata* leicht von der var. *nigra* der *P.*

bitacta KRAATZ. Die ostafrikanischen *P. distigma* und *bisignata* KRAATZ haben andere Form des Mesosternalfortsatzes, feinere Punktirung, hell metallisch grüne resp. blaugrüne Grundfarbe und eine grössere ovale gelbe Makel auf den Deckflügeln. *P. sankuruensis* ist glänzend kupferfarben, die Punktirung weitläufiger und seichter, die Deckflügel ganz seicht gestreift und fein punktirt, die Punktreihe im subsuturalen Interstitium nicht bis zum Hinterrand, im II Interstitium nur bis zur Mitte reichend.

14. *Adoretus costipennis* LANSBERGE 4 ♀.

15. *Adoretus rugulosus* BURM. 3 ♀.

16. *Adoretus* nov. spec.? 1 ♀.

Die Sammlung, die 16 Arten in 113 Ex. umfasst, ¹⁾ gehört dem Naturhistorischen Reichsmuseum in Stockholm.

¹⁾ Im Mus. stehen weiter 72 Duplikate = 185 Ex. (YNGVE SJÖSTEDT).

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1902. N:o 10.
Stockholm.

List of Pycnogonids collected by the Swedish zoological expedition to Spitzbergen and East Greenland 1900.

By Dr. EINAR LÖNNBERG.

Communicated 11 December 1902.

Revised by CHR. AURIVILLIUS.

The zoological expedition to the Arctic Sea, Spitzbergen, Jan Mayen and East-Greenland 1900 under the direction of Mr. G. KOLTHOFF made a fairly rich collection of Pycnogonids.¹⁾ It does not contain any new species, but as especially the region at and off the coast of East-Greenland was very little known before, there are several zoogeographical news of some importance. I think therefore that the following short list might deserve to be published.

Cordylochele brevicollis G. O. SARS.

- 1900 Stat. 18: East Greenland, long. 18° 40' W., lat. 74° 30' N., SE. of the Whalerus-island, 80—100 m. mud and stones. 1 spec.
- » Stat. 17: East Greenland, Mackenzie Bay (N. of Franz Joseph fiord). 12—35 m. mud. 2 spec.
 - » Stat. 27: East Greenland, Franz Joseph fiord, outer part of the Muskox-fiord, 220 m. 3 spec.

This species which is easily recognized on its short neck is an addition to the fauna of Greenland and was hitherto only known from Northern Norway, Wadsö and the Kara Sea.

¹⁾ In the following list are also reported about some specimens collected by the Arctic Expedition 1899 under the direction of Professor A. G. NATHORST.

***Nymphon grossipes* (FABR.).**

- 1900 Stat. 7: Spitzbergen, islands W. of Prince Charles Foreland, long. 11° 30' E., lat. 78° 20' N., 5—10 m., stones and algæ. 3 spec.

***Nymphon mixtum* KRÖYER.**

- Stat. 18: East Greenland, SE. of the Whalerus-island, long. 18° 40' W., lat. 74° 30' N., 80—100 m. mud and stones. 2 spec.
Stat. 20: East of Greenland, long. 19° 20' W., lat. 73° 55' N., 150 m. mud. Numerous spec.

Recent authors seem inclined to unite the two last mentioned species to one which then carries the first name. I cannot form myself any certain opinion about this on the material on hand because these comparatively few specimens may each easily be referred to one of either species by using the characteristics mentioned by Sars.

If both forms are counted together which must be done now when the geographical distribution is discussed, because later authors have done so, *N. grossipes* in its wider sense seems to extend all over the Northern Atlantic from the coasts of England and the Sound northwards, and in the Arctic from the Kara Sea (1) to East Greenland (4, 7), and from West Greenland down the North American Westcoast.

***Nymphon sluiteri* HOEK.**

- 1900 Stat. 17: East Greenland, Mackenzie Bay, N. of Franz Joseph fiord. 12—35 m. mud. Numerous.
» Stat. 18: East Greenland, SE. of the Whalerus Island, long. 18° 40' W., lat. 74° 30' N., 80—100 m. mud and stones. 4 spec.
» Stat. 24: East Greenland, Mackenzie Bay, 1—3 m. sand.

This species originally established on specimens from Barents Sea has afterwards been stated to live in the Kara Sea whence it has been collected by the Vega and Djimphna expeditions (1, 2). The Norwegian North-Atlantic expedition found it between Norway and Beeren Eiland, and the Danish Ingolf

expedition (3) at three stations between the Faroe Islands and Jan Mayen. Finally it is recorded by RODGER (5) off Coutt's Inlet.

It has thus a wide distribution in the Arctic Sea although it is not collected at so many localities. It seems as a rule to live in comparatively shallow water, but is once (>Ingolf 3) found in a depth of 762 fathoms.

It is new to the fauna of East Greenland.

***Nymphon longitarse* KRÖYER.**

Stat. 8: Spitzbergen, Kings Bay. 10—30 m. Stone and sand with Laminariæ. Numerous.

This species is known from the Kara Sea (1), South Spitzbergen, Barents Sea, West Greenland, the coasts of Norway, England, Davis Strait (5) and Eastern North America (S. to 42° N. lat.).

***Nymphon stroemi* KRÖYER forma *gracilipes* HELLER.**

1900 Stat. 17: East Greenland, Mackenzie Bay. 12—35 m. Mud. 2 spec.

» Stat. 19: East Greenland, SE. of Pendulum Island, long. 18° 15' W., lat. 74° 35' N. 150 m. Mud. 2 spec.

» Stat. 20: long. 19° 20' W., 73° 55' N. 150 m. Mud. 2 spec.

» Stat. 22: East Greenland, Mackenzie Bay. 12—18 m. Mud. 2 spec.

» Stat. 26: East Greenland, Franz Joseph's fiord, inner end of Muskoæ fiord. 100 m. Clay. Numerous.

» Stat. 27: outer part of the same fiord. 220 m. Clay. 1 spec.

» Stat. 28: East Greenland, off Mackenzie Bay. 100 m. Mud. 4 spec.

All the specimens referred to above show the characteristics of *gracilipes* except some few with shorter claws.

This species is widely distributed in the Arctic and North Atlantic, but was not recorded from quite so northern localities at East Greenland (4) before.

Nymphon elegans HANSEN.

- 1900 Stat. 16: Off East Greenland, long. 17° 56' W., lat. 72° 25' N. 300 m. Stones and sand. 2 spec.
 » Stat. 21: East Greenland between Bontekoe Island and Mackenzie Bay. 250 m. Mud. 1 spec.

This species has been collected at West Greenland, Baffins Bay 72° 40' N., 57° 15' W. by TH. HOLM (1886). It is also known from the Kara Sea, Spitzbergen, Barents Sea, Beeren Eiland, Norwegian Sea, Jan Mayen, Denmark Strait etc. With the present addition its area of distribution is still more complemented as it was hitherto unknown from East Greenland.

Nymphon longimanum G. O. SARS.

- 1900 Stat. 23: East Greenland, Mackenzie Bay. 3—10 m. Mud. 4 spec.
 » Stat. 24: East Greenland, Mackenzie Bay. 1—3 m. Sand. 2 spec.

This species was hitherto only known from the Kara Sea where it was collected by the Vega expedition (2).

Chætonymphon hirtipes BELL.

- 1899 Stat. 24: Lat. 73° 24' N., long. 21° 25' W. 70 m. Numerous.
 » Stat. 41: Lat. 72° 43' N., long. 24° 49' W. 35—60 m. Numerous.
 1900 Stat. 6: Spitzbergen, mouth of the Icefiord. 350 m. Mud. Numerous.
 » Stat. 16: Lat. 72° 25', long. 17° 56' W. 300 m. Sand and stones. Numerous.
 » Stat. 17: East Greenland, Mackenzie Bay. 12—35 m. Mud. Numerous.
 » Stat. 18: East Greenland, SE. of the Whalerus Island, lat. 74° 30' N., long. 18° 40' W. 80—100 m. Mud and stones. Numerous.
 » Stat. 19: East Greenland, SE. of the Pendulum Island, lat. 74° 35' N., long. 18° 15' W. 150 m. Mud and stones. Numerous.
 » Stat. 20: Lat. 73° 55' N., long. 19° 20' W. 150 m. Mud. 4 spec.

- 1900 Stat. 21: East Greenland, off Franz Josephs fiord, between the Bontekoe Island and Mackenzie Bay. 250 m. 1 spec.
- » Stat. 23: East Greenland, Mackenzie Bay. 3—10 m. Mud and sand with Laminarias. Numerous.
 - » Stat. 28: East Greenland, off Mackenzie Bay. 100 m. Mud. Numerous.

This species seems to be very common at East Greenland and occurs as well in shallow water near the shore as down in a depth of several hundred meters. It is already before known from so many different localities that it can be regarded as circumpolar.

***Chætonymphon macronyx* G. O. SARS.**

- 1900 Stat. 21: East Greenland, off Franz Joseph's fiord, between Bontekoe Island and Mackenzie Bay. 250 m. Mud. Numerous.
- » Stat. 22: East Greenland, Mackenzie Bay. 12—18 m. Mud. 1 spec.
 - » Stat. 24: East Greenland, Mackenzie Bay. 1—3 m. Sand. 1 spec.
 - » Stat. 26: East Greenland, Franz Joseph's fiord, inner end of the Muskoxfiord. 100 m. Clay. Numerous.
 - » Stat. 27: Outer end of the same fiord. 220 m. Clay. Numerous.

This species was hitherto known from the Kara Sea; the Sea between Norway, Jan Mayen and the Faroe Islands; Scoresby Sound, East Greenland (4); and 10 miles SW. of Cape Wild, off Erick Point etc. in Davis Straits (5).

The numerous specimens collected by this expedition prove that it is a common animal at the coast of East Greenland and it is accordingly a widely distributed arctic animal.

***Boreonymphon robustum* (BELL).**

- 1899 Stat. 25: Lat. 72° 28' N., long. 21° 48' W. 180 m. Numerous.
- » Stat. 42: Lat. 72° 56' N., long. 24° 49' W. 125 m. 2 spec.
 - » Stat. 43: Lat. 73° 32' N., long. 24° 35' W. 100—110 m. 1 spec.
- 1900 Stat. 16: Lat. 72° 25' N., long. 17° 56' W. 300 m. Stones and sand. Numerous.
- » Stat. 17: East Greenland, Mackenzie Bay. 12—35 m. Mud. Numerous.

- 1900 Stat. 19: East Greenland, SE. of Pendulum Island, lat. $74^{\circ} 35'$ N., long. $18^{\circ} 15'$ W. 150 m. Mud and stones. Numerous.
- » Stat. 20: Lat. $73^{\circ} 55'$ N., long. $19^{\circ} 20'$ W. 150 m. Mud. Numerous.
- » Stat. 21: East Greenland, off Franz Joseph's fiord between Bontekoe Island and Mackenzie Bay. 250 m. Mud. Numerous.
- » Stat. 25: East Greenland, mouth of Franz Joseph's fiord. 200—300 m. Mud. Numerous.
- » Stat. 26: Franz Joseph's fiord, inner end of the Muskoxfiord. 100 m. Clay. 2 spec.
- » Stat. 27: Outer part of the same fiord. 220 m. Clay. Numerous.
- » Stat. 28: East Greenland, off Mackenzie Bay. 100 m. Mud. Numerous.

Like the foregoing this species is very common at East Greenland and is also probably circumpolar.

***Ascorhynchus abyssi* G. O. SARS.**

- 1900 Stat. 13: N. of Jan Mayen, lat. $72^{\circ} 1'$ N., long. $8^{\circ} 33'$ W. 2400 m. Mud. 3 spec.
- » Stat. 29: Between Greenland and Jan Mayen, lat. $72^{\circ} 42'$ N., long. $14^{\circ} 49'$ W. 2000 m. Mud with foraminifers. Numerous.

This species was discovered by the Norwegian North Atlantic expedition and found at five stations, namely between Norway and the Faroe Islands, between Norway and Iceland. NW. of Lofoten, between Beeren Eiland and Greenland, and W. of Spitzbergen. By the addition of the two localities mentioned above it is made probable that this species inhabits the whole of the North Atlantic deep basin. A closely related form has been described by MEINERT under the name *A. tridens*. This was found by the Ingolf expedition at two stations S. of Jan Mayen and at a third N. of Iceland.

***Colossendeis proboscidea* SABINE.**

- 1900 Stat. 27: East Greenland, Franz Joseph's fjord outer part of the Muskoxfjord. 220 m. Clay. 1 spec.

This gigantic species has been observed before at many localities from the Siberian Ice Sea (lat. 76° 40' N., long. 115° 30' E.: Vega), the Kara Sea (1), Murman Coast, Barents Sea, Norwegian Sea, Storeggen (2), the Faroe Channel, the sea between Iceland and Jan Mayen, Davis Strait, northern West Greenland (Umanak) etc. It has thus a very wide arctic (perhaps circumpolar) distribution, but was hitherto not known from East Greenland.

***Colossendeis augusta* G. O. SARS.**

1899 Stat. 18: Lat. 74° 55' N., long. 17° 59' W. 350 m. 1 spec.

1900 Stat. 22: East Greenland, Mackenzie Bay. 12—18 m. Mud.
1 spec.

» Stat. 28: East Greenland, off Mackenzie Bay. 100 m. Mud.
1 young spec.

This species was discovered by the Norwegian North Atlantic expedition, but has afterwards been refound at many localities so that it can be said to be distributed from the Kara Sea, Barents Sea all over the North Atlantic to the Faroe Channel and the American east coast. It has not been recorded from the coasts of Greenland before.

**List of the most important literature on arctic
Pycnogonids.**

- (1) HANSEN, H. J.: Kara havets Pycnogonider. — Dijnphnatogetets zoologisk-botaniske Udbytte. Kjöbenhavn 1887.
- (2) SARS, G. O.: Pycnogonidea. Den Norske Nordhavs-Expedition XX. Christiania 1891.
- (3) MEINERT, F.: Pycnogonida. Den Danske Ingolf-Expedition. 3 Bd. N:o 1. Kjöbenhavn 1898.
- (4) HANSEN, H. J.: Pycnogonider og Malacostrake Krebsdyr. Meddelelser om Grönland. 19de Hefte. Kjöbenhavn 1896.
- (5) RODGER, A.: Preliminary Account of Natural History Collections made on a Voyage to the Gulf of St. Lawrence and Davis Straits. Proc. R. Soc. Edinburgh, Vol. XX. Edinburgh 1895.
- (6) VANHÖFFEN, E.: Die Fauna und Flora Grönlands. Grönlands Expedition d. Ges. f. Erdkunde zu Berlin 1891—93. Bd. 2. Berlin 1897.
- (7) BUCHHOLZ, R.: Crustaceen; Die zweite deutsche Nordpolarfahrt in den Jahren 1869 und 1870 unter Führung des Kapitän KARL KOLDEWEY. Leipzig 1874.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 342.)

- Cambridge, Mass.** *Astronomical Observatory of Harvard College.*
Annals. 41: P. 8—9. 1902. 4:o.
- Chicago.** *Field Columbian Museum.*
Publications. 64—65. 1902. 8:o.
- Genova.** *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*
Atti. Vol. 13 (1902): N. 2—3. 8:o.
- Graz.** *Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark.*
Mittheilungen. Jahrg. 1901. 8:o.
- Göttingen.** *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Philol.-hist. Klasse. N. F. Bd 5: N:o. 3; 6: 1—3. 1902. 4:o.
- Hamburg.** *Botanische Staatsinstitute.*
Jahresberichte. 1901. 8:o.
— *Horizontalpendel-Station.*
Mittheilungen. 1902: 5—8. 4:o.
- Helsingfors.** *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Finlands officiella statistik. VII: A: 11. 1902. 8:o.
- Italien.** *Commissione geodetica Italiana.*
Collegamento geodetico delle Isole Maltesi con La Sicilia. Firenze 1902. 4:o.
- Jekaterinburg.** *Société Ouralienne d'amateurs des sciences naturelles.*
Bulletin. T. 22. 1901. 8:o.
- Kazan.** *Kejserl. universitetet.*
Akademiskt tryck. 1902. 5 st. 8:o & 4:o.
Učenyija Zapiski. 69 (1902): 2—6. 8:o.
— *Observatoire météorologique de l'univ.*
Bulletin. 1901: 1—12. Fol.
- Kiel.** *Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere und biologische Anstalt auf Helgoland.*
Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. 6. 1902. 4:o.
- Kjöbenhavn.** *Biologisk Selskab.*
Forhandlinger. 1901/1902. 8:o.
— *Carlsberg-Laboratoriet.*
Meddelelser. Bd 5: H. 2. 1902. 8:o.
— *Commissionen for Ledelsen af de geologiske og geographiske Undersøgelser i Grønland.*
Meddelelser om Grønland. H. 21; 25; 27. 1902. 8:o.
— *Danmarks geologiske Undersøgelse.*
Række 1: Nr 9; 2: 11—13. 1902. 8:o.
- Kristiania.** *Universitets-Bibliotheket.*
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd 40: H. 3—4. 1902. 8:o.
- Leeds.** *Yorkshire geological and polytechnic society.*
Proceedings. N. S. Vol. 14: P. 3. 1902. 8:o.
- Lisboa.** *Academia Real das sciencias.*
Jornal de sciencias math., phys. e nat. (2) T 6 (1900/02): Num. 24. 8:o.

London. *Chemical society.*

Journal. Vols. 81—82 (1902): 12. 8:o.

Proceedings. Vol. 18 (1902): No 255—256. 8:o.

— *Geological society.*

List. 1901/1902. 8:o.

Quarterly journal. Vol. 58 (1902): P. 4. 8:o.

— *Royal Society.*

Philosophical Transactions. Vol. 194: B; 197: A; 198: A. 1901—1902. 4:o.

— *Zoological society.*

Proceedings. 1902: Vol. 2: P. 1 & Index 1891—1900. 1902. 8:o.

Transactions. Vol. 16: P. 7. 1902. 4:o.

London, Ontario. *Entomological society.*

The Canadian entomologist. Vol. 34 (1902): No 11. 8:o.

Manchester. *Geological society.*

Transactions. Vol. 27 (1901/1902): P. 17. 8:o.

Marseille. *Faculté des sciences.*

Annales. T. 12. 1902. 4:o.

Milano. *Società Italiana di scienze naturali.*

Atti. Vol. 41 (1902): Fasc. 3. 8:o.

Montevideo. *Observatorio meteorológico del colegio Pío de Villa Colón.*

Boletín mensual. Año 13 (1901): Núms. 10—12. 8:o.

— *Sociedad meteorologica Uruguay.*

Resumen de las observaciones pluviométricas. Año 10 (1901): 1—2. 8:o.

München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*

Abhandlungen. Hist. Classe. Bd 22: Abth. 2. 1902. 4:o.

» Math.-phys. Classe. Bd 21: Abth. 3. 1902. 4:o.

» Philos.-philol. Classe. Bd 22: Abth. 1. 1902. 4:o.

Odessa. *Nyryska Naturforskaresällskapet.*

Zapiski. T. 24: 1. 1901. 8:o.

Ottawa. *Field-naturalists' club.*

The Ottawa Naturalist. Vol. 16 (1902): No 8. 8:o.

— *Geological survey of Canada.*

Geol. map of Canada. Sheet No 783. 1902. Fol.

Paris. *Bureau central météorologique.*

Bulletin mensuel. Année 1902. 9. 4:o.

— *Société astronomique de France.*

Bulletin. 1902: 11. 8:o.

Pola. *Hydrographisches Amt der k. u. k. Kriegs-Marine.*

Meteorologische Termin-Beobachtungen. 1902: 8—10. tv. Fol.

Poona. *Maharaja Takhtasingji observatory.*

Publications. Vol. 1. 1902. 4:o.

Riga. *Naturforscher-Verein.*

Korrespondenzblatt. 45. 1902. 8:o.

Roma. *Reale accademia dei Lincei.*

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Rendiconti. (5) Vol. 11 (1902): Sem. 2: Fasc. 9—10. 8:o.

- San José.** *Instituto físico-geográfico de Costa Rica.*
Boletín. Año 2 (1901/1902): No. 21. 8:o.
- St. Pétersbourg.** *Hortus Imp. Petropolitanus.*
Scripta Botanica. Fasc. 18. 1902. 8:o.
- *Musée zoologique de l'Académie imp. des sciences.*
Annuaire. T. 7 (1902): N:o 1—2. 8:o.
- *Observatoire physique central Nicolas.*
Annales. Année 1900: P. 1—2. 4:o.
- *Societas entomologica Rossica.*
Horæ. T. 35: N:o 3—4. 1902. 8:o.
- *Universitetet.*
Obozrénie prepodavanija nauky. [Öfvers. af föreläsningar]. 1902/03. 8:o.
- Zapiski istoriko-filologičeskago fakulteta. 54: 3; 62—65: 1—2; 66. 1900—1902. 8:o.
- *Universitets-Biblioteket.*
Katalog. T. 2 (1896—1901). 1902. 8:o.
- Strassburg.** *K. Hauptstation für Erdbebenforschung.*
Monatsbericht. 1902: 6—7. 8:o.
- Sydney.** *Department of mines.*
Annual report. Year 1901. Fol.
- *Linnean society of N. S. Wales.*
Proceedings. Vol. 27 (1902): P. 2. 8:o.
- *Royal society of N. S. Wales.*
Journal and proceedings. Vol. 35 (1901). 8:o.
- Tokyo.** *Imperial university. College of science.*
Journal. Vol. 16: Art. 7—14; 17: 10. 1902. 4:o.
- Trieste.** *I. R. Osservatorio astronomico-meteorologico.*
Rapporto annuale. Anno 1899. 4:o.
- Verona.** *Accademia d'agricoltura, scienze, lettere, arti e commercio.*
Atti e memorie. (4) Vol. 2. 1901—1902. 8:o.
- Warschau.** *Observatoire astronomique Jędrzejewicz.*
Observations micrométriques de nébuleuses. P. 1. 1902. 8:o.
- Washington.** *U. S. Department of agriculture.*
Crop reporter. Vol. 4 (1902/03): 6. 4:o.
- Bureau of plant industry. Bulletin. No. 22. 1902. 8:o.
- Division of biological survey. North American Fauna. No. 22. 1902. 8:o.
- Division of publications. Bulletin. No. 7. 1902. 8:o.
- ” ” ” Circular. No. 446, 448. 1902. 8:o.
- Office of experiment stations. Annual report. 1900/1901. 8:o.
- ” ” ” ” Bulletin. No. 113, 118. 1902. 8:o.
- ” ” ” ” Experiment station record. Vol. 13: No. 12. 1902. 8:o.
- Library. Bulletin. No. 41. 1902. 8:o.
- *Weather bureau.*
Weather map. 1902: 6—8. Fol.
- Wien.** *K. K. Central-Anstalt für Meteorologie u. Erdmagnetismus.*
Jahrbücher. N. F. Bd 39 (1902). 4:o.

Wien. *K. K. geologische Reichsanstalt.*

Verhandlungen. 1902: No 9—10. 8:o.

— *K. K. Militär-geographisches Institut.*

Astronomisch-geodätische Arbeiten. Bd 18. 1902. 4:o.

— *K. K. Universitäts-Sternwarte.*

Annalen. Bd 14; 17. 1900, 1902. 4:o.

— *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.*

Verhandlungen. Bd. 52 (1902): H. 9. 8:o.

Af Herrar Frölén & Comp.:

CORNISH, CH. J., De lefvande djuren på jorden. H. 4—6. 1902. 4:o.

Af Madame Veuve Godin, Guise.

Le Devoir. T. 26 (1902): 11. 8:o.

Af utgifvarne:

La feuille des jeunes naturalistes, publ. par A. DOLLFUS. (4) Année 32 (1902/03): N:o 386. 8:o.

Af författarne:

HOLMGREN, N., Über die Exkretionsorgane des *Apion flavipes* und *Dacyles niger*. Jena 1902. 8:o.

MITTAG-LEFFLER, G., Représentation analytique d'une fonction monogène. 1—4. Sthlm 1899—1902. 4:o.

NATHORST, A. G., Die kartographische u. geolog. Aufnahme d. Kaiser Franz Josef-Fjords u. d. König Oskar-Fjords in Nordost Grönland 1899. Wien 1902. 8:o.

RETZIUS, G., Biologische Untersuchungen N. F. 10. Sthlm 1902. Fol.

WESTERLUND, C. A., Synopsis molluscorum in regione palaeartica viventium ex typo *Clausilia* Drap. St. Pétersb. 1901. 4:o.

— Kritik och »kritik». Hfors 1902. 8:o.

ARECHA VALETA, J., Contribución al conocimiento de la flora Uruguaya. Montevideo 1902. 8:o.

DZSEVDET, ACHMED, Evlija Cselebi Szijachat nameszi. 8:o.

EVANS, H. B., The mean right ascensions and proper motions of 254 stars. Philadelphia 1902. 4:o.

HELLMANN, G., Regenkarte d. Provinzen Schleswig-Holstein u. Hannover... Berlin 1902. 8:o.

HENSGEN, C., Biometrische Untersuchungen über die Spielarten von *Helix nemoralis*. Cambridge 1902. 8:o.

SCHEUTZ, T., Über alkylirte Amidobenzolsulfosäuren u. Metamidophenole. Diss. Zürich 1901. 8:o.

—

Tryckt den 26 januari 1903.

Stockholm 1903. Kungl. Boktryckeriet.

Skandinavien's Fiskar

målade af

W. von Wright

beskrifna af

B. Fries, C. U. Ekström och C. Sundevall.

Andra upplagan, bearbetning och fortsättning af *F. A. Smitt.*

Detta planschverk afser icke blott att lemna vetenskapsmännen trogna och tillförlitliga figurer öfver fäderneslandets fiskarter och mera åskådligt framställa denna del af dess fauna; det har derjemte ett icke mindre viktigt ändamål, att för en hvar underlätta fiskarnes igenkännande och göra deras studium tillgängligt för alla, som med nöjet och nyttan af fiskets praktiska utöfning önska förena en zoologisk kännedom om dem och deras naturförhållanden.

Skandinavien's fiskfauna har att uppvisa 224 arter. I den förra upplagan af detta verk afbildades 61 arter; i föreliggande nya upplaga däremot 223 arter. Af en art har nämligen icke någon figur kunnat anskaffas, enär intet exemplar af denna art numera finnes förvaradt i något museum. Härutöfver meddelar den nya upplagan afbildningar af 5 bastarder af karpfiskar och 9 arktiska arter. De kolorerade figurerna äro tillhoppa 190, zinkotypierna i texten 380.

Verket, som omfattar 1,239 textsidor och 55 planscher, utom, såsom nyss nämnts, 380 figurer i texten, tillhandahålles dels häftadt, dels bundet. Bokhandelspriset är för häftadt ex. 200 kr.; för ex. i tre band (texten i två och taflorna i ett band) 222 kr.

Lösa delar eller häften säljas icke.

I hvarje välordnad bokhandel kan närmare kännedom tagas om verket och i mån af tillgång erhållas ett prospekt om detsamma, hvari meddelas prof å så väl texten som taflorna.

P. A. Norstedt & Söner.

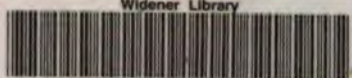


KUG14-5W

JAN 20 1964 H

01-30081

Widener Library



3 2044 092 557 602

